Monstrous Moonshine ①

M: 最大の散在型単純群.

位数: $2^{46}\,3^{20}\,5^{9}\,7^{6}\,11^{2}\,13^{3}\,17\cdot19\cdot23\cdot29\cdot31\cdot41\cdot47\cdot59\cdot71$

$\sim 8\cdot10^{53}$

既約表現の次元: 1, 196883, 21296876, 842609326, ...

194つある.

これが純代数的に構成されていた頃, (1978) McKay は

19世紀から知られていた由緒正しい関数 "J" に対して

$$J(q) = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots$$

$$196884 = 1 + 196883$$

$$21493760 = 1 + 196883 + 21296876$$

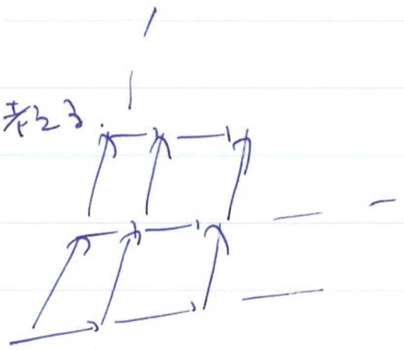
$$864299970 = 2\times1 + 2\times196883 + 21296876 + 842609326$$

に気付いた. Monstrous Moonshine と言う.

Monstrous: とてつもなく　Moonshine: バカげたこと

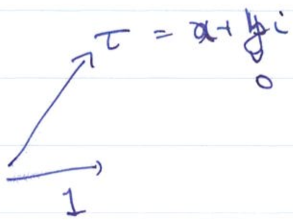
* <u>J-関数とは</u>?

平面上の格子を考える.

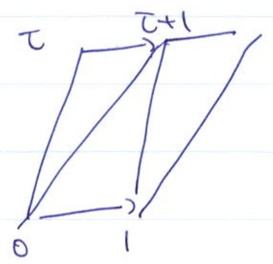


相似なものを同じと思うと, どう分類されるか?

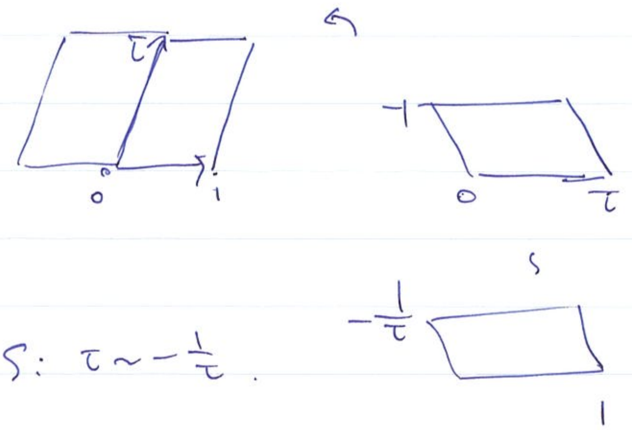
$\mathbb{C}$を用いる.



ことなる τ が同じ lattice を定めることがある.

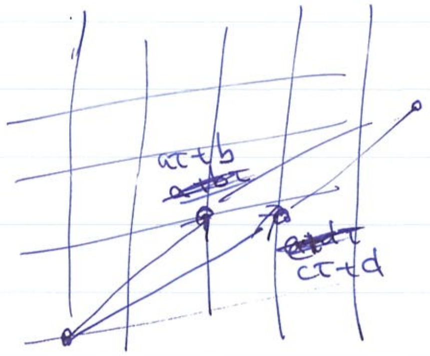


$T:\ \tau \sim \tau+1$



$S:\ \tau \sim -\frac{1}{\tau}$.

一般に



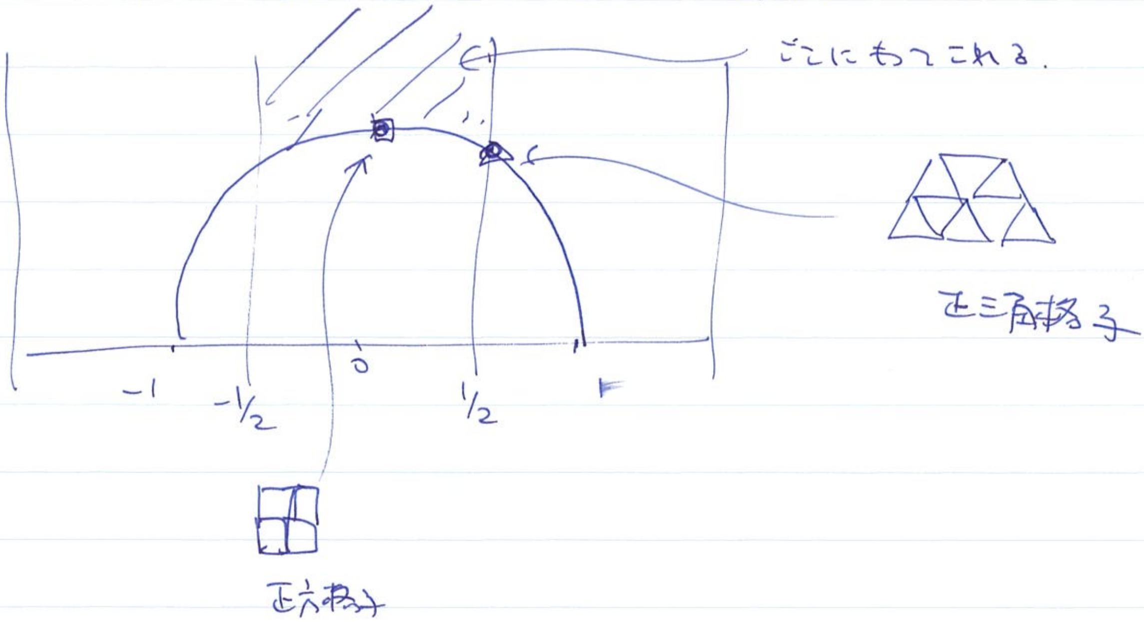
$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$ なら同じ格子を定める.

$\tau \sim \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$. : $SL(2,\mathbb{Z})$ の上半平面への作用.

S と T で生成.

上半平面 $\{\tau = x+yi \mid y>0\}$ に $\tau\sim\tau+1$, $\tau\sim-\frac{1}{\tau}$ と同一視をいれたもの。

で 格子の相似類は パラメタ付けされる.



(極を許す)
複素関数 $f(\tau)$ で $\begin{cases} f(\tau) = f(\tau+1) \\ f(\tau) = f(-\frac{1}{\tau}) \end{cases}$ なものはどんなものがあるか？

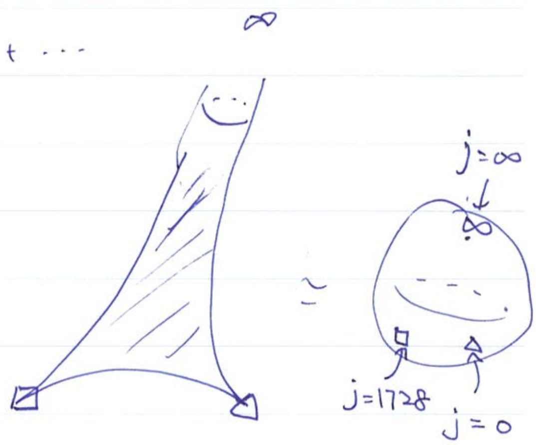
答え

ある関数 $j(\tau)$ があって、$j(\tau)$ の有理式に限る。

$q = e^{2\pi i \tau}$ をつかうと

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884 q + \cdots$$
$$= J(q) + 744.$$

($J(\tau)$ の有理式 といっても同じ。)



$j(\tau)$ の原始的なつくり方：

$m\tau + n$ の格子点がある.

$$G_k(\tau) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\tau+n)^k}$$ とする。

k : even

$k \geq 4$ なら絶対収束.

$G_k(\tau+1) = G_k(\tau)$

$G_k(-\frac{1}{\tau}) = \underbrace{\tau^k}_{\text{余計}} G_k(\tau)$ はすぐわかる。 モジュラー形式

$$\frac{G_4(\tau)^3}{G_4(\tau)^3 - G_6(\tau)^2} \propto j(\tau).$$

余計な τ^k の因子が相殺.

$G_k(\tau) = 2\zeta(k) E_k(\tau)$ と書くと

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k}\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, q^n$$ が知られている。

$\sigma_\ell(n)$ は n の約数の ℓ 乗の和。

ベルヌーイ数 $\frac{x}{e^x - 1} = \sum B_k \frac{x^k}{k!}$

$B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, ...

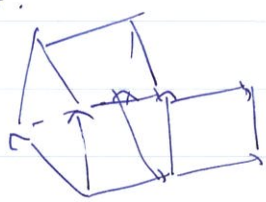
$$\rightsquigarrow \quad E_4(\tau) = 1 + 240 \sum \sigma_3(n)\, q^n$$
$$E_6(\tau) = 1 - 504 \sum \sigma_5(n)\, q^n$$

$$\rightsquigarrow \quad j(\tau) = 1728 \frac{E_4^3}{E_4^3 - E_6^2}.$$

何故これの展開係数が $\mathbb{M}$ とかんれんあるのか???

j かんすうの別のつくり方にヒントがある。

n 次元空間の格子 Γ を考える。



整格子: $v, w \in \Gamma$ に対し $v \cdot w \in \mathbb{Z}$

偶格子: $\in 2\mathbb{Z}$

逆格子 $\Gamma^* \ni v \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ かってな $w \in \Gamma$ に対し $v \cdot w \in \mathbb{Z}$

Γ の基底を $(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n) =: A$ とすると

Γ^* の基底は $(\vec{w}_1 \cdots \vec{w}_n) =: B$

$AB = 1$.

$\det A$: 単位胞のサイズ.

整ならば $\Gamma \subset \Gamma^*$

$\det A = 1 \rightsquigarrow \Gamma = \Gamma^*$

$$\Theta_\Gamma(\tau) = \sum_{v \in \Gamma} q^{\frac{v \cdot v}{2}}$$ とする。

ルート系 A_n, D_n, E_n で 長さ^{2}を2にしたもの ~~格子~~ は 整・偶格子.

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni C_{\alpha\beta} = \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha}}$$

$\det \Gamma_{A_n} = n+1$

$\det \Gamma_{D_n} = 4$

$\det \Gamma_{E_n} = 9-n$.

E_8 は 偶・self dual

Γ: 偶

$\rightsquigarrow \Theta_\Gamma(\tau)$ は $\Theta_\Gamma(\tau+1)$.

$$\Theta_\Gamma\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{\det \Gamma} \cdot \Theta_{\Gamma^*}(\tau)$$ を示せる.

(これは Poisson resummation からすぐ従う.)

← Gaussian のフーリエ変換が Gaussian であることを

∴ Γ が even selfdual なら Θ_Γ は モジュラー形式.

とくに $\Theta_{\Gamma_{E_8}}(\tau) = E_4(\tau)$ になる.

一般に even self-dual lattice は $8n$ 次元に存在.

8次元: E_8 のみ.

16次元: $E_8 \times E_8$ と D_{16} (をスピノルの weight をたして拡大したもの) の2つ.

24次元: 24 種類. (Niemeier lattices)

そのうち 23コ は ルート格子 + α.

のこりの1つが…

Leech lattice

minimal length$^2 = 4$

32次元: 11億コくらい?

⋮

基本だが… Dedekind eta

$$\eta(\tau) = q^{+1/24} \prod_{n>0} (1-q^n) =$$

$$= q^{1/24} \sum_n (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}}.$$

(オイラーの五角数公式).

を考える.

$$\eta(\tau+1) = e^{\frac{2\pi i}{24}} \eta(\tau)$$

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, \eta(\tau).$$

で, $\eta(\tau)^{24}$ は modular 形式. $= E_4{}^3 - E_6{}^2$.

$$\frac{\Theta_{\Gamma_{24}}(\tau)}{\eta(\tau)^{24}}$$ は modular かんすう になる.

$$\shortparallel$$

$$J(\tau) + 24 + (\#\text{ of sq. length} = 2 \text{ of } \Gamma_{24})$$

Leech lattice ↶ Co_0

$\shortparallel$

対称性

$Co_0/\{\pm 1\} =: Co_1$: コンウェイの散在型単純群.

位数 $2^{21} 3^9 5^4 7^2\, 11 \cdot 13 \cdot 23$

$\sim 4 \cdot 10^{24}$

既約表現の ~~個数~~: 1, 276, 299, ...

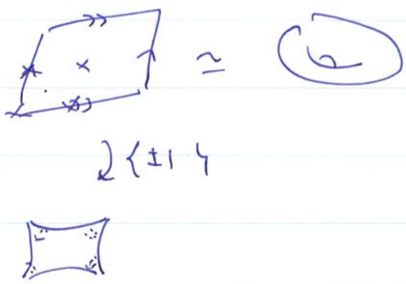
中 次元

98コ

$Co_1 \subset M$
↑
maximal subgp.

一般に $\dfrac{\Theta_\Gamma(\tau)}{\eta(\tau)^{n}}$ は $\mathbb{R}^n/\Gamma$ を動く chiral ボゾン弦の分配関数.
高次元トーラス.

$\mathbb{R}^{24}/\Gamma_{Leech}$: Co_0 対称性.



$\mathbb{R}^{24}/\Gamma_{Leech}/\pm 1$: オービフォールド
2^{24} コ とんがりをもった
枕型.

M が作用.
Frenkel-Lepowski-Meurman (1989).
ある意味 もっとも "かんたん" な M 対称性をもつもの.

余談. 格子があると、充てん度を考えられる. (格子点まわりの円(球)で重ならない最大のものを考え, 体積比.)

2d:  正三角格子. 1940 Fejes Tóth

3d:  面心立方が最密 : 証明は 1998
↓
Hales かっこつき "accept" 2005
↓
proof assist. で検証 2014.

8d : E_8 2016 ! 1603.04246 Maryna S. Viazovska 単著
24d : Leech 2016 ! 1603.06518 + その業界の 以前からの 専門家.