物理学演習 III (量子力学)　　No.5　　2016. 5. 17

1. 【３次元調和振動子（後半）】

その場演習 No.5 で示したように、３次元調和振動子の固有状態は

$$|\, n_x, n_y, n_z \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_x! n_y! n_z!}} (\hat{a}_x^\dagger)^{n_x} (\hat{a}_y^\dagger)^{n_y} (\hat{a}_z^\dagger)^{n_z} \,|\, 0 \,\rangle \ ,$$

と表される。この固有状態の座標表示を考える。

(1) 基底状態 $|\, 0 \,\rangle$ の座標表示での波動関数 $\psi_0(x,y,z) = \langle\, x, y, z \,|\, 0 \,\rangle$ を、その定義式

$$\hat{a}_i \,|\, 0 \,\rangle = 0 \ ,$$

から求めなさい。

(2)

$$|\, n_i \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_i}} \hat{a}_i^\dagger \ |\, n_i - 1 \,\rangle \ ,$$

という関係を用いて、一般の状態 $|\, n_x, n_y, n_z \,\rangle$ の座標表示での波動関数

$$\psi_{n_x,n_y,n_z}(x,y,z) = \langle\, x, y, z \,|\, n_x, n_y, n_z \,\rangle \ ,$$

をエルミート多項式 $H_m(x)$ を用いて表しなさい。ただし、Rodrigues の公式より、エルミート多項式が

$$H_n(x) = e^{x^2} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2} \ ,$$

と与えられることを使ってよい。

2. 【３次元調和振動子の極座標表示】

等方的３次元調和振動子の動径方向のシュレディンガー方程式

$$ER(r) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R(r) \tag{1}$$

を考える。$(l = 0, 1, 2, \cdots)$

(1) パラメータと変数の変換

$$R(r) = \frac{1}{r} z^q e^{pz} v(z) = \frac{1}{r} z^q e^{pz} \chi(-2pz) \ , \qquad z = r^2 \ , \tag{2}$$

を行うことによって、標準的な合流型超幾何微分方程式

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (\gamma - \rho)\frac{d}{d\rho} - \alpha \right] \chi(\rho) = 0 \ , \tag{3}$$

に帰着できることを示せ。その際に、パラメータ p、q が満たすべき条件を示せ。

(2) 合流型超幾何微分方程式 (3) の解は、合流型超幾何関数 $F(\alpha, \gamma; \rho)$ で与えられる。波動関数が規格化可能であるためには $F(\alpha, \gamma; \rho)$ が多項式になっていなければならず、その条件は、

$$\alpha = -k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

である。このことから、エネルギー固有値 E と波動関数 $R(r)$ を求めなさい。

(3) エネルギー準位の異なる下から４組の状態について、エネルギーと縮退度を求めなさい。また、直交座標系でのエネルギーと縮退度、およびパリティを同様に求め、直交座標と極座標の結果を比較しなさい。