物理学演習 III (量子力学)　　［その場問題 No. 1］　　2016. 4. 5

周りの人と相談して以下の問題を解いても構いません

1. 【演算子の交換関係】

演算子 $A,\,B$ に対して、交換子 $[A,\,B]$ を

$$[A,\,B] = AB - BA\ ,$$

と定義する。この時、演算子 $A,\,B,\,C$ に対して、

$$[AB,\,C] = [A,\,C]\,B + A\,[B,\,C]\ , \qquad [A,\,BC] = B\,[A,\,C] + [A,\,B]\,C\ ,$$

が成り立つことを示しなさい。

2. 【クロネッカーのデルタと完全反対称テンソル】

完全反対称テンソル ε_{ijk} は，$\varepsilon_{123} = 1$ として，その足である $1, 2, 3$ を奇数回置換したものを $+1$，偶数回置換したものを -1 の値を持つもので，それ以外の値を足 i, j, k に持つ場合には 0 と定義されている。

(1) $\boldsymbol{A} = (A_i)$, $\boldsymbol{B} = (B_i)$ を二つの三次元ベクトル $(i = 1, 2, 3)$ とするとき，$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の第 i 成分を完全反対称テンソル ε_{ijk} を用いて表せ。

(2) 完全反対称テンソル ε_{ijk} が，

$$\varepsilon_{mij}\varepsilon_{mkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\ ,$$
$$\varepsilon_{mni}\varepsilon_{mnj} = 2\delta_{ij}\ ,$$

を満たすことを示せ。ただし，ここではアインシュタインの和の規約を用いている。

（補足）より一般には，以下の式が示せる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} &= \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} \\ &= \sum_{\sigma\in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)\delta_{i\sigma(l)}\delta_{j\sigma(m)}\delta_{k\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)\delta_{\sigma(i)l}\delta_{\sigma(j)m}\delta_{\sigma(k)n}\end{aligned}$$

3. 【ブラ・ケットと波動関数】

一次元の量子力学系での位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ は正準交換関係

$$[\hat{x},\,\hat{p}] = i\hbar\ ,$$

を満たしている。このとき，位置演算子 $\hat{x}$ と運動量演算子 $\hat{p}$ の固有状態は，それぞれ，

$$\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle\ , \qquad \hat{p}\,|p\rangle = p\,|p\rangle\ ,$$

で，

$$\langle\, x\,|\,x'\,\rangle = \delta(x - x')\ , \qquad \langle\, p\,|\,p'\,\rangle = (2\pi\hbar)\delta(p - p')\ ,$$

と規格化されているとする。

(1) 運動量演算子 $\hat{p}$ の位置演算子 $\hat{x}$ の固有状態 $|x\rangle$ での行列表示が

$$\langle\, x \,|\, \hat{p} \,|\, x' \,\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x') \ ,$$

と表せることを示しなさい。

(2) 次の二つの演算子

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \ \ |\, x \,\rangle \,\langle\, x \,| \ , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \ \ |\, p \,\rangle \,\langle\, p \,| \ ,$$

はどのような意味をもつかを理由とともに述べなさい。

(3) 運動量演算子 $\hat{p}$ の固有状態 $|p\rangle$ に対応した波動関数 $\phi_p(x) = \langle x|p\rangle$ が,

$$\phi_p(x) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} p x\right) \ ,$$

と与えられることを示しなさい。