5.4 一般の場合

表 1 に載っている直交多項式について一般的に扱おう。(方針は一緒だが、個別の計算も各所で必要になる。もっとうまくできることがわかった学生さんは是非僕に教えてください。) 内積は

$$(f,g)=\int_a^b \overline{f(x)}g(x)\rho(x)dx \tag{5.40}$$

であり、対応する二階微分演算子は

$$(f,Lg)=-\int_a^b \overline{f'(x)}g'(x)p(x)dx \tag{5.41}$$

すなわち

$$L=\frac{1}{\rho(x)}\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}=Q(x)\frac{d^2}{dx^2}+R(x)\frac{d}{dx} \tag{5.42}$$

である、ただし

$$Q(x)=\frac{p(x)}{\rho(x)},\qquad R(x)=\frac{p'(x)}{\rho(x)} \tag{5.43}$$

である。$Q(x)$ はたかだか二次、$R(x)$ は一次の多項式であることに注意。

5.4.1 多項式の定義

Rodrigues (ロドリゲス) の公式

$$f_n(x)=\frac{1}{\rho(x)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(\rho(x)Q(x)^n) \tag{5.44}$$

によって $f_n(x)$ を定義する。この $f_n(x)$ は n 次多項式になる。これは、表 1 のそれぞれについて別箇に確認しないといけないと思う。

例えば、ヤコビの多項式の場合は

$$f_n(x)=\frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right] \tag{5.45}$$

$$=\sum_k\frac{1}{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}\binom{n}{k}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k}(1-x)^{\alpha+n}\left(\frac{d}{dx}\right)^k(1+x)^{\beta+n} \tag{5.46}$$

等から確認できる。

5.4.2 直交性

$(f_n,f_m)=0$ を $n>m$ について示すには、$(x^m,f_n)=0$ を示せばよい。まず

$$\int_a^b x^m f_n(x)\rho(x)dx=\int_a^b x^m\left(\frac{d}{dx}\right)^n[\rho(x)Q(x)^n] \tag{5.47}$$

$$=\left[x^m\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(\rho(x)Q(x)^n)\right]_a^b-n\int_a^b x^{m-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}[\rho(x)Q(x)^n] \tag{5.48}$$

ここで $\rho(x)$ は端で落ちるように選んでいるので、境界項はゼロ、よって繰り返して

$$= (-1)^m m! \int_a^b \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-m} [\rho(x)Q(x)^n] \tag{5.49}$$

となる。よって、$n > m$ ならゼロ。 $n = m$ のときはノンゼロなので、

$$f_n(x) = k_n x^n + (\text{低次の項}) \tag{5.50}$$

として

$$(f_n, f_n) = (-1)^n n! k_n \int_a^b Q(x)^n \rho(x) dx \tag{5.51}$$

となる。この右辺はやっぱり個別に計算しないといけないと思う。

5.4.3 微分方程式を満たすこと

式 (5.42) の L に対し

$$Lf_n(x) = -\lambda_n f_n(x) \tag{5.52}$$

であることを示す。まず、式 (5.42) において $Q(x)$ は二次、$R(x)$ は一次だから、Lf_n はたかだか n 次多項式。よって

$$Lf_n = \sum_{m=0}^{n} c_m f_m(x) \tag{5.53}$$

と展開できる。 c_m をよみとるには、

$$(f_m, Lf_n) = c_m (f_m, f_m) \tag{5.54}$$

とすればよいが、右辺は (Lf_m, f_n) だから $m < n$ ならゼロ。よって $m < n$ なら $c_m = 0$、よって

$$Lf_n = -c_n f_n(x) \tag{5.55}$$

固有値 c_n を決定するには x^n の係数を比較すればよく、

$$c_n = -qn(n-1) - r, \tag{5.56}$$

ただし q は $Q(x)$ の x^2 の係数、r は $R(x)$ の x^1 の係数。

5.4.4 母関数

(母関数の英語は generating function という。一方、行列は matrix (母体) の訳語。) 微分を留数積分であらわすと、

$$\sum_n f_n(x) \frac{y^n}{n!} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{1}{2\pi i} \oint \sum_n \frac{y^n Q(z)^n}{(z-x)^{n+1}} \rho(z) dz \tag{5.57}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\rho(z)}{z - x - yQ(z)} dz =: g(x, y) \tag{5.58}$$

ここで

$$\frac{1}{a-b} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} + \cdots \tag{5.59}$$

を使った。この周回積分は個別にやらざるを得ない。

5.4.5　漸化式

母関数

$$g(x,y)=\sum_n f_n(x)\frac{y^n}{n!} \tag{5.60}$$

の両辺を x で微分して比較すると、$f_n'(x)$ を $f_{n'}$ で表す式が得られる。また、両辺を y で微分して比較すると、$f_n(x)$ を $f_{n\pm 1}$ で表す式が得られる。このあたりはやはり個別にやらないといけない。

5.5　ルジャンドル (陪) 関数

5.5.1　ルジャンドル関数

この場合は区間は $[-1,1]$、$\rho(x)=1$, $Q(x)=1-x^2$ から $R(x)=-2x$ 。一般論から f_n とさだめると

$$f_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}x^n+\cdots. \tag{5.61}$$

これは

$$\left[(1-x)^2\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}+n(n+1)\right]P_n(x)=0 \tag{5.62}$$

を満たす。

$$(f_n,f_n)=\frac{(2n)!}{n!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx=\frac{(2n)!}{n!}\frac{n!n!}{(2n+1)!}2^{2n+1}=\frac{(2^n n!)^2}{2n+1} \tag{5.63}$$

となる。ここでベータ積分の公式をつかった。

普通は

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n \tag{5.64}$$

を使う、こうしておくと $P_n(1)=1$ となるので。すると

$$(P_n,P_n)=\frac{1}{2n+1} \tag{5.65}$$

である。

母関数は

$$\sum_n P_n(x)y^n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dz}{z-x+\frac{y}{2}(1-z^2)}dz=-\frac{2}{y}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dz}{(z-z_+)(z-z_-)} \tag{5.66}$$

ただし

$$z_\pm=\frac{1\pm\sqrt{1-2xy+y^2}}{y} \tag{5.67}$$

である。$|y|\ll 1$ なら、$|z_+|\gg 1$ で $z_-\sim x$ なので、留数は z_- のところを拾う。というわけで

$$=-\frac{2}{y}\frac{1}{z_--z_+}=\frac{1}{\sqrt{1-2xy+y^2}} \tag{5.68}$$

となる。

両辺を y で微分して

$$\sum nP_n(x)y^{n-1}=\frac{x-y}{1-2xy+y^2}g \tag{5.69}$$

よって

$$(1-2xy+y^2)\sum nP_n(x)y^{n-1}=(x-y)\sum P_n(x)y^n \tag{5.70}$$

これの y^n の項を比較すると

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x) \tag{5.71}$$

がわかる。

同様に x で微分してがんばって変形してやると、

$$(1-x)^2 P_n'(x) - (n+1)xP_n(x) = -(n+1)P_{n+1}(x) \tag{5.72}$$

を導くことも出来るが面倒なのでタイプしない。

5.5.2 ルジャンドル陪関数

ルジャンドル陪微分方程式は

$$\left[(1-x)^2\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + \lambda' - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x) = 0 \tag{5.73}$$

というもの。これを解くにはいろいろ方法がある。まず、$P_l^m(x) = \sqrt{1-x^2}^m A_l^m(x)$ と書いて A_l^m の方程式を書くと、$\lambda' = \lambda + m(m+1)$ として

$$\left[(1-x)^2\frac{d^2}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{d}{dx} + \lambda\right]A_l^m(x) = 0 \tag{5.74}$$

となるが、これは一般論で $\rho(x) = (1-x^2)^m$, $Q(x) = (1-x^2)$ としたもの。これより、対応する $f_n(x)$ は固有値

$$\lambda_n = n(n-1) + 2(m+1)n \tag{5.75}$$

を持つ。$\lambda_n' = (m+n)(m+n+1)$ となる。$m+n$ を l と書くのが通常なので、

$$A_l^m(x) = f_{l-m}(x) = \frac{1}{(1-x^2)^m}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-m}(1-x^2)^l \tag{5.76}$$

とすればよい。

もうひとつの方法は、ルジャンドル微分方程式 (5.62) の両辺を微分してしまう方法で、

$$\left[(1-x)^2\frac{d^2}{dx^2} - 2(m+1)x\frac{d}{dx} + l(l+1) - m(m+1)\right]\frac{d^m}{dx^m}P_l(x) = 0 \tag{5.77}$$

がえられるので、定数倍をのぞいて

$$A_l^m(x) \propto \frac{d^m}{dx^m}P_l(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m}(1-x^2)^l \tag{5.78}$$

となっている。

通常の定義はこの後者をもちいて、

$$P_l^m(x) = \sqrt{1-x^2}^m\frac{(-1)^n}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m}(1-x^2)^l \tag{5.79}$$

とするもの。この式では $-l \geq m < 0$ まで拡張することができるが、そうやっても実は

$$P_l^m(x) \propto P_l^{-m}(x) \tag{5.80}$$

となることが知られている。

5.6 ラゲール (陪) 多項式

あとは同じことの繰り返しなのでどんどん略する。$Q(x) = x$, $\rho(x) = e^{-x}$ なので $R(x) = 1 - x$、よって

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^n e^{-x}] \tag{5.81}$$

で、

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} + n\right] L_n(x) = 0 \tag{5.82}$$

を満たすことがわかる。母関数は

$$\sum_n L_n(x)\frac{y^n}{n!} = \frac{e^x}{2\pi i}\oint dz \frac{e^{-z}}{z - x - zy} = \frac{1}{1-y}e^{-\frac{xy}{1-y}} \tag{5.83}$$

ラゲール陪微分方程式は $\rho(x)$ を $x^m e^{-x}$ にかえたもので、

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + (1+m-x)\frac{d}{dx} + n\right] f_n(x) = 0 \tag{5.84}$$

ただし

$$f_n(x) = x^{-m}e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^{m+n}e^{-x}] \tag{5.85}$$

である。これは、(5.82) の両辺を m 回微分してもよく、

$$\left[x\frac{d^2}{dx^2} + (1+m-x)\frac{d}{dx} + (n-m)\right] \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) = 0 \tag{5.86}$$

となる、すなわち

$$f_{n-m}(x) \propto L^m_{n+m}(x) := \frac{d^m}{dx^m} L_{n+m}(x). \tag{5.87}$$

これから

$$x^{-m}e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^{m+n}e^{-x}] \propto \frac{d^m}{dx^m} e^x \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}[x^n e^{-x}] \tag{5.88}$$

のはずである。

まとめると、

名前	$Q(x)$	$\rho(x)$	
ルジャンドル	$1-x^2$	1	$P_l(x)$
ルジャンドル陪	$1-x^2$	$(1-x^2)^m$	$\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$
ラゲール	x	e^{-x}	$L_n(x)$
ラゲール陪	x	$x^m e^{-x}$	$\frac{d^m}{dx^m}L_n(x)$
エルミート	1	e^{-x^2}	$H_n(x)$
エルミート陪?	1	e^{-x^2}	$\frac{d^m}{dx^m}H_n(x)$

ということである、エルミート陪関数が無いのは (5.39) でやったように $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ だから。

これと表 (1) を見比べると、同様に Bessel 陪多項式というのがあって良い気がするが、ちゃんと考えていない。もしかすると Bochner の定理の僕の理解が間違っていて、重み $x^{2m}e^{-2/x}$ のものがあるのかもしれない。

6　複素平面上の微分方程式について

まずこれまでと別の一般論を学んで、Bessel 関数をそれによって解析したあと、Legendre 多項式についてこの方法でも見てみる。

6.1　用語の定義

複素平面上で

$$f''(z) + A(z)f'(z) + B(z)f(z) = 0 \tag{6.1}$$

という微分方程式を考えよう。但し $A(z)$, $B(z)$ は有理関数で、 $f(z)$ は (分岐をもつ) 解析関数として探すものとする。$z = a$ で $A(z)$ や $B(z)$ に極があることがある。$z = a$ で $A(z)$ の極が一位まで、$B(z)$ の極が二位までなら、$z = a$ を確定特異点 (regular singularity) という。$A(z)$ の極が a 位、$B(z)$ の極が b 位なら、$z = a$ は $\max(a, b/2)$ 位の不確定特異点 (irregular singularity) という。r 位の不確定特異点は確定特異点を r 個ぶつけたもの。

$z = a$ のあたりで複素数 α を用いて $f(z) \sim (z-a)^\alpha$ だと、一度微分するとだいたい $1/(z-a)$ かかるから、$A(z)$ はだいたい $1/(z-a)$ ぐらい、$B(z)$ は $1/(z-a)^2$ ぐらいであろう、というのが確定特異点の感覚で、もっと悪いのが不確定特異点。

通常 $z = \infty$ も付け加えて、球面上で問題を考える。$z = \infty$ で微分方程式を解析するには、$w = 1/z$ とおき、$g(w) = f(1/z)$ とすると、上記微分方程式は

$$g''(w) - (w^{-2}A(\frac{1}{w}) - \frac{2}{w}))g'(w) + w^{-4}B(\frac{1}{w})g(w) = 0 \tag{6.2}$$

となるので、これが $w = 0$ で (不) 確定特異点であるかどうかを以て $z = \infty$ で (不) 確定特異点であるかを定める。

6.2　例

例えば、ルジャンドルの微分方程式は

$$(1-z^2)f''(z) - 2zf'(z) + cf(z) = 0 \tag{6.3}$$

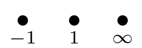
より

$$f''(z) - \frac{2z}{1-z^2}f'(z) + \frac{c}{1-z^2}f(z) = 0 \tag{6.4}$$

そこで $z = \pm 1$ に確定特異点がある。$z = \infty$ では、

$$g''(w) - (-w^{-2}\frac{2/w}{1-1/w^2} - \frac{2}{w})g'(w) + \frac{1/w^4}{1-1/w^2}cg(w) = 0 \tag{6.5}$$

より $z = \infty$ も確定特異点。同様に調べれば、ヤコビの微分方程式もみっつ確定特異点。



一方、ラゲールの微分方程式は

$$zf''(z) + (1-z)f'(z) + cf(z) = 0 \tag{6.6}$$

すなわち

$$f''(z) + \frac{1-z}{z} f'(z) + \frac{c}{z} = 0 \tag{6.7}$$

より $z = 0$ が確定特異点、また $z = \infty$ では

$$g''(w) + (\frac{2}{w} - \frac{1}{w^2} \frac{1-1/w}{1/w}) g'(w) + \frac{c}{w^4} g(w) = 0 \tag{6.8}$$

より位数二の不確定特異点である。

$$\underset{0}{\bullet} \qquad \underset{\infty}{\bullet\bullet}$$

ベッセルの微分方程式はこちらになる。

どちらにせよ、ここまでは特異点は (合流したものを考えると) みっつである。みっつ確定特異点があるものを超幾何 (hypergeometric) 微分方程式、超幾何関数と呼ぶ。ふたつの確定特異点をひとつの不確定特異点に合流させたものを合流型 (confluent) 超幾何関数という。みっつとも合流させて、位数三の不確定特異点をひとつだけもつ微分方程式も考えられる:

$$f''(z) + z f'(z) = 0. \tag{6.9}$$

これは エアリ (Airy) の微分方程式、解はエアリ関数と言う。

$$\underset{\infty}{\bullet\bullet\bullet}$$

ここまでの微分方程式は徹底的に調べられているから、知りたければ文献を探せば知りたいことはかならず載っている。

四つ確定特異点のあるばあいはホイン (Heun) の微分方程式、

$$\underset{0}{\bullet} \qquad \underset{1}{\bullet} \qquad \underset{q}{\bullet} \qquad \underset{\infty}{\bullet}$$

合流させて、二つ確定、一つ位数二の不確定特異点があるばあいはマチウ (Mathieu) の微分方程式、という。

$$\underset{0}{\bullet} \qquad \underset{1}{\bullet} \qquad \underset{\infty}{\bullet\bullet}$$

ここまでくると文献も減ってくる。

6.3 確定特異点まわりの解析

さて、具体的に解をもとめることを考えよう。二階の微分方程式を考えているから、ふたつ線形独立な解があるはずである。$z = a$ が特異点でなければ、$f(z)$ と $f'(z)$ をあたえると、唯一に解が定まる。

$z = a$ が確定特異点であるとする。簡単のため $x = z - a$ と定めると、微分方程式は $x = 0$ の非常に近くでは

$$f''(x) + \frac{p}{x} f'(x) + \frac{q}{x^2} f(x) = 0 \tag{6.10}$$

と近似できる。

$$f(x) \sim x^\alpha \tag{6.11}$$

という形で解の $x = 0$ の近傍があらわされるとすると、上式に代入して整理すれば

$$\alpha(\alpha - 1) + p\alpha + q = 0 \tag{6.12}$$

を得る。二つの根を $\alpha_\pm$ と書く。これは一般には複素数である。この方程式を $z=a$ での決定方程式 (indicial equation) という。

方程式は近似をしないと

$$f''(x)+A(x)f'(x)+B(x)f(x)=0 \tag{6.13}$$

だった。これに

$$f_\pm(x)=x^{\alpha_\pm}(1+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots) \tag{6.14}$$

を代入して、x の同じベキの項を整理すると、多くの場合 $c_1, c_2, \ldots$ を順に決定していける。

- 正整数 n に対して $\alpha_+=\alpha_-+n$ の場合は $f_-(x)$ の決定の際に c_n のところでゼロで割らないといけなくなって破綻する。
- そもそも $\alpha_+=\alpha_-$ の場合は、ひとつしか解がもとまらない。

これらの場合は、もうひとつの解は複素数ベキでは済まず、

$$\underline{f_-}(x)=f_+(x)\log x+x^{\alpha}_{-}(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots) \tag{6.15}$$

の形のものが取れることが知られているが、時間がないので講義ではやらない。

以下、主にベキ展開でもとまったものに対して性質を考える。$x=0$ まわりでは、α が整数のときは一価関数だけれど、α の値によっては分岐線が $x=0$ から出ることがわかる。また、ベキ級数の収束半径はいくつなのかが気になる。これは、具体的に場合に応じて調べることもできるが、複素関数は理由がなければ発散しないという原理から、一番近い別の特異点に当たるまでは収束することが保証されている。

6.4 Bessel 関数の場合

Bessel の微分方程式は

$$\left[\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}z\frac{\partial}{\partial z}-\frac{m^2}{z^2}+1\right]f(z)=0 \tag{6.16}$$

だった。展開すると

$$f''(z)+\frac{1}{z}f'(z)-(\frac{m^2}{z^2}-1)f(z)=0 \tag{6.17}$$

である。これまでは m は整数だったが、一般の場合も考えよう。

すでに調べたが、$z=0$ が確定特異点、$z=\infty$ が位数 2 の不確定特異点である。というわけで、$z=0$ まわりで調べるのが簡便。決定方程式は

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha-m^2=0 \tag{6.18}$$

より、$\alpha_\pm=\pm m$ である。$|m|$ が整数のときは $\alpha_+-\alpha_-$ が正の整数になって、片方 log のまざった解になる。

簡単のため、log の交ざらない解のみ考察しよう。これは

$$f(z)=z^m(a_0+a_1z+\cdots) \tag{6.19}$$

として、代入して z^{m-2+n} の係数をみると

$$a_n[(m+n)(m+n-1)+(m+n)-m^2]+a_{n-2}=0 \tag{6.20}$$

から

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2m)} \tag{6.21}$$

となる。これより $a_{奇数}$ は全てゼロにとれて、

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{a_0}{4^n n!(m+1)\cdots(m+n)} \tag{6.22}$$

となる。この式は、m が負の整数のときは $a_{2|m|}$, すなわち $x^{-|m|}(\cdots + a_{2m}x^{2|m|} + \cdots)$ の係数を決定するところで破綻する。これが上で言った微妙な場合に相当する。

というわけで、m が負の整数でなければ解がもとまった。$a_0 = (2^m m!)^{-1}$ ととるのが慣習で、結果を

$$J_m(z) = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}(\frac{z}{2})^{m+2n} \tag{6.23}$$

と書く。一般論より、これは全平面で収束。m が整数でない場合は、$(m+n)!$ は Γ 関数をつかって $\Gamma(m+n+1)$ と解釈する必要がある。m が負の整数のばあいは、$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z)$ と定めるのが標準的である。これは Γ 関数が負の整数では ∞ になっていると思って上式を無理矢理評価したものに自然になっている。

整数 m の場合のベッセル関数の母関数をもとめよう。

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z)t^m = \sum_m \sum_n \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}(\frac{z}{2})^{m+2n}t^m \tag{6.24}$$

であるが、ベキの部分を

$$(\frac{z}{2})^{m+2n}t^m = (\frac{zt}{2})^{m+n}(\frac{z}{2t})^n \tag{6.25}$$

と分解すると、

$$\sum_m J_m(z)t^m = \left[\sum_{m+n} \frac{1}{(m+n)!}(\frac{zt}{2})^{m+n}\right]\left[\sum_n \frac{1}{n!}(\frac{-z}{2t})^n\right] = \exp(\frac{r}{2}(t-\frac{1}{t})) \tag{6.26}$$

とわかった。

これは、$t = e^{i\theta}$ と書くと、ちょっと整理すると

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(r)e^{im\theta} = e^{ir\sin\theta} = e^{iy} \tag{6.27}$$

ということ、ただし $x + iy = re^{i\theta}$ とした。先週だかに、そもそもベッセルの微分方程式はラプラシアンの固有関数を極座標で表した際に出てくるもので、勝手な関数をまず

$$f(r,\theta) = \sum_m F_m(r)e^{im\theta} \tag{6.28}$$

と展開して $F_m(r)$ のほうに定まる方程式だ、と言ったが、そもそも e^{iy} というあからさまにラプラシアンの固有関数であるものを、θ 方向にフーリエ展開したものが $J_m(r)$ だということ。

m が整数でない場合は ν と書くことが多い。このとき、$J_\nu(z)$ と $J_{-\nu}(z)$ は一次独立だが、m が整数のときは一次従属である。この際、もうひとつの解は、まず一般に

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\sin\nu\pi}[(\cos\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)] \tag{6.29}$$

と定めておいて、ν を整数にもっていく極限を取ることで得られる。泥ピタるの定理を使って

$$N_m(z) = \frac{1}{\pi}[\partial_\nu J_\nu(x) - (-1)^m \partial_\nu J_{-\nu}(x)]_{\nu=m}. \tag{6.30}$$

これを Neumann 関数という。$\nu = m$ が整数のときの $z \sim 0$ での振舞は、$\sim z^{-m}$ の項と、$\sim \partial_\nu z^\nu$ の項から $z^m \log z$ の項が出る。

6.5 Legendre 多項式のばあい

方程式は

$$f''(z) - \frac{2z}{1-z^2}f'(z) + \frac{c}{1-z^2}f(z) = 0 \tag{6.31}$$

である。これまでの議論で、$c = l(l+1)$ のときのみ多項式解 $P_l(z)$ があって、$[-1,1]$ で直交多項式系をなすことを知っている。この c に関する条件を今学んだ方法でも導いてみたい。

$z = \pm 1$ が確定特異点である。$z \to -z$ で方程式は対称なので、$z = 1$ でまずしらべれば、$z = -1$ でも同様。$z = 1$ での決定方程式は

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha = 0 \tag{6.32}$$

より $\alpha = 0$ で重根。これより、これまでの一般論から、

$$f(z) \sim 1 + ?(z-1) + ?(z-1)^2 + \cdots \tag{6.33}$$

の形の解と、

$$f(z) \sim \log(z-1) + ? + ?(z-1) + ?(z-1)^2 + \cdots \tag{6.34}$$

という解があることが判る。$z = \pm 1$ での多項式型の解を $A_\pm(z)$, log 型の解を $B_\pm(z)$ とする。どちらも一次独立だから、

$$A_+(z) = \kappa(c)A_-(z) + \lambda(c)B_-(z) \tag{6.35}$$

となるはず。ただし、$\kappa(c)$, $\lambda(c)$ は c による線形結合の係数。たまたま $\lambda(c)$ がゼロになるような c において、$z = 1$, $z = -1$ においてどちらにも log のない解になる。

この場合、$A_+(z) \propto A_-(z)$ は無限遠点を除いて特異点の無い関数になる。無限遠点でも確定特異点だから、自動的に多項式になってしまう。このとき c はいくつか？

無限遠点 $w = 1/z = 0$ での決定方程式は

$$\alpha(\alpha - 1) - c = 0 \tag{6.36}$$

なので、$c = n(n+1)$ と (この時点では n は勝手な複素数だが) パラメタ付けすると $\alpha = -n, 1+n$ であるので無限遠で $f(w) \sim w^{-n}$ すなわち $f(z) \sim z^n$ と振る舞う。これが多項式の最高ベキであるには、n は非負整数。というわけで、非負整数 n に対し $c = n(n+1)$ のときのみルジャンドルの微分方程式は多項式解をもつ。

もっと具体的には、微分方程式に直接

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \tag{6.37}$$

を代入して、整理すると、

$$(i+2)(i+1)a_{i+2} = ((i+1)i - c)a_i \tag{6.38}$$

となる。これより、a_0 から決めていくもしくは a_1 から決めていくことができるが、これが多項式になって有限項でおわるには、ある i に対して $c = (i+1)i$ でないといけない。このおしまいの方法は非常に簡単で、これだけをやるには一般論はいらないのだが、考え方を知るという意味で一般論をやった。