**物理学演習 III(量子力学)**　　　　［その場演習 No. 6］　　　2016. 5. 24

**周りの人と相談して以下の問題を解いても構いません**

**【水素原子 (前半)】**

水素原子の動径波動関数 $R(r)$ が満たす Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)+\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}-\frac{e^2}{r}\right]R(r)=E\,R(r)\quad(E<0)$$

において

$$\alpha=\sqrt{\frac{8m|E|}{\hbar^2}},\quad \lambda=\frac{2me^2}{\alpha\hbar^2}=\frac{e^2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$

とおくと，$\rho=\alpha r$ を用いて

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d}{d\rho}R\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)\right)+\left\{\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right\}R\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)=0 \tag{1}$$

を得る。

(1) $\rho\to\infty$ での漸近形が，$R(\rho/\alpha)\sim\exp(-\rho/2)$ の形で書けることを確認せよ。

(2) そこで

$$R\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)=e^{-\frac{\rho}{2}}f(\rho)$$

として，これを式 (1) に代入することで $f(\rho)$ についての方程式

$$\frac{d^2f(\rho)}{d\rho^2}+\left(\frac{2}{\rho}-1\right)\frac{df(\rho)}{d\rho}+\left\{\frac{\lambda-1}{\rho}-\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right\}f(\rho)=0 \tag{2}$$

を得よ。