# 物理学演習 III（量子力学）　No. 2　2016. 4. 19

[1] **【角運動量固有状態】**

以下では角運動量演算子 $L_i$ の交換関係および $L_i$ と $\boldsymbol{L}^2$ の交換関係だけを用いて各問に答えよ。

(1) $\boldsymbol{L}^2$ と $L_z$ の同時固有状態を $|a,b\rangle$ と表し、これらは

$$\boldsymbol{L}^2|a,b\rangle = a\,\hbar^2|a,b\rangle, \qquad L_z|a,b\rangle = b\,\hbar|a,b\rangle, \qquad \langle a,b\,|a,b\rangle = 1 \tag{1}$$

を満たすとする ($a$, $b$ は実数)。この時、$L_\pm|a,b\rangle$ はどのような同時固有状態として表されるか、規格化定数まで含めて関係式を具体的に求めよ。ただし $L_\pm = L_x \pm iL_y$ とする。

(2) 固有状態として

$$L_+|a,b_{\max}\rangle = 0, \quad L_-|a,b_{\min}\rangle = 0$$

を満たす最大（最小）固有値 $b_{\max}$ ($b_{\min}$) が存在したとする。この時、$b_{\min} = -b_{\max}$ であることを示し、$a$ と $b_{\max}$ の関係を求めよ。

以上より $\boldsymbol{L}^2$ と $L_z$ の同時固有状態 $|l,m\rangle$ を次のようにとることができる。

$$\boldsymbol{L}^2|l,m\rangle = l(l+1)\hbar^2|l,m\rangle \quad (l \geq 0), \qquad L_z|l,m\rangle = m\hbar|l,m\rangle \quad (-l \leq m \leq l).$$

また次式が成り立つ。

$$L_\pm|l,m\rangle = \sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\,\hbar|l,m\pm 1\rangle.$$

[2] **【角運動量演算子の表現】**

(1) 角運動量の大きさが $l = 1/2$ のときは $|1/2,\,1/2\rangle \equiv |\uparrow\rangle$ と $|1/2,\,-1/2\rangle \equiv |\downarrow\rangle$ の 2 種類の状態がある。角運動量演算子 $\boldsymbol{L}$ のこれらの状態による行列表示

$$\begin{pmatrix} \langle\uparrow|\boldsymbol{L}|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\boldsymbol{L}|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\boldsymbol{L}|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\boldsymbol{L}|\downarrow\rangle \end{pmatrix}$$

を $L_x$、$L_y$、$L_z$ のそれぞれについて具体的に書き下せ。

(2) 角運動量の大きさが $l = 1$ の時は 3 つの状態 $(|+\rangle, |\,0\,\rangle, |-\rangle)$

$$L_z|+\rangle = +\hbar|+\rangle, \qquad L_z|\,0\,\rangle = 0, \qquad L_z|-\rangle = -\hbar|-\rangle$$

からなる。この時、角運動量演算子 $\boldsymbol{L}$ のこれらの状態による行列表示

$$\begin{pmatrix} \langle+|\boldsymbol{L}|+\rangle & \langle+|\boldsymbol{L}|\,0\rangle & \langle+|\boldsymbol{L}|-\rangle \\ \langle 0\,|\boldsymbol{L}|+\rangle & \langle 0\,|\boldsymbol{L}|\,0\rangle & \langle 0\,|\boldsymbol{L}|-\rangle \\ \langle-|\boldsymbol{L}|+\rangle & \langle-|\boldsymbol{L}|\,0\rangle & \langle-|\boldsymbol{L}|-\rangle \end{pmatrix}$$

を $L_x$、$L_y$、$L_z$ のそれぞれについて具体的に書き下せ。

[3] **【球面調和関数とブラ・ケット表示】**

角運動量演算子 $\boldsymbol{L}$ の固有状態 $|l,m\rangle$

$$\boldsymbol{L}^2\,|l,m\rangle = l(l+1)\,\hbar^2\,|l,m\rangle, \qquad L_z\,|l,m\rangle = m\,\hbar\,|l,m\rangle$$

に対する球座標表示 $(\theta,\phi)$ である固有関数 $f_{l,m}(\theta,\phi) = \langle\theta,\phi|l,m\rangle$ を考える。
ただし、これらの状態は、

$$\langle l,m|l',m'\rangle = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'}, \qquad \langle\theta,\phi|\theta',\phi'\rangle = \frac{1}{\sin\theta}\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')$$

と規格化されている。特にこのとき、

$$\int\ |\theta,\phi\rangle\,d\theta d\phi\sin\theta\,\langle\theta,\phi| = \mathbb{1}$$

が成り立つことが分かる。

(1) 角運動量演算子 $\boldsymbol{L}$ の昇降演算子 $L_\pm = L_x \pm iL_y$ の球座標表示 $(\theta,\phi)$ である

$$\langle\theta,\phi|L_\pm|\theta',\phi'\rangle = \hbar e^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\langle\theta,\phi|\theta',\phi'\rangle$$

$$\langle\theta,\phi|\boldsymbol{L}^2|\theta',\phi'\rangle = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2\right]\langle\theta,\phi|\theta',\phi'\rangle$$

が成り立つことと

$$L_-|l,-l\rangle = 0, \qquad \boldsymbol{L}^2|l,-l\rangle = l(l+1)\,\hbar^2|l,-l\rangle$$

を使って、$m=-l$ での固有関数 $f_{l,-l}(\theta,\phi) = \langle\theta,\phi|l,-l\rangle$ は位相の不定性を除いて、

$$f_{l,-l}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(2l+1)!!}{2^l\cdot l!}}e^{-il\phi}\,(\sin\theta)^l$$

であることを示しなさい。

(2) 一般の固有状態 $|l,m\rangle$ に対して、

$$|l,m\rangle = \left(\frac{1}{\hbar}\right)^{l+m}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(2l)!\cdot(l+m)!}}\,(L_+)^{l+m}\,|l,-l\rangle$$

が成り立つことを示しなさい。このことと

$$\frac{1}{(\sin\theta)^\Lambda}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(\sin\theta)^\Lambda = \frac{\partial}{\partial\theta} + \Lambda\cot\theta$$

を用いて、一般の固有関数 $f_{l,m}(\theta,\phi) = \langle\theta,\phi|l,m\rangle$ は、

$$f_{l,m}(\theta,\phi) \quad = \quad c_l\sqrt{\frac{(l-m)!}{(2l)!\cdot(l+m)!}}e^{im\phi}\,(\sin\theta)^m\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^{l+m}(\sin\theta)^{2l}$$

と表せることを示しなさい。ただし、

$$c_l = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(2l+1)!!}{2^l\cdot l!}}$$

とする。

ここで求めた、固有関数 $f_{l,m}(\theta,\phi) = \langle\theta,\phi|l,m\rangle$ は球面調和関数と呼ばれるもので、

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) = f_{l,m}(\theta,\phi) = \langle\theta,\phi|l,m\rangle$$

としばしば書かれる。今求めた関数は位相の不定性が導入された係数である $c_l$ にのみ存在し、それ以外にはないことに注意する。また、この $c_l$ の位相のとり方は、多くの文献で使われている球面調和関数 $Y_{l,m}(\theta,\phi)$ と一致するように決めたものである。