2016年度 量子力学 II レポート問題

諸連絡:

- 以下に沢山ある課題のうち、**少なくとも 3 つを選んで**解答してください。
- 成績評価は次の通りです。3 つきちんと解いていれば、少なくとも良とします。優、優上が欲しい人は、いくつか追加で問題を解いてください。もしくは、「簡単のため〜としてよい」と書いてある条件を外して解答する、また、「暇な人は〜をやってみよ」をやってみる、問題を拡張する、等してください。それらの出来を総合的に評価して、点数にします。(勿論、皆さんで結託して、皆最低限のみ解答することにすると、こちらとしてはほぼ全ての人に優を付けざるを得なくなりますが...)
- 特殊関数の性質や、積分計算の詳細等は、公式集や数式処理ソフトを使ってくれて結構ですが、使ったものをその旨明記してください。
- 特に良く出来た面白い内容に関しては、将来私のホームページ等で (勿論やってくれた人の名前を明記して) 紹介する可能性があります。といって、昨年度もとても面白いのがいくつかあったのですが、ずぼらで、何もやっていないのですが...
- また、講義ノートの誤植を見つけた人は教えてください。
- レポートはメールで tachikawa.kougi.report@gmail.com に送ってください。
- PDF ファイルか、 Word ファイルか、紙に書いたのを携帯/デジカメで読めるように撮るかスキャナを使うかして画像で送るかしてください。また、沢山画像を添付して一部きちんと届かなかったケースがあったので、**画像ファイルは**一頁一ファイルでなく、**ひとつのファイルにまとめてください**。やりかたが分からない人は、Google で “jpg を pdf に変換” で調べてみてください。
- 手書きの人は、書き殴るのでなくて、採点する TA の方を哀れんで、なるべく綺麗な字で書いてください。
- どの場合も、名前と学生証番号をはっきり書いてください。
- 捨てメールアドレスから送ってくださるのも構いませんが、送ってくれたファイルが壊れていた等、後で連絡する可能性があるので、ときどき確認するか、主のメールアドレスに転送するようにしておいてください。
- 締切は 2016/8/2(火)、日本時間 23 時 59 分までとします。8/9(火) には追レポートが必要な番号のリストを講義のウェブページに公開します。その場合は 8/16(火) 日本時間 23 時 59 分までに再度レポートを提出してください。
- 問題文の意味をなさないところ、おかしいと思うところがあったら、適宜正しいと思うように修正して解答してください。僕にメールで連絡してくれたら、この問題も修正します。

課題 1

1. 角運動量 $j = 1/2, 1, 3/2$ の状態に対する角運動量演算子 $\hat{J}_{x,y,z}$ をそれぞれあからさまに行列として書き下せ。但し、基底は $\hat{J}_z$ が対角行列になるように選ぶこと。

2. 角運動量 $j_1 = 1/2$ の状態と角運動量 $j_2 = 1$ の状態を合成する。状態の基底は

   - $|m_1, m_2\rangle$ ただし m_1, m_2 は $\hat{J}_{z,1}$ と $\hat{J}_{z,2}$ の固有値
   - $|J, M\rangle$ ただし J は全角運動量で M は全角運動量の z 成分の固有値

   の二通りをとることが出来る。この二つの基底の間の変換をあからさまに書け。

3. 上の問題で j_1 は $j_1 = 1/2$ のまま、j_2 は一般の角運動量を考える。全角運動量はどうなるか、述べよ。

4. 暇なら、次の問題を考えよう: 角運動量が $j = 1/2$ の状態を N 個とってきて合成した。すなわち、$\hat{J}_{k;x,y,z}$ $(k = 1, \ldots, N)$ は各 k に対して通常の $j = 1/2$ の演算子で、全角運動量演算子は
$$\hat{J}_{\text{total};x,y,z} = \sum_k \hat{J}_{k;x,y,z} \tag{1.1}$$
   とする。このとき、全角運動量の大きさの固有値は何が何回あらわれるか、述べよ。

課題 2

三次元球対称井戸型ポテンシャル中の束縛状態を考える。ハミルトニアンは
$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) \tag{2.1}$$
ただし
$$V(r) = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ V_0 > 0 & (r > a) \end{cases} \tag{2.2}$$
である。

1. $r = a$、$r \to \infty$ での境界条件はどうなっているか述べよ。

2. エネルギー E, 角運動量 ℓ が与えられたとして、$r < a$ での解を決定せよ。$r = a$ での境界条件は考えなくて良い。

3. エネルギー E, 角運動量 ℓ が与えられたとして、$r > a$ での解を決定せよ。$r = a$ での境界条件は考えなくて良い。

4. 角運動量 $\ell = 0$ の場合に、$r = a$ での境界条件を課して、束縛状態のエネルギーを決定する方程式を書き下せ。

5. $\ell = 0$ の束縛状態が三つあるための V_0 の条件をもとめよ。

課題 3

三次元球対称ポテンシャル中の問題を考える。ハミルトニアンは

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) \tag{3.1}$$

で、

$$V(r) = kr, \qquad k > 0 \tag{3.2}$$

とする。

1. 軌道角運動量が ℓ であるとき、波動関数を $\psi(r,\theta,\phi) = F(r)Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ と書いた際、動径方向の波動関数 $F(r)$ のみたす方程式を書きくだせ。
2. $\chi(r) = rF(r)$ について方程式を書いて、すこし変数変換することによって、$\chi(r)$ をエアリ関数 Ai を用いてあらわせ。
3. 束縛状態のエネルギーをエアリ関数の零点を用いてあらわせ。

課題 4

三次元球対称調和振動子を考える。ハミルトニアンは

$$H = \sum_{j=1,2,3} \left(\frac{p_j^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_j^2}{2} \right) \tag{4.1}$$

である。ただし、$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ 等とする。

1. a_j を
$$a_j = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}(x_j + \frac{i}{m\omega}p_j) \tag{4.2}$$
で定める。$[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{jk}$ を示せ。また、H を $a_j, a_j^\dagger$ であらわせ。
2. 最低エネルギー状態を $|0\rangle$ と書く。$|0\rangle$ と $a_j, a_j^\dagger$ を用いて、エネルギー固有状態をあらわせ。また、これより、エネルギー固有値が $E = (n_1 + n_2 + n_3 + 3/2)\hbar\omega$ とあらわせることを導け。
3. g を微小量として、系に摂動 $H' = m\omega^2 gxy$ を加えた。$n_x + n_y + n_z = 0, 1, 2$ の状態に対するエネルギーの 1 次の摂動をもとめよ。
4. 摂動 $H' = m\omega^2 gxy$ の影響は、xy 平面を 45 度回転させて、$\xi = (x+y)/\sqrt{2}, \eta = (x-y)/\sqrt{2}$ および対応する運動量を導入すれば厳密に解くことができる。この結果と、上での摂動計算との結果が合致していることを確認せよ。

課題 5

講義でやる暇がなかった、Zeeman 効果および Paschen-Back 効果について考える。球対称ポテンシャル中の電荷をもったスピン 1/2 の粒子を考える。軌道角運動量が $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ である状態に関して、磁場中のハミルトニアンは

$$H = H_0 + H_{LS} + H_B, \qquad H_{LS} = \xi \vec{L} \cdot \vec{S}, \quad H_B = -\frac{e}{2m}\vec{B} \cdot (\vec{L} + g\vec{S}) \tag{5.1}$$

である。ただし H_0 は主量子数に依存する定数で $H_0 = E_n$、$\vec{L}$ は軌道角運動量演算子で固有値は $-\hbar\ell$ から $\hbar\ell$、$\vec{S}$ はスピン角運動量演算子で $\hbar\vec{\sigma}/2$ で与えられ、$e < 0$ は電子の電荷、電子の g 因子は $g = 2$ とする。簡単のため、$\ell = 1$ として、課題 1 の結果をつかってよい。

1. まず、$\xi \gg |\vec{B}|e/m$ として、$H_0 + H_{LS}$ を対角化し、H_B を摂動として扱おう。こちらを Zeeman 効果という。
   (a) H_{LS} を $\vec{J}^2, \vec{L}^2, \vec{S}^2$ を用いてあらわせ、但し $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$。
   (b) これを用いて、$H_0 + H_{LS}$ の固有値を J, M を用いてあらわせ、ただし $\vec{J}^2$ の固有値を $J(J+1)\hbar^2$、J_z の固有値を $M\hbar$ とする。
   (c) $\vec{B} = (0, 0, B)$ として、この基底での H_B の表式をもとめ、一次の摂動エネルギーをもとめよ。結果のエネルギースペクトルの状況を図示せよ。
2. つぎに、$\xi \ll |\vec{B}|e/m$ として、$H_0 + H_B$ を対角化し、H_{LS} を摂動として扱おう。こちらを Paschen-Back 効果という。以下、$\vec{B} = (0, 0, B)$ とする。
   (a) $H_0 + H_B$ は、L_z と S_z を同時対角化する基底で対角化されている。エネルギー固有値をもとめよ。
   (b) H_{LS} をこの基底であらわし、エネルギーの一次の摂動をもとめよ。結果のエネルギースペクトルの状況を図示せよ。
3. 暇な人は、$\ell = 1$ のときに $H_0 + H_{LS} + H_B$ を厳密に対角化し、結果のエネルギースペクトルの状況を図示し、また二種の極限をとって、上記の摂動計算が再現されることを示せ。

課題 6

一次元的に運動する量子力学的粒子でハミルトニアンが

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + gm\omega^2 x^{2n} \tag{6.1}$$

であたえらえるものを考える。ただし、n は整数とする。簡単のため、以下、 $n = 3$ としてよい。

1. g が十分小さいとして摂動として扱って、最低エネルギー状態への摂動を 1 次まで計算せよ。

2. $|g|$ はとても小さいが $g < 0$ ならば、ポテンシャルは x が大きいところで負になるので、$g = 0$ での最低エネルギー状態は不安定になり、トンネル効果で崩壊する。崩壊率を WKB 近似をつかって見積もれ。

3. 暇があれば、高次の摂動を二次までもとめ、数値的に H の固有値をもとめたものと比較せよ。

4. 暇があれば、高次の摂動をさらにもとめ、$E_0(g) = \sum c_n g^n$ と書いたときの c_n の n の大きいところでの振舞いを求めよ。講義ノートを参考にして、これからも上記トンネル確率をおおよそ求められることを確認せよ。

課題 7

二次元回転対称ポテンシャル中の粒子の問題を考える。ハミルトニアンは

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} - \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{7.1}$$

である。角運動量演算子は $L = xp_y - yp_x$ とする。

1. L と H が交換することを示せ。

2. シュレーディンガー方程式を、極座標で変数分離することによって解き、エネルギーと角運動量の同時固有状態とその固有値を求めよ。

3. 上記問題を解くと、異なる角運動量を持った状態がおなじエネルギーを持ち縮退することがわかるが、暇があれば、これを講義ノートの 5.6.1 節で解説した Pauli の方法にならって解析してみよ。但し、二次元の場合の Runge-Lenz ベクトルは、三次元の Runge-Lenz ベクトルの定義をほぼそのまま使うが、L_x, L_y はゼロとおいて、L_z には上記の $L = xp_y - yp_x$ を用いればよいはず。)

課題 8

講義ノートの 6.2.5 節に関連して。今年度の講義では Stark 効果は主量子数 n が 2 のところへの効果しか話す時間がなかった。1s 状態への摂動がどうなるか、(6.99) 以下に説明してあるが、そこでは 9/4 であるべき係数を大まかにしか決定していない。これをきちんと決定せよ。

課題 9

講義ノートの 7.2 節に関連して、この問題をはじめに考察したのは I. I. Rabi であった。その記念碑的論文は I. I. Rabi, “Space Quantization in a Gyrating Magnetic Field”, Phys. Rev. **51** (1937) 652 である。これを読んで、解説せよ。(全訳せよというのではないので、念のため。) この論文をはじめとして、たくさんの学術論文は、大学のインターネット経由なら、

皆さんの学費および国民の皆様の血税のお陰で無料で読むことが出来るので、是非、それを有効に利用して、いろいろ原論文を読んでみてください。また、Rabi のこの結果は、彼のもともと考えていた応用以外にも物理の広い所で使われている。それについて一つ調べて、まとめて書いてくれても結構です。

課題 10

講義ノートの 8.3 節に関連して、エアリ関数 Ai, Bi の性質の導出を本で調べて、数ページ程度にまとめよ。また、そもそもエアリ関数は虹の見え方を説明するためにエアリが導入した。それについて調べてまとめてくれても大丈夫です。

課題 11

講義ノートの 9 節全般に関して、陽子の電子の束縛状態である水素でなく、陽電子と電子の束縛状態であるポジトロニウムを考える。この場合、換算質量が $\mu = m_{e^-}m_{e^+}/(m_{e^-} + m_{e^+}) = m_e/2$ になり大幅に m_e と異なることや、$m_{e^-}/m_{e^+} = 1$ であるため超微細構造が微細構造と同じオーダーになるなどの違いがある。以上に注意して、ポジトロニウムのスペクトルについて調べて記述せよ。

課題 12

うちの大学院の入試の物理の第一問は例年量子力学 I, II 程度の範囲から出題される。過去問が学科のホームページから手に入るので、例えば一番最近のものを解いてみよ。暇ならば、いろんな年の問題を比較して、品評せよ。もしくは、あなたが出題者なら、どのような問題を出題するか?

課題 13

近年大学のレポート問題といえば Wikipedia からコピペをするのが問題になっているようであるが、 Wikipedia に情報を付加するのであれば文句はないだろう。というわけで、日本語もしくは英語もしくはあなたの好きな言語の Wikipedia の、量子力学 II に関係しそうな項目について、既存記事を改良するなり、新規記事を書くなりせよ。Wikipedia は特定の編集に関してのリンクを表示することが出来るので、自分の編集がどれかを明記すること。

課題 14

その他、なんでも講義の内容に多少関係ありそうなことなら数ページ程度にまとめてレポートにしてくれても結構です。