4　ラプラシアンと直交関数系

これまでフーリエ変換を用いて偏微分方程式を解くことを学んだ。関数を e^{ikx} で展開するのは無限に広いばあいや周期的境界条件のとき適切で、一次元で境界条件がディリクレやノイマンのときは e^{ikx} をすこし組み合わせた $\sin kx$ や $\cos kx$ で展開できる。

二次元や三次元のときに、考えたい領域が長方形や直方体のときならこれらを組み合わせて $e^{ik_x x}\sin k_y y \sin k_z z$ 等で $k_{x,y,z}$ を適切に選べば展開することが出来るが、しばしば考えたい領域は円盤だったり円筒だったり球対称だったりする。そういうときはどうすればよいか、というのを考えよう。

4.1　ラプラシアンのエルミート性

一次元のときは既にやったが、次元が高い場合に一般的にどうなるかを考えよう。領域 X があって、その境界を B とする。X 内の関数 f に対して、$\Delta f = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f$ がラプラシアン。関数 f, g に対して内積は

$$(f,g) = \int_X \overline{f(\vec{x})} g(\vec{x}) d^3x \tag{4.1}$$

と定めよう。(二次元の領域の場合は d^3x を d^2x にかえるだけで、その他の式変形は全くおなじです。) 確かめたいのは

$$(\Delta f, g) = (f, \Delta g) \tag{4.2}$$

である。そこで、まず

$$\begin{aligned}(\Delta f, g) &= \int_X \overline{\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f(\vec{x})} g(\vec{x}) d^3x &(4.3)\\ &= -\int_X \overline{\vec{\nabla} f(\vec{x})}\cdot\vec{\nabla} g(\vec{x}) d^3x + \int_B \overline{\vec{\nabla} f(\vec{x})} g(x)\cdot d\vec{n}, &(4.4)\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}(f, \Delta g) &= \int_X \overline{f(\vec{x})}\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} g(\vec{x}) d^3x &(4.5)\\ &= -\int_X \overline{\vec{\nabla} f(\vec{x})}\cdot\vec{\nabla} g(\vec{x}) d^3x + \int_B \overline{f(\vec{x})}\vec{\nabla} g(x)\cdot d\vec{n}, &(4.6)\end{aligned}$$

を考えると、

$$(\Delta f, g) - (f, \Delta g) = \int_B \left(\overline{\vec{\nabla} f(\vec{x})} g(x) - \overline{f(\vec{x})}\vec{\nabla} g(x)\right)\cdot d\vec{n} \tag{4.7}$$

である。これがゼロになってほしい。方策はいろいろあるが、

- X は無限に広いので、B は無限遠、そこでは f, g とも充分早く小さくなっていると思う。
- X は何らかの意味で周期的になっているので、そもそも境界 B は無い。一次元で周期的だとか、X は地球表面やら天球全体の場合もそうである。
- 境界 B では Δ の作用する関数 f, g は 0 。(ディリクレ条件)
- 境界 B では Δ の作用する関数 f, g は $\vec{\nabla} f = \vec{\nabla} g = 0$ を満たす。(ノイマン条件)

こういう条件のどれかを満たすときは、ラプラシアン Δ はエルミートであるので、固有関数系が取れ、互いに直交し、勝手な関数はそれらで展開できる。

また、実関数 $V(\vec{x})$ を考えれば、当然

$$(f, Vg) = (Vf, g) \tag{4.8}$$

なので、「$V(\vec{x})$ を掛ける」という演算子もエルミート。エルミート演算子を二つ足してもエルミートなので、

$$\Delta + V(\vec{x}) \tag{4.9}$$

という演算子も (境界条件を適切に選んであれば) エルミートになる。よって、固有関数系がとれ、それらは互いに直交する。

このように、ラプラシアンを解析する際には直交関数系がしばしばあらわれる。

4.2 一例: 円板内のラプラシアン

実例として、二次元で円板内 $x^2 + y^2 \leq R^2$ でラプラシアンを考えたいと思う。$x + iy = re^{i\theta}$ として極座標 r, θ を導入すると、

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{4.10}$$

円板上で定まった関数を $f(x, y) = f(r, \theta)$ と書こう。(数学的には、二つの実数から一つの複素数を定める関数としては違うので、$f(x, y) = \underline{f}(r, \theta)$ とか別の記法を使ったほうがいいと思うかもしれないが、物理では慣習として同じ記号を使う。)

θ 方向には周期 2π なので、勝手な関数は

$$f(r, \theta) = \sum_m F_m(r) e^{im\theta} \tag{4.11}$$

と展開出来る。ただし m は全ての整数をわたる。一項とりだして

$$F_m(r) e^{im\theta} \tag{4.12}$$

を考えると、上記ラプラシアンは

$$F_m(r) e^{im\theta} \mapsto \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\right) F_m(r) e^{im\theta} \tag{4.13}$$

と作用する。一般論から、

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \tag{4.14}$$

という演算子はエルミートで、直交固有関数系をもつ。ここでエルミートと言う際、$f(r)$ と $g(r)$ の内積は

$$(f, g) := \int_0^R \overline{f(r)} g(r) r dr \tag{4.15}$$

であって、単に dr を掛けて積分ではなくて rdr を掛けて積分になっている。これは、もともと積分の重みが $dxdy$ だったものを $rdrd\theta$ と極座標にして、$d\theta$ 方向を先に積分してしまったので rdr

になっている。エルミート性を直接確認しておくのも悪くない:

$$(f, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}g) = \int_0^R \overline{f}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}grdr \tag{4.16}$$

$$= \int_0^R \overline{f}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}gdr \tag{4.17}$$

$$= -\int_0^R (\frac{\partial}{\partial r}\overline{f}\frac{\partial}{\partial r}g)rdr + [r\overline{f}\frac{\partial}{\partial r}g]_0^R \tag{4.18}$$

より、$r=0$ での境界項は r の因子でよほどのことがない限り消え、$r=R$ でディリクレもしくはノイマンであればそちらの境界項は消える。これよりエルミート性がわかった。

新年にやるように、具体的には固有関数はベッセル関数で書ける。もうすこしだけ言っておくと、固有値を $-k^2$ とすると

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + k^2\right] f(r) = 0 \tag{4.19}$$

$s = kr$ とすると

$$\left[\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}s\frac{\partial}{\partial s} - \frac{m^2}{s^2} + 1\right] f(s) = 0 \tag{4.20}$$

これを Bessel の微分方程式という。二階の微分方程式だからふたつ独立な解をもつ。原点でなめらかなものを $J_m(s)$ という。$J_m(s)$ の i 個目の零点を $\tau_{m,i}$ と書こう:

$$J_m(\tau_{m,i}) = 0, \qquad 0 < \tau_{m,1} < \tau_{m,2} < \tau_{m,3} < \cdots \tag{4.21}$$

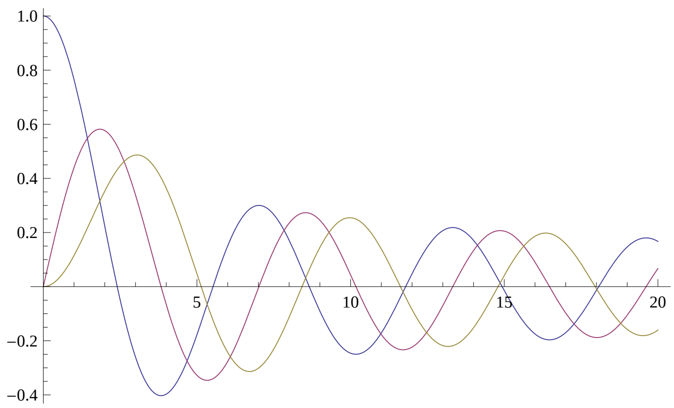

図 1: Bessel 関数 $J_0(x)$, $J_1(x)$ と $J_2(x)$

$r=R$ でゼロというディリクレ境界条件を課すなら、$J_m(kR)=0$ より $k=\tau_{m,i}/R$。よって

$$J_m(\frac{\tau_{m,i}}{R}r)e^{im\theta}, \qquad m = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots; \quad i = 1, 2, \ldots \tag{4.22}$$

が固有関数系。

4.3 一例: 球面上のラプラシアン

同様に、球面上のラプラシアンを考える。これは、三次元のラプラシアンを球座標で書いておいて r の項を落とせば求まるが、導出は後回し。

$$\Delta = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{(\sin\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{4.23}$$

で与えられる、ただし θ が天頂角 (0 から π) で ϕ が方位角 (0 から 2π)。(方位角: azimuthal angle、天頂角: polar angle、天頂: zenith、天底: nadir)

球面には境界はないので、 Δ は文句無くエルミート。固有関数を球面調和関数と言う。ϕ 方向は 2π 周期なので、まず

$$f(\theta,\phi)=\sum_m F_m(\theta)e^{im\phi} \tag{4.24}$$

と展開できる。但し m は勝手な整数。 $F_m(\theta)$ に対してはラプラシアンは

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{m^2}{(\sin\theta)^2} \tag{4.25}$$

ではたらく。$z=\cos\theta$ を導入する。(これは球面を半径 1 で三次元空間に埋め込んだとおもえば、本当に z 座標) すると固有値問題は

$$\left(\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}-\frac{m^2}{1-z^2}\right)f(z)=-\alpha f(z) \tag{4.26}$$

ただし $-\alpha$ が固有値。一般論より、左辺の演算子は区間 $-1\le z\le 1$ でエルミートだから、固有関数が離散無限個あって、それで展開できるはず。

移項して

$$\left(\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}-\frac{m^2}{1-z^2}+\alpha\right)f(z)=0 \tag{4.27}$$

を Legendre の微分方程式 ($m=0$) もしくは陪微分方程式 ($m\neq 0$) と呼ぶ。陪は英語では associated だから大した単語ではない。日本語ではほかに陪審員にぐらいしか使わないのでは？

$-1\le z\le 1$ で連続な解は l を $|m|$ 以上の整数として $\alpha=l(l+1)$ ごとにひとつのみある。その時、固有関数は不思議なことに z の多項式 (かける $(1-z^2)^{m/2}$) になる。それを $P^l_m(z)$ と書き、ルジャンドルの (陪) 多項式と言う。

さかのぼると、球面上のラプラシアンの固有関数は

$$P^l_{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi},\qquad m=\ldots,-1,0,1,2,\ldots;\quad l=|m|,|m+1|,\ldots \tag{4.28}$$

で、固有値は $\alpha=-l(l+1)$。ひとつ固有値 l を決めると、$m=-l,-l+1,\ldots,l-1,l$ まで $2l+1$ 個 ϕ 依存性の異なる固有関数がある。これは授業の最終回に回転群の立場から別の説明をする。

4.4 ラプラシアンの直交曲線座標での表示について

ラプラシアンを球座標に変換するのは面倒な練習問題として大学初年時で出てくるのではないかと思うが、エルミート性を確認する際に途中にでてきた式をつかうと比較的簡単にできる。すなわち、境界条件が適切に課してあれば

$$(f,\Delta g)=-(\vec\nabla f,\vec\nabla g)=-\int\overline{\vec\nabla f}\cdot\vec\nabla g d^3x \tag{4.29}$$

であるが、たとえば球座標においては微小長さは

$$ds^2=dr^2+(rd\theta)^2+(r\sin\theta d\phi)^2 \tag{4.30}$$

であたえられるので、

$$d^3x=(dr)(rd\theta)(r\sin\theta d\phi)=r^2\sin\theta drd\theta d\phi \tag{4.31}$$

また $\vec{\nabla} f$ も、考えている点 (r,θ,ϕ) で dr, $d\theta$, $d\phi$ に沿った座標系で測れば

$$\vec{\nabla} f = (\frac{\partial}{\partial r}f, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}f, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}f)^t \tag{4.32}$$

である。よって、(4.29) の右辺はこの場合は

$$\begin{aligned} &-\int(\frac{\partial}{\partial r}\bar{f}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\bar{f}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\bar{f})\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}g \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}g \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}g\end{pmatrix} r^2\sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= \int\overline{f}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{r}r^2\sin\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\phi}\frac{1}{r\sin\theta}r^2\sin\theta\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)g dr d\theta d\phi \end{aligned} \tag{4.33}$$

一方、(4.29) の左辺は

$$\int(\overline{f}\Delta g)r^2\sin\theta dr d\theta d\phi \tag{4.34}$$

であるので、比較して

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{(\sin\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \tag{4.35}$$

がわかった。

一般に、直交座標系 (s_1, s_2, s_3) で微小長さが $s_{1,2,3}$ の関数 $n_{1,2,3}(s_1, s_2, s_3)$ を用いて

$$ds^2 = (n_1 ds_1)^2 + (n_2 ds_2)^2 + (n_3 ds_3)^2 \tag{4.36}$$

であらわされるならば、上記導出を繰り返せばラプラシアンは

$$\Delta = \frac{1}{n_1 n_2 n_3}\left(\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{n_2 n_3}{n_1}\frac{\partial}{\partial s_1} + \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{n_3 n_1}{n_2}\frac{\partial}{\partial s_2} + \frac{\partial}{\partial s_3}\frac{n_1 n_2}{n_3}\frac{\partial}{\partial s_3}\right) \tag{4.37}$$

で与えられる。他の次元でもほとんど同様。

4.5 Sturm-Liouville 型微分方程式

以上の議論から、もうすこし一般に以下の状況でかんがえてみよう。一次元で、区間 $[a,b]$ 上での関数のなす線形空間を考える。場合に応じて a は $-\infty$, b は ∞ も許すことにする。内積は非負の $\rho(x)$ という重み関数をつかって

$$(f,g) = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\rho(x)dx \tag{4.38}$$

と定めよう。ここで、エルミート演算子 L を

$$(f,Lg) = \int_a^b \left(-\overline{f'(x)}g'(x)p(x) - f(x)g(x)q(x)\right)dx \tag{4.39}$$

で定めよう。部分積分をすれば、適切な境界条件があるので境界項が落とせるとして

$$(f,Lg) = \int_a^b \overline{f(x)}(\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} - q(x))g(x)dx \tag{4.40}$$

であるので、L は (4.38) と比較して

$$L = \frac{1}{\rho(x)}(\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx} - q(x)) \tag{4.41}$$

とわかった。これはエルミートだから、固有値を $-\lambda$ とすると固有関数を定める方程式は

$$\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}f(x) - q(x)f(x) = -\lambda\rho(x)f(x) \tag{4.42}$$

と書ける。ここで固有値を $-\lambda$ と書くのは、(4.39) で $p(x)$, $q(x)$ が非負の関数ならば

$$(f, Lf) \leq 0 \tag{4.43}$$

となるので、固有値は非負になるからである。(4.42) を Sturm-Liouville 型の微分方程式と言う。

これまで出てきた例では、Bessel の微分方程式 (4.19) は区間 $r \in [0, R]$ で

$$p(r) = r, \qquad q(r) = \frac{m^2}{r}, \qquad \rho(r) = r \tag{4.44}$$

また Legendre の (陪) 微分方程式 (4.27) は区間 $z \in [-1, 1]$ で

$$p(z) = 1 - z^2, \qquad q(z) = \frac{m^2}{1 - z^2}, \qquad \rho(r) = 1 \tag{4.45}$$

としたもので、両者とも Sturm-Liouville 型。固有関数達は直交関数系をなす。Bessel 関数の場合は多項式にはならないが、Legendre の微分方程式の場合は多項式になる。

- 二階の一変数微分方程式を考えるのは、物理でやる色んな微分方程式は大抵二階で、それを変数分離して出てくるから。
- 直交関数系になるのは、物理でやる色んな微分方程式は変分原理から出てくるので大抵エルミートだから。
- 答えが多項式になる物理的背景はよくわからないが、時々多項式になる。

Sturm-Liouville 型の方程式の解を調べる方法はいろいろある。たまたま直交多項式系になるばあいは、直交多項式の理論を使える。これを次にやる。$p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ が複素平面上の有理関数で、特異点の数があまり多くなければ、(合流型) 超幾何関数の理論をつかって調べることが出来る。これはその次にやる。どちらでも無い場合でも、いろいろ一般論があっていろいろな性質がわかる。たとえば、$p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ が全て非負ならば、固有関数を固有値の絶対値の小さい順にならべて $f_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ と呼ぶと、$f_n(x)$ は n 個の零点を持つ。こういう一般論は時間が多分ないのでやらない。

5 直交多項式系

5.1 一般の直交多項式系

一般に、直交多項式は区間とその上の重み関数 $\rho(x)$ を与えると決まる。すなわち、内積が

$$(f,g)=\int_a^b \overline{f(x)}g(x)\rho(x)dx \tag{5.1}$$

で与えられているとき、関数列

$$1, x, x^2, x^3, \ldots \tag{5.2}$$

に Schmidt の直交化法を適用すればよい。どういうことかというと、$Q_n(x)$ が n 次式で、

$$(Q_n, Q_m)=\delta_{mn}c_n \tag{5.3}$$

というものをつくりたいとする。但し、簡単のため

$$Q_n(x)=x^n+(\text{低次の項}) \tag{5.4}$$

と規格化することにした。$\sqrt{c_n}$ で割って $(Q_n, Q_n)=1$ と規格化することも可能。また、$Q_n(a)=1$ と規格化することもある。

まず、$Q_1(x)=1$ とすると、

$$(Q_1, Q_1)=c_1=\int_a^b \rho(x)dx \tag{5.5}$$

と定まる。つぎからは、帰納的に、

$$Q_n(x)=x_n-\sum_{i=0}^{n-1}k_{n,i}Q_i(x) \qquad \text{但し } k_{n,i}=(x^n, Q_i) \tag{5.6}$$

とすれば自動的に

$$(Q_n, Q_m)=0, \qquad n>m \tag{5.7}$$

となる。

例として、区間を $[-1,1]$、重み関数を単に 1 とする。規格化は $P_n(1)=1$ としよう。まず、

$$P_0(x)=1 \tag{5.8}$$

である。つぎに、

$$P_1(x)=cx+c' \tag{5.9}$$

とすると、$P_0(x)$ を掛けて積分するとゼロだから $c'=0$。規格化すると

$$P_1(x)=x. \tag{5.10}$$

つぎに

$$P_2(x)=cx^2+c'x+c'' \tag{5.11}$$

とする。$c'=0$ とすると $P_1(x)$ との内積はゼロになる。$P_0(x)$ との内積をゼロにするには

$$\int_{-1}^{1}(cx^2+c'')dx=0 \tag{5.12}$$

区間	名前	$\rho(x)$	$Q(x) = p(x)/\rho(x)$
$[-1,1]$	Jacobi	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$1-x^2$
$[-1,1]$	Legendre	1	$1-x^2$
$[-1,1]$	陪 Legendre	$(1-x^2)^m$	$1-x^2$
$[0,\infty)$	Laguerre	e^{-x}	x
$[0,\infty)$	陪 Laguerre	$x^\alpha e^{-x}$	x
$(-\infty,\infty)$	Hermite	e^{-x^2}	1
$\|x\|=1$	Bessel	$e^{-2/x}$	x^2

表 1: 古典直交多項式。Jacobi では $\alpha, \beta > -1$。陪 Legendre は $(1-x^2)^{m/2}$ で割ったもの。陪 Laguerre では $\alpha > -1$ 。 Bessel 多項式というのは、Bessel 関数とは関係あるがそれそのものではないので注意。

より $c/3 + c'' = 0$, $P_2(1) = 1$ より

$$P_2(x) = \frac{(3x^2-1)}{2}. \tag{5.13}$$

$P_3(x)$ は

$$P_3(x) = cx^3 + c'x \tag{5.14}$$

と奇関数に取っておくと $P_{0,2}$ とは自動的に直交。P_1 との内積は

$$\int_{-1}^{1} (cx^3 + c'')x dx = 0 \tag{5.15}$$

より $c/5 + c''/3 = 0$。よって

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2} \tag{5.16}$$

というふうに順々に決めていける。これらは実は Legendre 多項式そのものであって、微分方程式

$$\left(\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} + \alpha\right)P_n(x) = 0, \qquad \alpha = n(n+1) \tag{5.17}$$

を満たすことが (この段階では具体的に $n = 0, 1, 2, 3$ について) 確認できる。

5.2 古典直交多項式系

Sturm-Liouville 型の微分方程式の固有関数系をなす直交多項式系というのは実は分類されている。まず、一次元の区間というのは、両側が有限か、片側が無限か、両側が無限か、円周か、という分類をする。適切に座標変換をすると、それぞれ、区間 $[-1,1]$、$[0,\infty)$, $(-\infty,\infty)$ 、$|x| = 1$ と取れる。その上で、Sturm-Liouville 型微分方程式 (4.42) で、$q(x)$ はいつもゼロに取れて、さらに適切に変数変換をすれば、表 1 で尽きる。これで尽きるというのは、Bochner という人が示した (**Über Strum-Liouvillesche Polynomsysteme**, Math. Z. 29 (1929) 730-736 (オンライン版にリンク)) 数学的議論は簡単なので、ドイツ語選択のひとは読んでみると勉強になる。

これらの多項式は統一的に扱えるが、まずエルミート多項式について具体的にやってから、一般論を述べよう。

5.3 エルミート多項式の場合

5.3.1 多項式性

まず、天下りに

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} \tag{5.18}$$

と定義する。これは微分を展開する様子を頭の中で思い浮かべれば、n 次多項式であることがわかる。

$$H_n(x) = 2^n x^n + \text{低次の項} \tag{5.19}$$

となる。具体的には、

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = -2 + 4x^2, \quad H_3(x) = -12x + 8x^3, \quad \ldots \tag{5.20}$$

5.3.2 直交性

つぎに、直交性をしめす。区間は $(-\infty, \infty)$ で重み関数は e^{-x^2}。

$$(H_n, H_m) = 0 \qquad n \neq m \tag{5.21}$$

を示したいが、 $n > m$ に関しては

$$(H_n, x^m) = 0 \tag{5.22}$$

を示せば充分だ。(なぜなら、H_m は $m' < m$ についての $x^{m'}$ の線形結合だから。) さて、

$$(H_n, x^m) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} (x^m e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} dx \tag{5.23}$$

である。n 階部分積分をすると、$m < n$ だと消えてしまう。これで (5.22) が示された。$m = n$ のときは

$$= n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = n! \sqrt{\pi} \tag{5.24}$$

となる。(5.19) より

$$(H_n, H_n) = 2^n n! \sqrt{\pi} \tag{5.25}$$

がわかった。

5.3.3 微分方程式

上記 $H_n(x)$ がある二階微分方程式の固有関数系であることを示す。微分演算子は

$$(f, Lg) = \int_{-\infty}^{\infty} (-f'(x) g'(x)) e^{-x^2} dx \tag{5.26}$$

を考える。部分積分をすれば、

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} \tag{5.27}$$

である。

まず、LH_n は明らかに高々 n 次多項式である。$m < n$ に対し $H_m(x)$ と左辺 LH_n の内積は

$$(H_m, LH_n) = (LH_m, H_n) = 0 \tag{5.28}$$

である。(LH_m は 高々 m 次式であるのに注意せよ。) よって、何か λ_n があって

$$(\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx})H_n(x) = -\lambda_n H_n(x) \tag{5.29}$$

である。λ_n は両辺の x^n の係数を調べればわかる。$H_n(x) = c_n x^n + \cdots$ とすると、

$$\text{左辺} = -2nc_n, \qquad \text{右辺} = -\lambda_n c_n \tag{5.30}$$

より $\lambda_n = -2n$。

5.3.4 母関数

まず

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \frac{n!}{2\pi i}\oint dz \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} \tag{5.31}$$

であった。すると、

$$\sum_n H_n(x)\frac{y^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i}e^{x^2}\oint \frac{1}{z}(1 - \frac{y}{z-x} + \frac{y^2}{(z-x)^2} + \cdots)e^{-z^2}dz \tag{5.32}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}e^{x^2}\oint \frac{1}{z-x+y}e^{-z^2}dz \tag{5.33}$$

$$= e^{x^2}e^{-(x-y)^2} = e^{2xy-y^2}. \tag{5.34}$$

5.3.5 漸化式

母関数

$$\sum_n H_n(x)\frac{y^n}{n!} = e^{2xy-y^2} \tag{5.35}$$

の両辺を y 微分すると

$$\sum_n H_n(x)\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} = (2x-2y)e^{2xy-y^2} = \sum_n (2xH^n(x)\frac{y^n}{n!} - 2H_n(x)\frac{y^{n+1}}{n!}) \tag{5.36}$$

両辺の $y^n/n!$ の係数を比較して

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \tag{5.37}$$

また、母関数 (5.35) の両辺を x 微分すると

$$\sum_n H_n'(x)\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} = 2ye^{2xy-y^2} = \sum_n 2H_n(x)\frac{y^{n+1}}{n!} \tag{5.38}$$

であるので、$y^n/n!$ の係数を比較して

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x) \tag{5.39}$$

がわかった。