2012年 物理数学 II レポート 第二回

提出先: 紙に書いて手渡すか、メールで tachikawa.kougi.report@gmail.com に PDF ファイルか Word ファイルか紙に書いたのを携帯/デジカメで読めるように撮るなりして画像で送るかしてください。どの場合も、名前と番号をはっきり書いてください。

締切: 手渡しの場合は、再来週 1/24 の講義から帰るときに僕に渡していってください。メールで送る場合は、日本時間で月末までにメールを送ってください。

注意: 答えだけでなく、導出も書いてください。導出を何処まで書くかはお任せします。また、問題に不備があったばあいは適宜修正してから答えてください。

問題: 以下の大問 4 つのうち、**どれか一つを選んで**解答してください。どの問題も配点は変わりません。

大問 1: 授業では物理数学 I でガンマ関数、ベータ関数、物理数学 II でベッセル関数、ルジャンドル (陪) 多項式、ラゲール (陪) 多項式、エルミート多項式について詳しくやった。**それ以外**の名前のついた特殊関数について、何か一つ調べて数頁程度にまとめよ。

大問 2: これが本来のレポート問題です。ラゲール多項式 $L_n(x)$ について、以下の問いに答えよ。

1. $L_n(x)$ は n 次多項式で、最高次の係数は $(-1)^n$ であり、直交性

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{mn} N_n \tag{1}$$

を満たす。これを用いて、$L_n(x)$ と N_n を $n = 0, 1, 2, 3$ について求めよ。

2. $L_n(x)$ はまた、ラゲールの微分方程式

$$(x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} + \lambda) f(x) = 0 \tag{2}$$

で λ を適切に選んだ際の多項式解としても定義できる。まず、

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \tag{3}$$

とし、これを微分方程式 (2) に代入して、c_i と c_{i+1} の関係を求めよ。λ がどのような値のときに $f(x)$ は有限項の和になるか。これを用いて、$L_n(x)$ を $n = 0, 1, 2, 3$ について求め、前の結果と一致することを確認せよ。

3. $L_n(x)$ はロドリゲスの公式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \tag{4}$$

を用いても求められる。これを利用して、式 (1) の N_n を求めよ。

4. 母関数表示

$$\sum_{n=0}^\infty L_n(x) \frac{y^n}{n!} = e^{-xy/(1-y)}/(1-y) \tag{5}$$

を導け。

5. 母関数表示の両辺を x および y で微分して比較することで、$L_{n+1}(x)$ 及び $xL'_n(x)$ を $L_n(x)$ と $L_{n-1}(x)$ とであらわせ。

6. ラゲール陪多項式

$$L_n^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) \tag{6}$$

は $L_n(x)$ のロドリゲスの公式 (4) から

$$L_n^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \tag{7}$$

とあらわせるが、$L_n^{(m)}(x)$ 自体が重み $e^{-x}x^m$ のもとでの $(n-m)$ 次の直交多項式であるため、それ自身のロドリゲス公式

$$L_n^{(m)}(x) \propto x^{-m} e^x \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^{n-m} x^m e^{-x}) \tag{8}$$

を持つ。式 (7) と式 (8) が定数倍を除いて等しいことを示せ。一般的に証明するのが大変ならば、いくつかの例 ($m = 3, n = 5$ 等) で確認するのでも良い。

大問 3: 授業では直交多項式系で二階の微分方程式を満たすのは良く知られたものに限る、という Bochner の定理を紹介した。原論文は S. Bochner, **Über Strum-Liouvillesche Polynomsysteme**, Math. Z. 29 (1929) 730-736 (オンライン版にリンク) である。これの内容を解説せよ。逐語訳せよというわけではないので、自分なりに理解して、まとめてください。

大問 4: ルジャンドル (陪) 多項式は回転群、エルミート多項式は生成消滅演算子をもちいて導出することができる。同様に、ラゲール多項式も、回転群を用いて導出できる事が知られている。論文は B. Kostant, **On Laguerre polynomials, Bessel functions, Hankel transform and a series in the unitary dual of the simply-connected covering group of** $SL(2, \mathbb{R})$, Representation Th. 4 (2000) 181 (オンライン版にリンク) である。この論文の内容を (少なくとも Section 1 と 2 を) 解説せよ。大問 2 と同様、逐語訳せよというわけではないので、自分なりに理解して、まとめてください。

問題は以上です。