

周りの人と相談して以下の問題を解いても構いません

【角運動量代数】

角運動量ベクトル  $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3) = (L_x, L_y, L_z)$  は

$$L_i = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$$

で定義され, 角運動量の大きさの二乗および昇降演算子は

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 &= L_i L_i = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \\ L_{\pm} &= L_x \pm iL_y \end{aligned}$$

で定義される。 $r$  と  $p$  の正準交換関係

$$[r_i, p_j] = i\delta_{ij} \quad (\hbar = 1)$$

および [その場問題 No. 1] で示した公式

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

を用いて以下を示せ。

- (1)  $[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k,$
- (2)  $[\mathbf{L}^2, L_i] = 0,$
- (3)  $[L_+, L_-] = 2L_z,$
- (4)  $[L_z, L_{\pm}] = \pm L_{\pm},$
- (5)  $\mathbf{L}^2 = \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) + L_z^2 = L_z(L_z \pm 1) + L_{\mp}L_{\pm}.$