2012年 物理数学 II レポート 第一回

提出先: 紙に書いて手渡すか、メールで tachikawa.kougi.report@gmail.com に PDF ファイルか Word ファイルか紙に書いたのを携帯/デジカメで読めるように撮るなりして画像で送るかしてください。どの場合も、名前と番号をはっきり書いてください。

締切: 手渡しの場合は、来週 12/20 の講義から帰るときに僕に渡していってください。メールで送る場合は、日本時間で年内にメールを送ってください。

注意: 答えだけでなく、導出も書いてください。導出を何処まで書くかはお任せします。また、問題に不備があったばあいは適宜修正してから答えてください。

問題 1: 熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)$$

を考える。

(1) x 方向が無限に広い場合 $-\infty < x < \infty$ を考える。$t=0$ での値が

$$f(t=0,x) = e^{-x^2}$$

で与えられたばあい、時刻 $t>0$ での $f(t,x)$ の値はどうなるか。

(2) x 方向が有限で $-L \leq x \leq L$ であり、周期的境界条件 $f(t,x=L) = f(t,x=-L)$ の場合を考える。$t=0$ での値が

$$f(t=0,x) = \sin^2(\frac{\pi x}{2L})$$

で与えられたばあい、時刻 $t>0$ での $f(t,x)$ の値はどうなるか。

(3) (2) と同じ境界条件で、時刻 $t=0$ での初期値 $f(t=0,x)$ が与えられているとき、$t \to +\infty$ としたときの $f(t,x)$ を求めよ。

問題 2: 波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,x) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x)$$

を考える。

(1) x 方向が無限に広い場合 $-\infty < x < \infty$ を考える。一般解が

$$f(t,x) = f_L(x+vt) + f_R(x-vt)$$

と書けることを示せ。

(2) x 方向が半直線 $0 \leq x < \infty$ であって、境界条件が $f(t,x=0)=0$ で与えられる。一般解はどうなるか。

(3) x 方向が半直線 $0 \leq x < \infty$ であって、境界条件が $\partial f/\partial x|_{x=0} = 0$ で与えられる。一般解はどうなるか。

問題 3: 2 次元で固有値問題

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})f(x,y) = -\alpha f(x,y)$$

を考える。

(1) 領域は $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ で、境界では $f = 0$ とする。固有関数は x と y の三角関数の積で書けることを示して、α を小さい順に 4 つ書け。

(2) 領域は円盤 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$ で、境界では $f = 0$ とする。極座標 r, θ にうつると、固有関数は r のベッセル関数を用いて書けることを示して、α を小さい順に 4 つ書け。ベッセル関数の零点が必要になりますが、いろいろなところにのっているので調べて使ってください。出典もきちんと書くこと。もしくは、頑張って自分で数値計算してみてくれてもいいです。

問題は以上です。