# 物理学演習 III (量子力学)　　No.3　　2016. 4. 26

**1**. 【角運動量の合成１】

2 つの角運動量演算子 $L_i$ と $S_i$ を合成した角運動量演算子 $J_i = L_i + S_i$ を考える。角運動量の大きさ $l$ $(l \geq 1)$ の固有状態 $|l, m\rangle$ $(m = -l, -l+1, \cdots, l)$

$$\boldsymbol{L}^2 |l, m\rangle = l(l+1) |l, m\rangle \ , \qquad L_3 |l, m\rangle = m |l, m\rangle \ ,$$

と角運動量の大きさ 1 の固有状態 $|1, s\rangle$ $(s = -1, 0, 1)$

$$\boldsymbol{S}^2 |1, s\rangle = 1(1+1) |1, s\rangle = 2 |1, s\rangle \ , \qquad S_3 |1, s\rangle = s |1, s\rangle \ ,$$

を合成し、固有状態 $|J, M\rangle\rangle$

$$\boldsymbol{J}^2 |J, M\rangle\rangle = J(J+1) |J, M\rangle\rangle \ , \qquad J_3 |J, M\rangle\rangle = M |J, M\rangle\rangle \ ,$$

を定義する。

(1) $|l+1, l+1\rangle\rangle, |l, l\rangle\rangle, |l-1, l-1\rangle\rangle$ を $|l, m\rangle$ と $|1, s\rangle$ を用いて表せ。

(2) 昇降演算子 $L_\pm$ は

$$L_\pm |l, m\rangle\rangle = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} |l, m \pm 1\rangle$$

を満たす。$m' < m$ のとき、以下の式が成り立つことを示せ。

$$|l, m'\rangle = \sqrt{\frac{(l+m')! \cdot (l-m)!}{(l-m')! \cdot (l+m)!}} (L_-)^{m-m'} |l, m\rangle \ .$$

(3) $J = l+1$ のとき、以下の式が成り立つことを示せ。

$$|l+1, M\rangle\rangle = \sqrt{\frac{1}{(l+1)(2l+1)}} \Bigg[ \sqrt{\frac{(l+M+1)(l+M)}{2}} |l, M-1\rangle |1, 1\rangle + \sqrt{(l+M+1)(l-M+1)} |l, M\rangle |1, 0\rangle + \sqrt{\frac{(l-M)(l-M+1)}{2}} |l, M+1\rangle |1, -1\rangle \Bigg] \ .$$

(補足) 同様にして、$J = l$ と $J = l-1$ のとき、以下の式が示せる。

$$|l, M\rangle\rangle = \sqrt{\frac{1}{l(l+1)}} \Bigg[ -\sqrt{\frac{(l+M)(l-M+1)}{2}} |l, M-1\rangle |1, 1\rangle + M |l, M\rangle |1, 0\rangle + \sqrt{\frac{(l-M)(l+M+1)}{2}} |l, M+1\rangle |1, -1\rangle \Bigg] \ ,$$

$$
\begin{aligned}
|l-1, M\rangle\rangle = \sqrt{\frac{1}{l(2l+1)}}\Bigg[&\sqrt{\frac{(l-M+1)(l-M)}{2}}\,|l, M-1\rangle\,|1,1\rangle \\
&-\sqrt{(l+M)(l-M)}\,|l, M\rangle\,|1,0\rangle \\
&+\sqrt{\frac{(l+M)(l+M+1)}{2}}\,|l, M+1\rangle\,|1,-1\rangle\Bigg] .
\end{aligned}
$$

**2**. 【角運動量の合成２】

前問の $|J, M\rangle\rangle$ $(J = l+1, l, l-1)$ に角運動量演算子 $S_3$ を作用させたものを、$|J, M\rangle\rangle$ の線形結合で表しなさい。

**3**. 【**Clebsch-Gordan 係数**】

2 つの角運動量の固有状態 $|j_1, m_1\rangle$、$|j_2, m_2\rangle$ の合成

$$
|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle
$$

を考える。合成後の角運動量の固有状態はそれぞれの角運動量の大きさ $j_1$、$j_2$ の固有状態でもあるが、ここでは表記の見易さを優先して

$$
|J, M\rangle = |j_1, j_2, J, M\rangle
$$

と書くことにする。これらの状態は正規直交基底をなしているので、

$$
\begin{aligned}
\langle j_1', j_2', m_1', m_2' | j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= \delta_{j_1', j_1}\delta_{j_2', j_2}\delta_{m_1', m_1}\delta_{m_2', m_2} \ , \qquad (1)\\
\langle J', M' | J, M\rangle &= \delta_{J', J}\delta_{M', M} \ , \qquad (2)
\end{aligned}
$$

および、

$$
\begin{aligned}
|J, M\rangle &= \sum_{m_1+m_2=M} |j_1, j_2, m_1, m_2\rangle\,\langle j_1, j_2, m_1, m_2|J, M\rangle \ , \qquad (3)\\
|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle &= \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |J, m_1+m_2\rangle\,\langle J, m_1+m_2|j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \ , \qquad (4)
\end{aligned}
$$

を満たす。このとき、これら二つの正規直交基底の変換則を与える係数

$$
\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M\rangle \ ,
$$

は Clebsch-Gordan 係数と呼ばれる。

(1) 次の式を導出せよ。

$$
\delta_{J', J}\delta_{M', M} = \sum_{m_1+m_2=M} \langle J', M' | j_1, j_2, m_1, m_2\rangle\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M\rangle \ , \qquad (5)
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta_{j_1', j_1}\delta_{j_2', j_2}\delta_{m_1', m_1}\delta_{m_2', m_2} \\
&= \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \langle j_1', j_2', m_1', m_2' | J, m_1+m_2\rangle\langle J, m_1+m_2 | j_1, j_2, m_1, m_2\rangle \ . \qquad (6)
\end{aligned}
$$

(2) Clebsch-Gordan 係数に関する以下の漸化式を導出せよ。

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M \pm 1\rangle \\
&\quad = \sqrt{(j_1 \pm m_1)(j_1 \mp m_1 + 1)}\langle j_1, j_2, m_1 \mp 1, m_2 | J, M\rangle \\
&\qquad + \sqrt{(j_2 \pm m_2)(j_2 \mp m_2 + 1)}\langle j_1, j_2, m_1, m_2 \mp 1 | J, M\rangle \ .
\end{aligned} \tag{7}$$

(3) 漸化式 (7) と式 (5) を用いて、すべての Clebsch-Gordan 係数 $\langle j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M\rangle$ を求めることができることを証明せよ。