物理学演習 III (量子力学)　　No. 9　　2016. 6. 28

1. 【ある時間一定値をとる摂動】

ハミルトニアン $H = H_0 + V(t)$ において、$V(t)$ を時間に陽に依存する摂動項とする。また、H_0 は時間によらないものとし、その固有値と固有状態をそれぞれ E_n および $|n\rangle$ と表す。

(1) 時刻 $t = -\infty$ において H_0 の固有状態 $|i\rangle$ にあった系が $t = \infty$ において固有状態 $|f\rangle$ $(i \neq f)$ に遷移する確率 W_{fi} が、最低次の近似で

$$W_{fi} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \ \langle f| V(t) |i\rangle \ e^{i\omega_{fi} t} \right|^2 \ ,$$

で与えられることを示せ。ただし、$\omega_{fi} = (E_f - E_i)/\hbar$ とする。

(2) 摂動のポテンシャル $V(t)$ が

$$V(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (t < 0 \text{ および } t > T) \\ v & (0 < t < T) \end{array} \right.$$

と与えられているとする。ただし、v は時間に依らない演算子とする。$t < 0$ において H_0 の固有状態 $|i\rangle$ にあった系が $t > T$ において固有状態 $|f\rangle$ $(i \neq f)$ に遷移する確率 W_{fi} が、摂動の一次で

$$W_{fi} = |v_{fi}|^2 \left\{ \frac{2\sin(\frac{\omega_{fi} T}{2})}{\hbar \omega_{fi}} \right\}^2 \ ,$$

と表されることを示せ。ただし、$v_{fi} = \langle f|v|i\rangle$ とする。

(3) 終状態のエネルギー準位 E_f が連続的であり、その状態密度が $\rho(E_f)$ で与えられているとき、$t = 0$ から $t = T$ の単位時間あたりの遷移確率は次の式で表される。

$$w_i \equiv \frac{1}{T} \int dE_f \, \rho(E_f) \, W_{fi} \ .$$

このとき、$T \to \infty$ において、フェルミの黄金則

$$w_i = \frac{2\pi}{\hbar} \ |v_{fi}|^2 \ \rho(E_f)|_{E_f = E_i}$$

が成り立つ事を示せ。ここで、添え字 “$E_f = E_i$” は $E_f = E_i$ の場合のみ遷移率が 0 ではない値をとることを意味している。

2. 【周期的に振動する摂動】

摂動ポテンシャルとして正弦的に時間変化するものを考える。

$$V(t) = A\, e^{i\omega t} + A^\dagger\, e^{-i\omega t}\ .$$

ここで、A は時間に依存しないが、他の変数には依存していてもよいものとする。系が $t<0$ において始状態 n_i（無摂動系での固有状態のひとつ）にあったとして、$t>0$ において上記の摂動が加えられるとする。

(1) 時刻 $t>0$ において系が状態 n_f に見いだされる確率 W_{fi} が

$$W_{fi} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\frac{1-e^{i(\omega_{fi}-\omega)t}}{\omega_{fi}-\omega}A^\dagger_{if} + \frac{1-e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}}{\omega_{fi}+\omega}A_{fi}\right|^2\ ,$$

とあらわされることを示せ。ただし、$A_{fi} = \langle n_f|\, A\, |n_i\rangle$ である。

(2) 前問の結果から、$t\to\infty$ において $E_{n_f} \simeq E_{n_i} \pm \hbar\omega$ を満たす $n_i \to n_f$ の遷移確率が大きくなることを確認してその意味を考えよ。このとき、エネルギーの保存はどのようになっているか。

3. 【時間に依存した外場を持つ調和振動子】

角振動数 ω と電荷 q を持つ一次元調和振動子が

$$\mathcal{E}(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}\tau}\ e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\ ,$$

で与えられる時間に依存した一様な電場中にあるとする。このとき摂動ポテンシャルは

$$V(t) = q\mathcal{E}(t)x$$

と表される。$t=-\infty$ に基底状態にあったとして以下の問いに答えよ。

(1) $t=+\infty$ において第 1 励起状態にある確率を 1 次の摂動で求めよ。

(2) $t=+\infty$ において第 n 励起状態にある確率を最低次の近似の範囲で求めよ。