物理数学 II (2013 年度) テスト (2014/1/23 実施)

僕の講義ノートを持ち込んでいる人は、テストに関係あるあたりの係数が丁度間違っている気がします。(わざとではありません、単にずぼらなだけです、すみません. . .) ですから闇雲に写さないようにお願います。解答の導出は数学的に完全に厳密である必要はありません。問題が多すぎると思いますが、点数は調整しますので全部解かなくても大丈夫です。前から解くのが大変だったら、出来るものからやってください。問題に間違いが見つかったら、すぐに僕に教えてください。

大問 1

1. x, y, z 軸方向の幅がそれぞれ X, Y, Z の直方体の領域を考え、周期的境界条件
$$f(x,y,z) = f(x+X,y,z) = f(x,y+Y,z) = f(x,y,z+Z) \tag{1}$$
のもとで、ラプラシアン $\Delta = (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2$ の固有値問題
$$\Delta f(x,y,z) = -Ef(x,y,z) \tag{2}$$
を考える。一次独立な固有関数 f およびその固有値 E を全て求めよ。

2. 1. の設定で、与えられた値 E 以下の一次独立な固有関数の数 $N_{X,Y,Z}(E)$ を求めよ。ただし、 X, Y, Z は充分大きいとして近似的に計算せよ。これが直方体領域の体積に比例することを確かめよ。

3. 次に、原点中心半径 R の球体の領域を考え、極座標 (θ, ϕ, r) を用い、境界条件
$$f(x,y,R) = 0 \tag{3}$$
のもとで、ラプラシアンの固有値問題
$$\Delta f(x,y,z) = -Ef(x,y,z) \tag{4}$$
を考える。一次独立な固有関数 f およびその固有値 E をすべて求めよ。

4. 3. の設定で、与えられた値 E 以下の一次独立な固有関数はの数 $N_R(E)$ を求めよ。ただし、R が充分大きいとして近似的に計算せよ。その際、ベッセル関数 $J_\nu(x)$ の正の実軸上の零点で τ と $\tau+\delta\tau$ の間にあるものの数 $n(\tau)\delta\tau$ は $\delta\tau$ が充分に大きく、ν と τ がさらに充分に大きくければ近似的に
$$n_\nu(\tau)\delta\tau = \begin{cases} \pi^{-1}\sqrt{1-(\nu/\tau)^2}\,\delta\tau & (\tau > \nu) \\ 0 & (\tau < \nu) \end{cases} \tag{5}$$
で与えられることを使って良い。結果が球体の体積に比例し、係数は 2. で求めたものと一致することを確認せよ。

コメント 統計力学を学ぶと、箱にいれられた量子自由粒子系の温度 T における全エネルギーは、適切な分布関数 $f(E,T)$ を用いて $\int_0^\infty f(E,T)(dN(E)/dE)dE$ に比例することを学ぶ。この結果が体積に比例する、という、物理的には当たり前の事実を保証しているのがこの結果で、ある意味それから (5) を導出することが出来ると思ってもよい。

大問 1 はここまで、大問 2 はうらにあります

大問 2

1. 関数 $f(x)$ に対して、そのフーリエ変換を

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \tag{6}$$

とする。このとき、ポワソン和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi m) \tag{7}$$

を示せ。(ヒント: $F(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ は x に関して周期 1 の周期関数である。これをフーリエ級数展開し、係数を決定した上、$x=0$ を代入すると良い。)

2. 関数 $\theta(t)$ を

$$\theta(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \tag{8}$$

と定める。$\theta(1/t) = t^{1/2}\theta(t)$ を示せ。

3. 関数 $\Xi(s)$ を

$$\Xi(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}(\theta(t)-1) t^{s/2-1} dt \tag{9}$$

で定める。まず、$s>1$ とし、$\theta(t)$ の定義 (8) を代入して計算することにより、$\Xi(s)$ を Γ 関数および ζ 関数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \qquad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{10}$$

を用いて書き直せ。

4. 次に、(9) を勝手な s で収束する形に書き換えよう。そのため、t 積分を $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ と分割したのち、$\int_0^1$ の部分のみ $t \to 1/t$ をつかって変数変換し、$\theta(1/t) = t^{1/2}\theta(t)$ を使うとよい。この結果、$\Xi(s) = \Xi(1-s)$ であることを示せ。

5. 上記二問を組み合わせると、$\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ の関係がつき、$\zeta(s)$ が複素平面全体に解析接続できたことになる。$\zeta(2) = \pi^2/6$ は知っているものとして、$\zeta(-1)$ を求めよ。ナイーブにはこれは "$\zeta(1) = 1+2+3+\cdots$" であるが、答えは負の有理数になる。

問題は以上です