

物理数学III 講義ノート

0 講義に関係あったりなかったりする雑多なコメント

- 評価は期末のレポートで行う¹。レポートの選択問題の一部として、例の通り、講義ノートの間違いや誤植を訂正する、講義ノートの論理のギャップを埋める²、Wikipedia に講義と関連する記事を書く、というがあるので、正式なレポート問題が出る前から是非やってください。
- 質問は、講義後に直接聞いてくれてもいいですし、メールでも良いです。Yahoo 知恵袋の英語版で Physics Stack Exchange, Math Stack Exchange³ というがあるので、そこで質問するのも(英語の勉強にもなって)良いと思う。そこで質問に答えるのはさらに良いので、それもレポートの選択問題にする。
- 群論と微分形式をやることになっている⁴。
- 群論をやるのはまあ物理でしばしば出てくるから意味があると思う⁵。群論や、それに限らず数学のいろいろな分野は、数学者が僕らの代わりに考えておいてくれた道具の集まりなので、どういう道具があるのか知っておくと、将来使い道があるかもしれない⁶。
- ともかく、数学的事実(どんな道具があるか)を中心に話して、証明(どのように道具を組み立てるか)はあまり強調しないつもり。パソコンやスマホは使い方がわかっていればそのソフトやハードの作り方がわからなくてもまあとても興味深かったり役に立ったりするものであって、それと同様だと思う。勿論、パソコンやスマホはOS の構造やハードの構造を分かるとより面白いわけで、証明もきちんと追えばますます興味深いのだけれど。
- というわけで、説明なく「事実はこちらである」とこの講義録には沢山でてくるが、導出が追えなくても心配しないでください。というか、あんまり分かってもらうことを期待していません。将来研究や仕事で群論を使う羽目になったときに、ああ、こんな事実があったな、と記憶の片隅にあって、そのとき勉強する少しの助けになればそれで充分なのではないかと思う。講義ノートの内容をテストのために覚えてもらうことは全く期待してません。

¹テストというのは「決められた時間で何も見ないで何が出来るか」持ち込み可なら「決められた時間で何が出来るか」を測るというものだけれど、そんなことをやって何になるのかわからない。科挙の時代からの慣習でやっているだけではなかろうか。

²講義ノートのソースは <https://bitbucket.org/yujitach/bs3notes/> で公開しているので、ノートの訂正、補足は是非 pull request を出してください。藤堂さんの計算機の講義を受けた皆さんはバージョン管理システムは使えるはずです。(ちなみに、この色の字は pdf から web へのリンクになっている。)

³<https://physics.stackexchange.com>, <https://math.stackexchange.com>。この二つは一応万人むけ。数学は研究者用の <https://mathoverflow.net> も別個にある。物理も研究者用の physics overflow を作ろうとしていて、一応あるが、あまり機能していない。

⁴が、群論はともかく微分形式をちょっとだけやってどうなるのか良く判らない。一般にうちの物理学科では、シラバスの概要が一応決まっていて内部文書があるのだが、2011年から更新されていないし、内容がどうやって決まっているのか良く判らない。昔からの慣習で決まっているだけでは。

⁵まあ僕にとっては群論はそれ自身興味深い話題だからそれでいいのだけれども。

⁶特に群論は量子力学の初期に非常に有効に使われたが、不必要に数学的だ、として、嫌いな人も多かったようで、Gruppenpest (群論病) と呼ばれた。

- 一方で、いろいろ勉強したいという人は、導出の行間を埋めるのを練習問題や演習の替わりになると思いますし、もっと専門的な本を読んでください。
- 特に教科書は指定しない。参考になる文献は図書館やインターネット上に沢山ある。この講義録も頑張って書くつもりだが、うちの物理学科だけでも過去に上田さんや松尾さんの講義録が手に入る。
- 物理屋むけでなければ群論の講義録はネット上でもいろいろある。Milne さんのものは完成すればとてもいいものになると思う。また、Serre 大先生のものもある。後者は、英語の増補版⁷が出版されていて、良い本だと思うのだけれども、なかなか手に入らない。
- たいてい物理のための群論の講義、本という内容とその流れはほぼ同じ。ほぼ同じものをわざわざ講義でやったりその講義ノートを準備するのはつまらないので、わざとこの講義ノートは毛色を変えてあります。しかし、このノートのほうが良いとか分かりやすいというわけではないと思う。ただ、講義をする僕が興味を失わないように、なるべく、変わった方法でやりたいのです。
- 物理数学 II でやるような特殊関数は最近 Mathematica などの数式処理ソフトが何でも知っている。群論ぐらいになると Mathematica 等市販のソフトの域を少々超えてくるが、数学者は偉いので自分たちでいろいろ開発している。群論に関しては GAP というオープンなものと Magma というクローズなものが著名。僕は前者をちょっと使ったことがあるだけだけれど。数学者は各分野の研究者がそれぞれいろいろ開発して、最近ではそれらを統合して Sage から使える用になっている。
- 有限群の情報は Group Properties Wiki にも詳しい。

⁷Serre, “Finite Groups: an introduction”, International Press of Boston, 2016

1 群の基本的な性質

1.1 群の定義と例

定義 1.1.1 群 (group) とは、集合 G で、 $a, b \in G$ に対してそれらの合成 $a \circ b \in G$ が定まっており、さらに

- 単位元 (unit element) と呼ばれる $e \in G$ があって勝手な元 $a \in G$ に対し $a \circ e = e \circ a = a$,
- 勝手な元 a に対して、その逆元 (inverse) と呼ばれる元 $a^{\circ-1} \in G$ があって、 $a \circ a^{\circ-1} = a^{\circ-1} \circ a = e$ を満たし、
- $a, b, c \in G$ に対し、結合則 (associativity) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ をみたす

もののこと。

G のそれぞれの元を操作だと思えば、単位元 e は「何もやらない」という操作。 $a \circ b$ は通常「 b をやってから a をやる」と解釈される。右にあるのを先にやって、左にあるのをあとにやることに注意。また、 $(ab)^{\circ-1} = b^{\circ-1} \circ a^{\circ-1}$ であることにも注意。

定義 1.1.2 群 G において、常に $a \circ b = b \circ a$ ならば、 G はアーベル群 (Abelian group) もしくは可換群と呼ぶ。そうでないなら非アーベル群 (non-Abelian group) もしくは非可換群と呼ぶ。

(非)可換群は英語では (non)commutative group と訳しても良さそうだが、実際に使われているのは見た事が無い。

例 1.1.3 一点集合 $\{e\}$ は $e \circ e = e$ とすると自明に群の定義を満たす。

例 1.1.4 実数 \mathbb{R} は、たし算 $+$ のもとで可換群をなす。単位元は $e = 0 \in \mathbb{R}$ で、逆元は $a^{\circ-1} := -a$ 。

例 1.1.5 ゼロでない実数 \mathbb{R}^\times は、かけ算 \times のもとで可換群をなす。単位元は $e = 1 \in \mathbb{R}$ で、逆元 $a^{\circ-1} := 1/a$ 。

例 1.1.6 三次元空間 \mathbb{R}^3 の回転は、合成のもとで非可換群をなす。単位元は「回転しない」ということで、逆元は回転軸は同じだが回転角にマイナスをつけたもの。三次元の回転群を $SO(3)$ と書く。

S は special で、回転行列の行列式が 1 であることを指し、 O は orthogonal で、回転行列は直交行列であることを指し、 3 は回転が作用する空間の次元を指す。後に $SO(N)$ を扱う。

群の合成のシンボルとして \circ を使うのは面倒くさいので、何も書かないことが多い: $a \circ b$ のかわりに ab と書く。このとき、単位元も上の例にならって 1 と書くこともある

が e を使うことも多い。逆元も単に a^{-1} と書く。これを群の乗法的記述 (multiplicative notation) という。

可換群の場合は、 \circ のかわりに $+$ と書くことも多い。このとき、単位元は通常 0 と書き、逆元は $-a$ と書く。これを群の加法的記述 (additive notation) という。群の乗法的記述は群の可換、非可換に関わらず使われるが、加法的記述は非可換群の場合は使われない。

以下このノートでは、断りの無い限り、乗法的記法を用いる。

定義 1.1.7 群 G の要素数を位数 (order) とよび、 $|G|$ であらわす。これが有限のとき、有限群 (finite group)、そうでなければ、無限群である。群の要素のパラメタが連続ならば連続群、そうでなければ離散群 (discrete group) と呼ぶ。連続群は無限群である。

直前の定義は数学的には厳密でないが、雰囲気は伝わるだろう。上記の三例は全て無限群で連続群である。実数のパラメタが n 個必要な連続群は n 次元だと呼ばれる。 \mathbb{R} は 1 次元、 \mathbb{R}^\times も 1 次元、 $SO(3)$ は回転軸の向きに二つパラメタが必要で、さらに回転角のパラメタ加わり、3 次元である。無限次元の連続群も沢山ある。例えば、連続な全単射 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 全体は群をなすが、パラメタは有限個ではすまない。

例 1.1.8 整数 \mathbb{Z} は足し算 $+$ のもとで離散無限群をなす。

例 1.1.9 集合 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ は法 n での足し算、すなわち、整数だと思って足して、 n で割って余りを取る操作で有限群をなす。

物理から遠い内容の数学者にとっては \mathbb{Z}_p は p 進数のなす無限集合であることが多く、それとの混乱を防ぐため、数学の本では上記 \mathbb{Z}_n は \mathbb{Z}/n とか $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と書かれることが多い。 \mathbb{Z}_n は C_n と書かれることもある。 C は cyclic の頭文字で、巡回群とも呼ばれる。

例 1.1.10 n 点の集合 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、全単射 $\sigma: X \rightarrow X$ は合成のもとで群をなす。これを対称群 (symmetric group) と言い、 S_n であらわす。

$|S_n| = n!$ である。

1.2 群の作用と軌道

定義 1.2.1 群 G が集合 X に(左から)作用 (act) するとは、群の元 g に対し写像 $\varphi_g: X \rightarrow X$ が与えられていて、 $g, h \in G$ に対し

$$\varphi_{gh} = \varphi_g \varphi_h \quad (1.2.1)$$

であること、すなわち勝手な $x \in X$ に対し $\varphi_{gh}(x) = \varphi_g(\varphi_h(x))$ であることをいう。

φ を書いていると面倒くさいので、 $\varphi_g(x)$ を $g \triangleright x$ また単に gx と略記することもしばしばある。また、 G が X に作用するということを $G \curvearrowright X$ と書くことがある。

勝手な群 G と集合 X に対し、 φ_g を恒等写像と定めると、上記の定義をみたす。これを自明な作用というが、あまり面白くない。

これまで導入した群はそもそも作用を通じて定義したことが多かった。例えば

例 1.2.2 三次元の回転群 $\mathrm{SO}(3)$ は三次元空間 \mathbb{R}^3 に作用する。

例 1.2.3 置換群 S_n は n 点集合 $X = \{1, \dots, n\}$ に作用する。

しかし与えられた群は異なる集合にも作用出来る。例えば

例 1.2.4 三次元の回転群 $\mathrm{SO}(3)$ は、三次元空間の正規直交基底全体

$$\text{基底の集合} := \{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \text{ は長さ } 1 \text{ で互いに直交}\} \quad (1.2.2)$$

に作用する。

例 1.2.5 置換群 S_n は x_1, \dots, x_n の多項式全体にも変数の置換として作用する。

また、 G が X に作用するとき、 X 上の関数全体にも自然に G は作用する：

例 1.2.6 $\mathrm{Map}(X, \mathbb{C}) := \{F : X \rightarrow \mathbb{C}\}$ を X 上の複素数値関数全体とする。 G が X に作用するとする。このとき、 $\rho_g(F) \in \mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$ を

$$\rho_g(F)(x) := F(\varphi_{g^{-1}}(x)) \quad (1.2.3)$$

で定めると、 G は $\mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$ に作用する。

略記法をつかえば $(gF)(x) := F(g^{-1}x)$ である。なぜ $^{-1}$ がいるのだろうか。それは、作用の定義を満たしているかどうかを確認するとき必要である： $g, h \in G$ として、

$$(g(hF))(x) = (hF)(g^{-1}x) = F(h^{-1}g^{-1}x) = F((gh)^{-1}x) = ((gh)F)(x). \quad (1.2.4)$$

定義 1.2.7 群 G が X に作用するとき、 $x \in X$ の軌道 (orbit) を

$$Gx := \{\varphi_g(x) \in X \mid g \in G\} \quad (1.2.5)$$

で定める。 $y \in Gx$ ならば $x \in Gy$ であるので、これは同値関係 $x \sim_\varphi y$ を定める。これによって類別したものが軌道の集合であり、 $X/\varphi G$ と書く。

φ が状況から明らかなら省略することも多い。

例 1.2.8 例1.2.2において、各軌道は半径一定の球面である。

例 1.2.9 例1.2.4において、基底の集合/ $\mathrm{SO}(3)$ は二点からなる。すなわち、基底の集合に $\mathrm{SO}(3)$ が作用する際の軌道は左手系の基底よりなる軌道と右手系の基底よりなる軌道の二つである。

群 G は G 自身に自然に作用出来る。左作用、右作用、共役による作用の三種類を導入する：

定義 1.2.10 群 G に対し、 $l_g : G \rightarrow G$ を $l_g(h) = gh$ と定めると、これは G の G への作用になる。これを左作用 (left action) という。

定義 1.2.11 群 G に対し、 $r_g : G \rightarrow G$ を $r_g(h) = hg^{-1}$ と定めると、これも G の G への作用になる。これを右作用 (right action) という。

左作用のもとでは、全ての群の元はひとつの軌道に入る。右作用でも同様である。

定義 1.2.12 群 G に対し、 $c_g : G \rightarrow G$ を $c_g(h) = ghg^{-1}$ と定めると、これも G の G への作用になる。これを共役による作用 (action by conjugation) という。 $h, h' \in G$ が共役による作用でうつりあうとき、 h と h' を共役 (conjugate) という。

例 1.2.13 G が可換なら共役による作用は自明であるので、 $h \in G$ と共役な元は自分自身のみである。

例 1.2.14 $SO(3)$ の元 h, h' はいつ共役だろうか? $SO(3)$ の元は回転軸と回転角で定められるが、 h と ghg^{-1} は回転軸は異なりうるが回転角は同じである。これから、 h と h' は回転角が同じとき、またそのときのみ共役であることがわかる。

1.3 同型、部分群

定義 1.3.1 群 G から群 H への全単射 $\varphi : G \rightarrow H$ は、群の操作を保つとき、すなわち $\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g')$ であるとき、群の同型 (isomorphism) といい、 $G \simeq H$ と書く。

例 1.3.2 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ に $\text{mod } n$ には和で可換群の構造が入った。また、 1 の n 乗根全体 $\{1, e^{2\pi i/n}, e^{2\pi i 2/n}, \dots, e^{2\pi i(n-1)/n}\}$ に積で可換群の構造が入る。この二つの群は $\mathbb{Z}_n \ni k \mapsto e^{2\pi i k/n}$ という写像のもとで同型である。

僕はすばらなので \mathbb{Z}_2 を加法的に考えて $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ と書くこともあるし乗法的に考えて $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$ と書くこともある。

定義 1.3.3 群 G の部分集合 H が群をなすとき、部分群 (subgroup) という。

例 1.3.4 $\mathbb{Z}_{mn} = \{0, 1, \dots, mn-1\}$ の部分集合 $\{0, m, 2m, \dots, (n-1)m\}$ は \mathbb{Z}_n に同型な部分群になる: $\mathbb{Z}_n \hookrightarrow \mathbb{Z}_{mn}$.

ここで記法 \hookrightarrow は \subset でもあるし \rightarrow でもあるという雰囲気をあらわすために使った。

例 1.3.5 対称群 S_n が $\{1, \dots, n\}$ に置換で作用しているとする。はじめの $m < n$ 文字 $\{1, \dots, m\} \subset \{1, \dots, n\}$ しか動かさない置換全体は勿論部分群をなし、 S_m と同型である。だから $S_m \hookrightarrow S_n$.

例 1.3.6 三次元の回転群 $SO(3)$ において、正の整数 n を決め、回転軸をひとつ固定し、そのまわりの $2\pi k/n$ 回転 ($k = 0, 1, \dots, n-1$) を考えると、これは \mathbb{Z}_n と同型な部分群をなす。

回転軸の選び方毎に $SO(3)$ の部分集合としては異なるが、いつも \mathbb{Z}_n と同型な部分群が沢山あるということである。しかしこれらの部分群はある意味同じである。それをきちんと定式化しよう。

定義 1.3.7 H を G の部分集合として、 gHg^{-1} という集合を $\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ で定める。 H が部分群ならば、 gHg^{-1} も同型な部分群である。 H と gHg^{-1} は共役な部分群と呼ばれる。

例 1.3.8 例 1.3.6 に戻ると、軸 A のまわりの $2\pi/n$ 回転からなる部分群 $H_A \sim \mathbb{Z}_n$ と軸 B のまわりの $2\pi/n$ 回転からなる部分群 $H_B \sim \mathbb{Z}_n$ は、軸 A を軸 B にまわす回転 $g \in SO(3)$ をとれば共役である: $H_B = gH_Ag^{-1}$ 。まとめると、 $SO(3)$ の \mathbb{Z}_n 部分群は全て共役である。

このように、数学においては、何か二つのものが同じか異なるかを問うたばあいには、どの意味で同じかをいろいろ区別して考えることができる。(この場合では、部分集合として同じか、もしくは、共役を許して同じか。) 僕は場の量子論をずっと研究しているけれど、場の量子論はまだ数学的にきちんと定義されていないものだから、二つの場の量子論 A と場の量子論 B が「同じ」なのか「異なる」のかどうか、同じだとして、どういう意味で同じなのか、共同研究者と意見が食い違ったり、そもそも自分自身のなかで混乱することがしばしばある。

1.4 準同型と正規部分群

定義 1.4.1 群 G から群 H への写像 $\varphi: G \rightarrow H$ は、群の操作を保つとき、すなわち $\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g')$ であるとき、群の準同型 (homomorphism) という。

定義 1.3.1 で同型を定義したが、それは全単射であるような準同型である。

定義 1.2.1 で G が X に作用するという概念を定義したが、これは G から X 上の変換全体の群 $\{\varphi: X \rightarrow X \mid \varphi \text{ は全単射}\}$ への準同型と言ってもよい。

部分群に対し、 $H \hookrightarrow G$ を単に埋め込む写像とする。これは準同型である。だから、前節でやった部分群の例は全部準同型の例でもある。もうちょっと違う準同型を考えよう。

例 1.4.2 $\mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ という準同型が $(a \bmod mn) \mapsto (a \bmod m)$ で定まる。

例 1.4.3 対称群 S_n から $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ (ここでは乗法的に書くことにする) への準同型 $\text{sign}: S_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ がつぎのように作れる。変数 x_1, \dots, x_n を用意し、差積 $\Delta = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ を考える。 $\sigma \in S_n$ に対し、 $\prod_{i < j} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}) = \pm \Delta$ である。そこでこの右辺の符号を $\text{sign}(\sigma) \in \mathbb{Z}_2$ と定める。

この二つの例では、行った先のほうが小さいので、単射ではない。特に、行った先の単位元にうつる元が沢山ある。

定義 1.4.4 準同型 $\varphi : G \rightarrow H$ に対して、

$$\text{Ker } \varphi := \{g \in G \mid \varphi(g) = e\} \quad (1.4.1)$$

を φ の核 (kernel) といい、 G の部分群になる。

証明は $\varphi(g) = \varphi(g') = e$ なら $\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g') = e$ 、等。

準同型の核は正規である、ということを説明するために、正規部分群を定義する：

定義 1.4.5 群 G の部分群 H が正規部分群 (normal subgroup) であるとは、勝手な $g \in G$ に対し、共役な部分群 gHg^{-1} が H 自身である、すなわち $gHg^{-1} = H$ であることである。群論の本では $H \triangleleft G$ と書かれる。

正規部分群は古い文献では不変部分群 (invariant subgroup) とも呼ばれる。

事実 1.4.6 $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ を準同型とし、 $H = \text{Ker } \varphi$ とすると、 H は G_1 の正規部分群である。

証明は定義をきちんと書き下せば従う。

例 1.4.7 例 1.4.2 の準同型 $\mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ の核は例 1.3.4 でやった $\mathbb{Z}_n \hookrightarrow \mathbb{Z}_{mn}$ である。

例 1.4.8 例 1.4.3 の準同型 $\text{sign} : S_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ の核を交代群 (alternating group) といい、 A_n と書く。

例 1.4.9 例 1.3.6 でやった $\text{SO}(3)$ の \mathbb{Z}_n 部分群は ($n=1$ を除いて) 正規部分群でない。

さて、 $H \triangleleft G$ を正規部分群とする。 $g \in G$ に対し、

$$gH := \{gh \mid h \in H\}, \quad Hg := \{hg \mid h \in H\} \quad (1.4.2)$$

は一致する。そこで、 $G/H = \{gH\} = \{Hg\}$ と定める。さて、

$$(gH)(g'H) = (gg')H \quad (1.4.3)$$

である。(証明: $ghg'h' = gg'(g'^{-1}hg')h' = gg'(h''h')$ 。) これにより G/H は群になる。また、 $G \ni g \mapsto gH \in G/H$ は全射準同型になる。まとめると

事実 1.4.10 群 G とその正規部分群 H に対し、 G/H は自然に群になり、 $G \twoheadrightarrow G/H$ なる全射準同型がある。

ここで \twoheadrightarrow は全射を示す記号としてつけた。同様に

事実 1.4.11 $\varphi : G \twoheadrightarrow K$ を全射準同型とし、 $H = \text{Ker } \varphi$ をその核とすると、 $K \simeq G/H$ である。

これらをまとめて

$$H \hookrightarrow G \twoheadrightarrow K \quad (1.4.4)$$

と書くことにする。以下、ちょっと非標準的だが、こうかけば、 H は G の正規部分群で、 $K = G/H$ ということを意味することにする⁸。

同じ議論で次の事実が従う:

事実 1.4.12 $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ を準同型とすると、 $\text{Im } \varphi \simeq G_1 / \text{Ker } \varphi$ である。

また

事実 1.4.13 上の設定において、 G, K, H が有限群のとき、 $|G| = |H||K|$ である。

上の例に戻ると、

例 1.4.14 $\mathbb{Z}_n \hookrightarrow \mathbb{Z}_{mn} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_m$ だから、 $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{mn}/\mathbb{Z}_n$ である。

位数をとると確かに $|\mathbb{Z}_{mn}| = |\mathbb{Z}_m||\mathbb{Z}_n|$ である。

例 1.4.15 $A_n \hookrightarrow \mathbb{Z}_{mn} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ だから、 $\mathbb{Z}_2 = S_n/A_n$ である。

これより $|A_n| = n!/2$ がわかる。

⁸普通は $H \hookrightarrow G \twoheadrightarrow K$ 、おなじことだが $0 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 0$ が完全列である、といわないといけない。

2 群に関する幾つかの話題

2.1 $SO(3)$ の有限部分群について

さて、群 G が何か X に作用していると、 G の部分群 H が沢山できる:

定義 2.1.1 G が X に作用するとする。 X の部分集合 S を取る。

$$G_S := \{g \in G \mid \text{勝手な } s \in S \text{ に対して } gs \in S\} \quad (2.1.1)$$

は G の部分群になる。これを S を集合として固定する部分群 (setwise stabilizer) と言う。

この条件は $gS = \{gs \in X \mid s \in S\}$ としたとき $gS = S$ と書いてもよい。これを $SO(3)$ が \mathbb{R}^3 に作用している状況で使うと、有限部分群をいろいろ作ることができる。

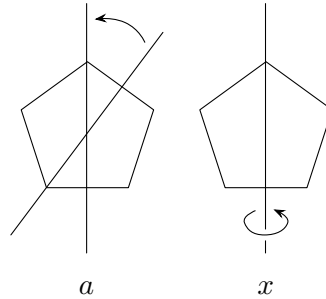


Figure 2.1: 二面体群の要素。 $a^n = x^2 = e$, $axa^{-1} = a^{-1}$ 。

例 2.1.2 \mathbb{R}^3 に $SO(3)$ が作用している状況で、 xy 平面で原点を中心に正 n 角形をひとつ考える。この正 n 角形を集合として固定する部分群を二面体群 (dihedral group) D_{2n} とよぶ。

二面体群 D_{2n} は D_n と書く人もいる。群の元は具体的には z 軸まわりの $2\pi k/n$ 回転 $k = 0, 1, \dots, n-1$ と、あとは各辺の真ん中と原点を結ぶ線まわりの 180° 回転で、合計 $2n$ 個元がある。 $2\pi/n$ 回転をする元を a 、ひっくり返す元を x と書くと、

$$a^n = x^2 = e, \quad xax^{-1} = a^{-1} \quad (2.1.2)$$

を満たす。図 2.1 を参照のこと。

例 2.1.3 \mathbb{R}^3 に $SO(3)$ が作用している状況で、原点を中心とする正四面体を考える。これを集合として固定する部分群を正四面体群 (tetrahedral group) \mathcal{T} とよぶ。

各頂点まわりの 120° 回転、 240° 回転が計 8 個、各辺の中点まわりの 180° 回転が計 3 個、何もしないのが 1 個で、位数は 12 である。図 2.2 を参照。

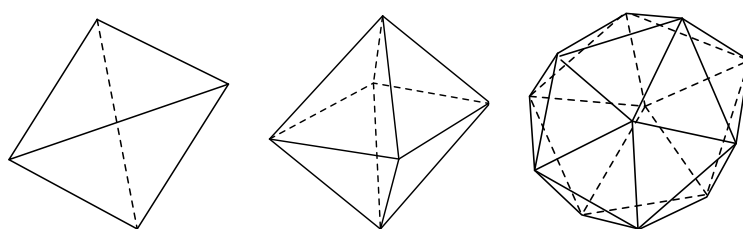


Figure 2.2: 正四、八、二十面体。適当にかいたので汚くてすいません。

例 2.1.4 \mathbb{R}^3 に $SO(3)$ が作用している状況で、原点を中心とする正八面体を考える。これを集合として固定する部分群を正八面体群 (octahedral group) \mathcal{O} とよぶ。

原点を中心とする立方体を考えても同じことになる(面の中心がなす正八面体も固定することになるから)。各頂点まわりの 90° , 180° , 270° 回転が合計 9 個、各辺の中点まわりの 180° 回転が 6 個、各面の中心まわりの 120° 回転と 240° 回転が 8 個、単位元が 1 個で、位数は 24 である。

例 2.1.5 \mathbb{R}^3 に $SO(3)$ が作用している状況で、原点を中心とする正二十面体を考える。これを集合として固定する部分群を正二十面体群 (icosahedral group) \mathcal{I} とよぶ。

原点を中心とする正十二面体を考えても同じことになる。各頂点まわりの 72° , 144° , 216° , 288° 回転が合計 24 個、各辺の中点まわりの 180° 回転が 15 個、各面の中心まわりの 120° 回転と 240° 回転が 20 個、単位元が 1 個で、位数は 60 である。

さて、例 1.3.6 で $SO(3)$ には \mathbb{Z}_n 部分群があることも見た。

事実 2.1.6 $SO(3)$ の有限部分群は、共役をのぞいて、 \mathbb{Z}_n , D_{2n} , \mathcal{T} , \mathcal{O} , \mathcal{I} で尽きる。

数学における分類では、このように、無限系列がいくつか (ここでは \mathbb{Z}_n , D_{2n}) に加えて、例外的なものが有限個 (\mathcal{T} , \mathcal{O} , \mathcal{I}) があらわれる、ということがしばしばおこる。偉大な数学者 Atiyah によれば⁹、数学者はこういう状況に巡り合ったときに、無限系列が好きな人と例外が好きなひとに大きくわかれるらしい。

事実 2.1.7 以下の同型がある: $\mathcal{T} \simeq A_4$, $\mathcal{O} \simeq S_4$, $\mathcal{I} \simeq A_5$.

まず位数が一致するのはすぐわかる: 位数はそれぞれ 12, 24, 60 だった。具体的に同型を構成するには、図 2.3 にある展開図から正四面体、正八面体、正二十面体をつくり、それぞれの回転が面に書いた $\{1, 2, 3, 4\}$ もしくは $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ にどのように作用するかをみればよい。

2.2 $SO(3)$ 、自由群 F_2 、バナッハ＝タルスキ

ある群 G があって、そこに a という異なる元があったとする。群の定義から従う最低限の関係式だけが満たされるとすると、 G はどういう群だろうか。まず、勝手な整数 n に対して a^n という元がある。群の定義から、 $a^n a^m = a^{n+m}$ である。群の定義からは、

⁹R. Minio, “An interview with Michael Atiyah,” *Mathematical Intelligencer*, **6**, issue 1 (1984), pp. 9–19

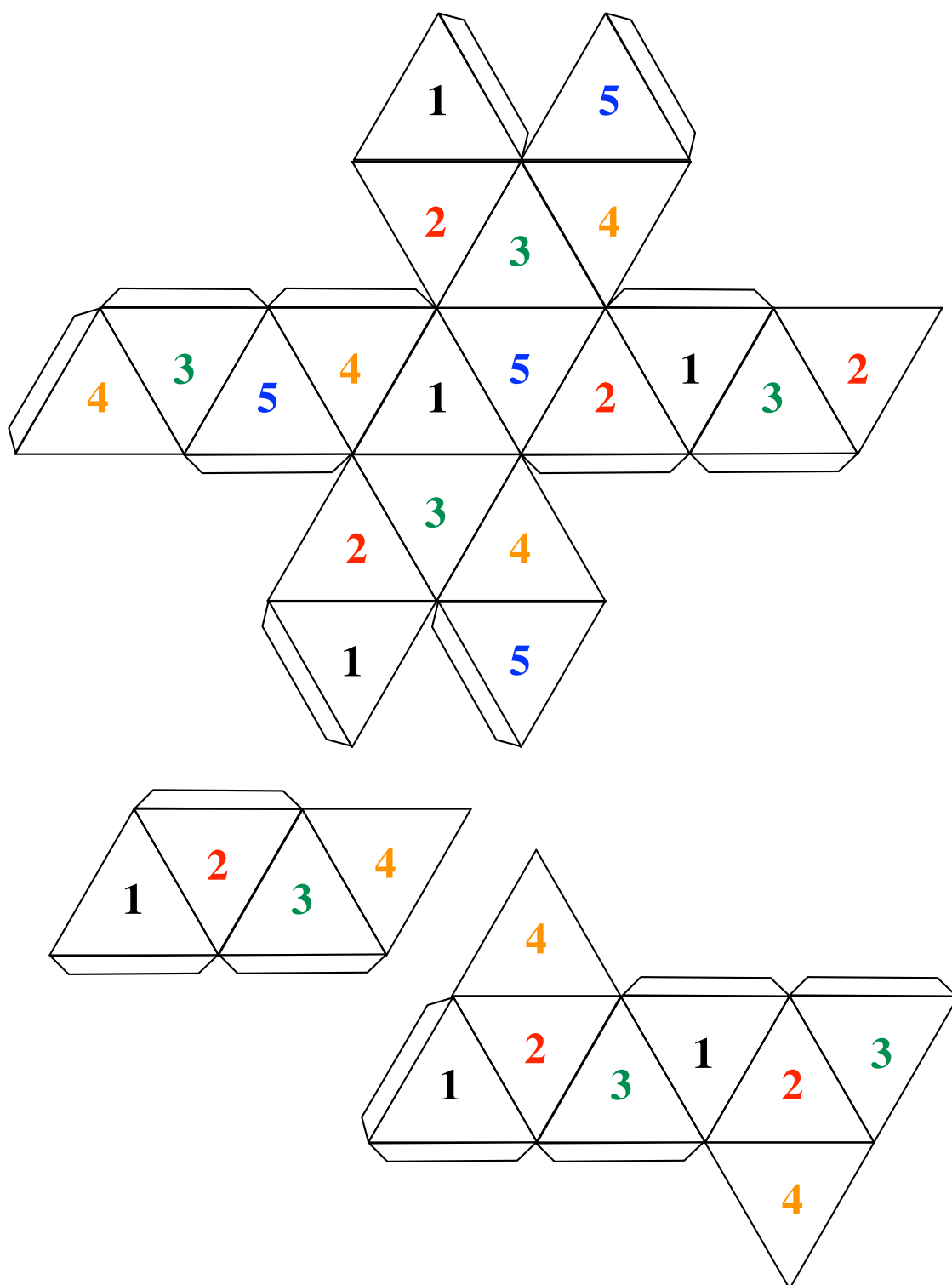


Figure 2.3: 正多面体の展開図

$n \neq 0$ のときの a^n については何も情報がない。そこで、 $n \neq m$ なら a^n と a^m は全て異なることにする。このように定義すると、 $\{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$ は \mathbb{Z}_n と同型な群になる。このことを、一つの元 a で生成される自由群 F_1 は \mathbb{Z}_n である、ということにする。

次に二つの元 a, b で生成される自由群 F_2 を考える。すなわち、ある群であって、そこに a と b という二つの異なる元があって、群の定義から従う最低限の関係式だけが満たされるとするのである。すると、 a^{-1}, b^{-1} があるはずで、 $ab, b^{-1}a$ 等々もあるはずで、関係式 $(ab)(b^{-1}a) = a^2$ という関係式も群の定義から従う。 ab と ba は群の定義からは必ずしも等しくない。そこで $ab \neq ba$ としよう。良く考えると、次のような群になることがわかる：

例 2.2.1 二つのシンボル a, b で生成される自由群 (free group) F_2 を以下のように定義する。集合としては、

$$F_2 = \{e\} \cup S(a, a) \cup S(a, b) \cup S(b, a) \cup S(b, b) \quad (2.2.1)$$

ただし

$$S(a, a) = \{\text{シンボル列 } \underbrace{a^{n_1} b^{n_2} a^{n_3} \cdots b^{n_{k-1}} a^{n_k}}_{k \text{ 個}} \mid n_1, \dots, n_k \text{ はゼロでない整数}\}, \quad (2.2.2)$$

$$S(a, b) = \{\text{シンボル列 } \underbrace{a^{n_1} b^{n_2} a^{n_3} \cdots a^{n_{k-1}} b^{n_k}}_{k \text{ 個}} \mid n_1, \dots, n_k \text{ はゼロでない整数}\}, \quad (2.2.3)$$

$$S(b, a) = \{\text{シンボル列 } \underbrace{b^{n_1} a^{n_2} b^{n_3} \cdots b^{n_{k-1}} a^{n_k}}_{k \text{ 個}} \mid n_1, \dots, n_k \text{ はゼロでない整数}\}, \quad (2.2.4)$$

$$S(b, b) = \{\text{シンボル列 } \underbrace{b^{n_1} a^{n_2} b^{n_3} \cdots a^{n_{k-1}} b^{n_k}}_{k \text{ 個}} \mid n_1, \dots, n_k \text{ はゼロでない整数}\}. \quad (2.2.5)$$

群構造は群になるように頑張って入れる。

例えば $aba^{-1} \in S(a, a)$ と $ab^{-1}a^2b \in S(a, b)$ に対しその積は

$$(aba^{-1})(ab^{-1}a^2b) = (ab)(b^{-1}a^2b) = (a)(a^2b) = a^3b \in S(a, b). \quad (2.2.6)$$

これだと何だか良く判らないかもしれないが、図 2.4 をみると多少わかりやすいかもしれない。縦横にフラクタルにつながっているグラフがあって、 a は右に、 a^{-1} は左に、 b は上に、 b^{-1} は下に動くと考える。シンボル列は右から左に読む。すると、勝手な $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ の並びに対して、原点から出発した行き先が定まる。例えば、 a^2b なら、まず上にいって、そこから右に二回進む。行き先を決めると、原点からそこまでなるべく無駄の無い行き方があって、それを指定するのが F_2 の元だと思えば良い。 F_2 の元の合成は、行った先からさらに $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$ で動いて辿り着いた先である。

さて、こんな意味不明な群 F_2 であるが、実は $SO(3)$ の部分群として案外簡単に実現できる：

事実 2.2.2 $z_\theta \in SO(3)$ を z 軸周りの θ 回転、 $x_\psi \in SO(3)$ を x 軸周りの ψ 回転とする。 θ, ψ を十分に一般的にとっておけば、 z_θ, x_ψ で生成される $SO(3)$ の部分群は $a \mapsto z_\theta, b \mapsto x_\psi$ という対応のもとで上記の自由群 F_2 と同型である。

証明は本題ではないが、僕の備忘のため概要を書いておく。 $a \mapsto z_\theta, b \mapsto x_\psi$ によって $F_2 \rightarrow SO(3)$ という準同型があるから、これが単射であることを示せばよい。すなわち、勝手な $z_\theta^{n_1} x_\psi^{n_2} \cdots z_\theta^{n_k}$ ($n_i \neq 0$) 等が非自明な回転であることを示せば良い。

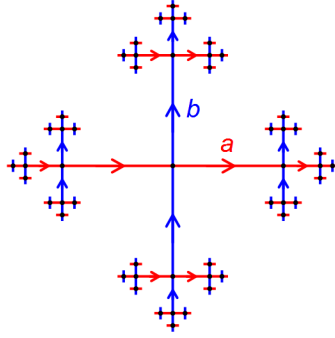


Figure 2.4: F_2 の図示。 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:F2_Cayley_Graph.png より拝借。

まず、 $n \neq 1$ なら $z_\theta^n \neq e$ とするのは簡単である: $\theta/2\pi$ を無理数にしておけばよい。あとの都合のため $e^{i\theta}$ 自体を超越数にとっておく。さて、 $s = e^{i\theta}$, $t = e^{i\psi}$ と書くと、回転行列は具体的に

$$z_\theta = \begin{pmatrix} \frac{s+s^{-1}}{2} & \frac{s-s^{-1}}{2i} & 0 \\ -\frac{s-s^{-1}}{2i} & \frac{s+s^{-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t+t^{-1}}{2} & \frac{t-t^{-1}}{2i} \\ 0 & -\frac{t-t^{-1}}{2i} & \frac{t+t^{-1}}{2} \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

と書ける。このとき、

$$z_\theta^{n_1} x_\psi^{n_2} \cdots z_\theta^{n_k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_\psi^{n_1} \cdots z_\theta^{n_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.8)$$

の第二成分および第三成分が $s^{\pm 1}$, $t^{\pm 1}$ の非自明な多項式でその係数は高々 $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$ の形であることが数学的帰納法で示せる。どうやるのがいいか一番よいかわからないが、たとえば z_θ を $2sz_\theta$ 、 x_ψ を $2tx_\psi$ で置き換えておいて、多項式の係数を mod 2 で考えればよい。すると、例えば

$$z_\theta^{n_1} x_\psi^{n_2} \cdots z_\theta^{n_k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.9)$$

が成り立つとすると第二成分 = 0 が必要。 s は超越数に取ったからそうなる t そして ψ は高々有限種類。これを F_2 の e 以外の各元に対して考えても、使えない ψ は高々加算個。というわけで ψ をそれ以外の値にとっておけば、 $F_2 \rightarrow \text{SO}(3)$ が単射になった。証明終わり。

さて、この $F_2 \hookrightarrow \text{SO}(3)$ は、バナッハ=タルスキのパラドックスの重要な一ステップである¹⁰:

事実 2.2.3 三次元空間の単位球面 $S_{R=1}^2$ は、うまく互いに重ならないように $A_{1,\dots,n}$, $B_{1,\dots,n}$ に分解して:

$$S_{R=1}^2 = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n \quad (2.2.10)$$

¹⁰ここで $X \sqcup Y$ は $X \cup Y$ なんだけれども X と Y の共通部分はないという記号。

回転行列 $g_{1,\dots,n}$ と $h_{1,\dots,n}$ をうまく選んで

$$S_{R=1}^2 = g_1 A_1 \sqcup \dots \sqcup g_n A_n, \quad (2.2.11)$$

$$S_{R=1}^2 = h_1 B_1 \sqcup \dots \sqcup h_n B_n \quad (2.2.12)$$

とできる。

一つの球面を $2n$ つに分解して、 n つのピースを回転させて組み合わせると球面が一つ、残りの n つのピースを回転させて組み合わせると球面がもう一つできるということ。

これを示そう¹¹。まず、 F_2 の元の左端が a^\pm, b^\pm のどれであるかで分割する：

$$F_2 = \{e\} \sqcup C(a) \sqcup C(a^{-1}) \sqcup C(b) \sqcup C(b^{-1}) \quad (2.2.13)$$

ただし $C(x)$ はシンボル列の左端が x であるような元。するとあきらかに

$$F_2 = a^{-1}C(a) \sqcup C(a^{-1}) = b^{-1}C(b) \sqcup C(b^{-1}) \quad (2.2.14)$$

である。これだと (2.2.13) で $\{e\}$ がすこし邪魔なので、

$$C'(b) := C(b) \cup \{e, b^{-1}, b^{-2}, \dots\}, \quad C'(b^{-1}) := C(b^{-1}) \setminus \{b^{-1}, b^{-2}, \dots\} \quad (2.2.15)$$

としておくと¹²、

$$\begin{aligned} F_2 &= C(a) \sqcup C(a^{-1}) \sqcup C'(b) \sqcup C'(b^{-1}), \\ F_2 &= a^{-1}C(a) \sqcup C(a^{-1}), \\ F_2 &= b^{-1}C'(b) \sqcup C'(b) \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

となる。これはもうほぼ欲しい構造なので、これを S^2 にうつす。

\mathbb{R}^3 に $\text{SO}(3)$ が作用しているので、これは S^2 にも作用する。 $F_2 \hookrightarrow \text{SO}(3)$ なので、 F_2 も S^2 に作用する。 F_2 の単位元でない元はそれぞれ S^2 の二点(すなわち回転軸と S^2 の交点)を固定する。これが少々悪さをするので、 F_2 の単位元でない元の回転軸の S^2 との交点の F_2 作用全体による像を D として、 $S^2 \setminus D$ を考える。

$(S^2 \setminus D)/F_2$ の各軌道からそれぞれひとつ代表元をとってきて、 $M \subset S^2 \setminus D$ とする。すると、 $F_2 M = S^2 \setminus D$ なので、これに (2.2.16) をつかうと、

$$\begin{aligned} S^2 \setminus D &= C(a)M \sqcup C(a^{-1})M \sqcup C'(b)M \sqcup C'(b^{-1})M, \\ S^2 \setminus D &= a^{-1}(C(a)M) \sqcup C(a^{-1})M, \\ S^2 \setminus D &= b^{-1}(C'(b)M) \sqcup C'(b)M \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

である。 a, b は z_θ, x_ψ だったことを思い出せば、これでもう $S^2 \setminus D$ は四つに分解して、二つずつ回転して組み換えれば $S^2 \setminus D$ が二つつくれることがわかった。

あとは D の部分をどうするかであるが、 D はたかだか可算集合だから、適当な軸周りの適当な無理数回転 w をとってくれば、 $n \neq 1$ ならば $w^n D$ は D と全く重ならないようにとれる。そこで、 $X = D \sqcup wD \sqcup w^2 D \sqcup \dots$ とすると

$$S^2 = X \sqcup (S^2 \setminus X) \quad (2.2.18)$$

だけれども、

$$S^2 \setminus D = wX \sqcup (S^2 \setminus X) \quad (2.2.19)$$

¹¹<https://www.math.hmc.edu/~su/papers.dir/banachtarski.pdf> を参考にした。

¹²ここで $X \setminus Y$ は X から Y を除いた集合

である。すなわち、 S^2 をふたつに分解して、片方を w で回転させて貼り合わせると、 $S^2 \setminus D$ にできる。

これで完成である。まず、 S^2 を二つに分解して、回転させて組み換えて、 $S^2 \setminus D$ にする。これを四つに分解して、回転して組み換えると、 $S^2 \setminus D$ がふたつできる。それぞれに対して、二つに分解して、片方を回転させて組み換えると、 S^2 がふたつできた。

2.3 結晶群の話

2.3.1 準備

すこし前の節で、正多面体の対称性の群について考えた。この節では結晶の対称性の群について考えよう。これまで回転群 $\mathrm{SO}(3)$ についてはしばしば触れたが、まずは反転も含んだ群 $\mathrm{O}(3)$ についても考えないといけない。

定義 2.3.1 直交群 $\mathrm{O}(N)$ および回転群 $\mathrm{SO}(N)$ を次のように定める:

$$\mathrm{O}(N) := \{M \mid M \text{ は } N \times N \text{ 行列, } M^T M = 1\}, \quad (2.3.1)$$

$$\mathrm{SO}(N) := \{M \mid M \text{ は } N \times N \text{ 行列, } M^T M = 1, \det M = 1\}. \quad (2.3.2)$$

日本の一部では行列 M の転置 (transpose) を ${}^t M$ と書く流儀がある気がするが、このノートでは M^T と書くことにする。

事実 2.3.2 次の列がある:

$$\mathrm{SO}(N) \hookrightarrow \mathrm{O}(N) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}_2. \quad (2.3.3)$$

さて、 $N = 3$ (および一般に N が奇数の場合) は $\mathrm{O}(N)$ の構造は簡単である。なぜなら、 N が奇数なら、

$$-1 \in \mathrm{O}(N), \quad -1 \notin \mathrm{SO}(N) \quad (2.3.4)$$

である。そこで、 N が奇数なら、勝手な $\mathrm{O}(N)$ の元は $\pm A$, $A \in \mathrm{SO}(N)$ と書ける。 -1 は勝手な回転と可換だから、すると $(-A)(-B) = AB$ 等が簡単に計算出来る。つぎの定義を準備すると:

定義 2.3.3 群 G, H に対して集合 $G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$ に

$$(g, h) \circ (g', h') := (gg', hh') \quad (2.3.5)$$

で群の構造をいれたものを G と H の直積 (direct product) という。

事実 2.3.4 N が奇数ならば $\mathrm{O}(N) = \mathrm{SO}(N) \times \mathbb{Z}_2$.

N が偶数でも通用する構成は以下の通り。ひとつ $R \in \mathrm{O}(N) \setminus \mathrm{SO}(N)$ で $R^2 = 1$ なるものをもって固定する、たとえば、 $R = \mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ とする。ここで diag は対角行列。すると、 $\{1, R\}$ は \mathbb{Z}_2 と同型な部分群になるが、この \mathbb{Z}_2 は共役によって $\mathrm{SO}(N)$ に作用する:

$$\mathrm{SO}(N) \ni A \mapsto \varphi_R(A) := RAR^{-1} \in \mathrm{SO}(N). \quad (2.3.6)$$

つぎの定義を準備すると:

定義 2.3.5 群 G, H が与えられ、 H が G に $g \mapsto \varphi_h(g)$ と自己同型で作用するとする。すると集合 $G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$ に

$$(g, h) \circ (g', h') := (g\varphi_h(g'), hh') \quad (2.3.7)$$

で群の構造をいれたものを G と H の半直積 (semidirect product) といい、 $G \rtimes H$ とかく。

$$G \hookrightarrow G \rtimes H \twoheadrightarrow H \quad (2.3.8)$$

である。

すると

事実 2.3.6 $O(N) = SO(N) \rtimes \mathbb{Z}_2$.

上の N が奇数のばあい、 R として -1 を取れるので、 $SO(N)$ への R の作用が自明になり、 \rtimes でなくて \times で良くなるのである。

記法で \rtimes なのか \times なのかは覚えがたいが、 \rtimes を手だと思って、作用しているほう H が手を構えて、作用されているほう G を回そうとしていると思うと僕は覚えられた¹³。

結晶をかنگえるには、回転だけでなく並進も考えないといけない。 \mathbb{R}^N の勝手な合同変換は

$$T_{A,b} : x \mapsto y = Ax + b, \quad A \in O(N), b \in \mathbb{R}^N \quad (2.3.9)$$

とあらわせる。 $b \mapsto T_{A,b}, T_{A,b} \mapsto A$ によって

$$\mathbb{R}^N \hookrightarrow \text{合同変換群} \twoheadrightarrow O(N) \quad (2.3.10)$$

が得られる。 $O(N)$ はもちろん \mathbb{R}^N に自然に作用するが、これにより

事実 2.3.7 合同変換群 $\simeq \mathbb{R}^N \rtimes O(N)$.

さて、 N 次元空間に結晶があたえられたとすると、それを保つ合同変換のなす群が結晶群 (crystallographic group, space group) である。特に、結晶の単位胞の N 個の辺が $v_1, v_2, \dots, v_N \in \mathbb{R}^N$ だとすると、整数 n_1, \dots, n_N に対して

$$n_1 v_1 + n_2 v_2 + \dots + n_N v_N \quad (2.3.11)$$

による並進は結晶を保つ。これらの単位胞にそった並進の群は \mathbb{Z}^N と同型である。また、結晶群に属する変換 $T_{A,b}$ の行列 A を集めてくると $O(N)$ の有限部分群 G をなす。これは、結晶群 \subset 合同変換群 $\twoheadrightarrow O(N)$ の行った先の像を集めたと言っても良い。 G は (2.3.11) の \mathbb{Z}^N に自然に作用する。以上の考察から次のことがわかった：

事実 2.3.8 勝手な N 次元の結晶群は、有限群 G が \mathbb{Z}^N に作用しているもとで、

$$\mathbb{Z}^N \hookrightarrow \text{結晶群} \twoheadrightarrow G \quad (2.3.12)$$

という構造を持つ。

¹³ H が G にカメハメ波を撃っているとは僕らはもともと誰だったか先輩に聞いた気がする。

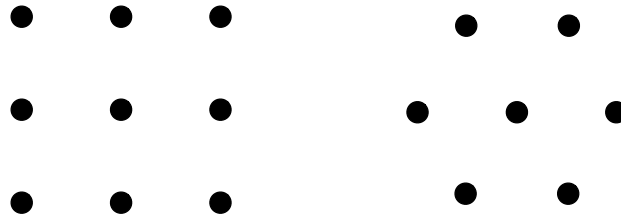


Figure 2.5: 左の格子には \mathbb{Z}_4 が作用する。右の格子には \mathbb{Z}_3 と \mathbb{Z}_6 が作用する。

幾つかコメントをすると:

- 勝手な群 K で、上記の構造 $\mathbb{Z}^N \hookrightarrow K \twoheadrightarrow G$ をもつと、 K は合同変換群の部分群として実現できる¹⁴。
- だから、上でやった半直積を使って、 $\mathbb{Z}^N \rtimes G$ を考えれば、結晶群の例であるが、これのみではない。

2.3.2 二次元

$O(2)$ の有限部分群 具体的に二次元の場合を考えよう。まず、 $O(2)$ にどのような有限部分群があるか考えないといけない。 $2\pi/n$ 回転が生成する \mathbb{Z}_n 部分群があるのは明らかである。次に、例 2.1.2、図 2.1 でみた二面体群 D_{2n} も $O(2)$ の部分群である。ただし、このとき図 2.1 に描かれた元 x は x を鏡映面とする鏡映と考える。

事実 2.3.9 $O(2)$ の部分群は上記の \mathbb{Z}_n と D_{2n} で尽きる。

ここで、 \mathbb{Z}_2 と D_2 は抽象的な群としては同型であるが、 $O(2)$ の部分群として共役ではない。($SO(3)$ の部分群としては共役である。)

$O(2)$ の有限部分群で格子に作用出来るもの つぎに、 \mathbb{R}^2 内の格子 \mathbb{Z}^2 にこれらの群がどう作用できるか考える。まず、次の事実がある:

事実 2.3.10 $O(2)$ の部分群 \mathbb{Z}_n で $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ に作用出来るものは $n = 1, 2, 3, 4, 6$ のみである。

証明の概要は、格子のなかで原点にもっとも近いベクトル v をとり、それを $2\pi/n$ 回転させたものを v' とする。 $v - v'$ も格子の中の点であるが、 $n > 6$ なら $|v - v'| < |v|$ であり、仮定に反する。 $n = 5$ のときはもうすこし工夫すればよい。

実際、勝手な \mathbb{Z}^2 には \mathbb{Z}_1 と \mathbb{Z}_2 が作用する。 $\mathbb{Z}_{3,4,6}$ に関しては図 2.5 を見よ。

D_{2n} には部分群 \mathbb{Z}_n があるので、これより、二次元の結晶群(壁紙群としても知られる)を (2.3.12) の形にかいたときに出てくる G は $\mathbb{Z}_{1,2,3,4,6}$ および $D_{2,4,6,8,12}$ に限られる。

¹⁴そのためには、 $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ として、勝手な内積をひとつ選び、 G で平均すればよい。あとでやるユニタリトリックの一例。

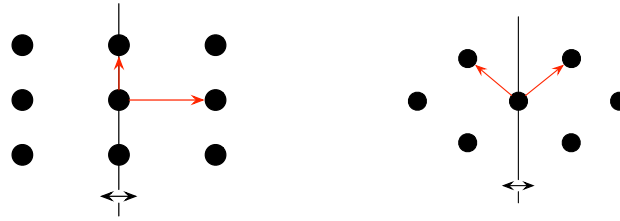


Figure 2.6: 左の D_2 作用は単位胞の一边を固定しもう一边を反転する。右の D_2 作用は単位胞の二辺を入れ替える。

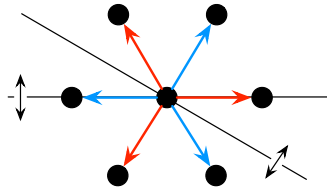


Figure 2.7: \mathbb{Z}_3 に追加して D_6 にするための反転面は $0^\circ \bmod 60^\circ$ か $30^\circ \bmod 60^\circ$ の二種類ある。前者は赤と青を保つが、後者は赤と青を入れ替える。

$O(2)$ の有限部分群で格子に作用出来るものの格子への作用 さて、 $\mathbb{Z}_{1,2,3,4,6}$ に関しては、 \mathbb{Z}^2 への作用の仕方は図 2.5 にかいたものしかない。

D_2 および D_4 の \mathbb{Z}^2 への作用は、反転がどう格子に作用するかで長方形型と菱形型の二種類がある、図 2.6 をみよ。両者を $D_{2,長}$ と $D_{2,菱}$ また $D_{4,長}$ と $D_{4,菱}$ で区別することにする。 D_8 の場合は正方形は長方形でも有り菱形でもあるからこの二つの区別は無い。

また、 D_6 には反転面のいれかたに二種類がある、図 2.7 を参照。格子の最短ベクトルは $\mathbb{Z}_3 \subset D_6$ のもとでは赤と青の二種類に分割されるが、反転のタイプとして、赤と青を入れ換えなければいゝと入れ替える場合がある。この二つを D_{6+} , D_{6-} と書いて区別しよう。 D_{12} の場合はどちらの反転面も自動的に含まれるので、種類はない。

以上から、 \mathbb{Z}^2 への有限群の作用のタイプは $\mathbb{Z}_{1,2,3,4,6}$, $D_{2,長}$, $D_{2,菱}$, $D_{4,長}$, $D_{4,菱}$, D_8 , D_{6+} , D_{6-} , D_{12} の 13 通りで尽きることが分かった。

二次元の結晶群の分類 これらのうちひとつを G として、結晶群は (2.3.12) という構造であたえられるわけだった。それぞれ、例としては、半直積 $\mathbb{Z}^2 \rtimes G$ をとることが出来る。これで 13 個の二次元の結晶群が得られた。しかし、(2.3.12) という構造であって半直積でないものもある。そういうものがいつあるか、いくつあるか、というのは群のコホモロジーという手法を使って調べられる。これはあとで射影表現をやるときに触れるが、ここでは結果だけ述べる¹⁵と、半直積で「ない」ケースは $D_{2,長}$ でひとつ、 $D_{4,長}$ でふたつ、 D_8 でひとつある。

具体的にこれらがどのような作用であるか見よう¹⁶。

¹⁵計算の詳細は例えば P. Morandi, “The Classification of Wallpaper Patterns: From Group Cohomology to Escher’s Tessellations”, <http://sierra.nmsu.edu/morandi/notes/mathematicalnotes.html> の Sec. 4 を見よ。彼のそのページにはいろいろ勉強になる記事がある。

¹⁶図 2.8 は数学書房「この定理が美しい」の伊藤由佳里先生の記事「対称性の美、結晶群の分類」から拝借

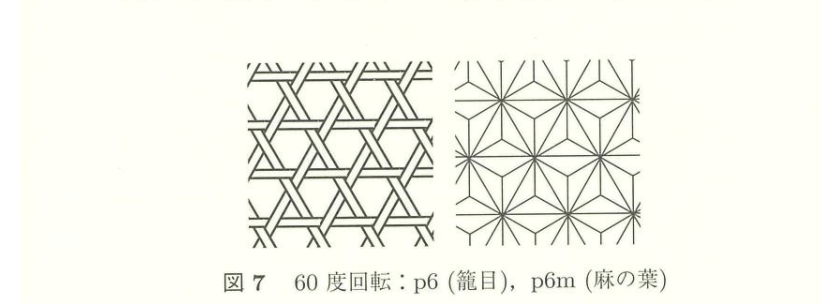
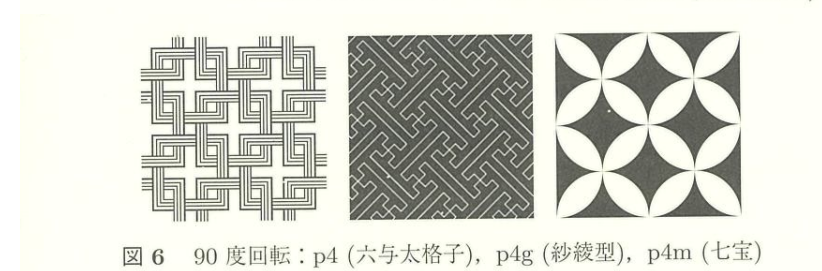
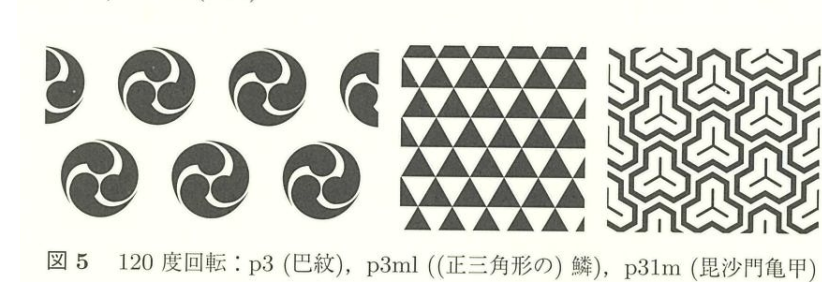
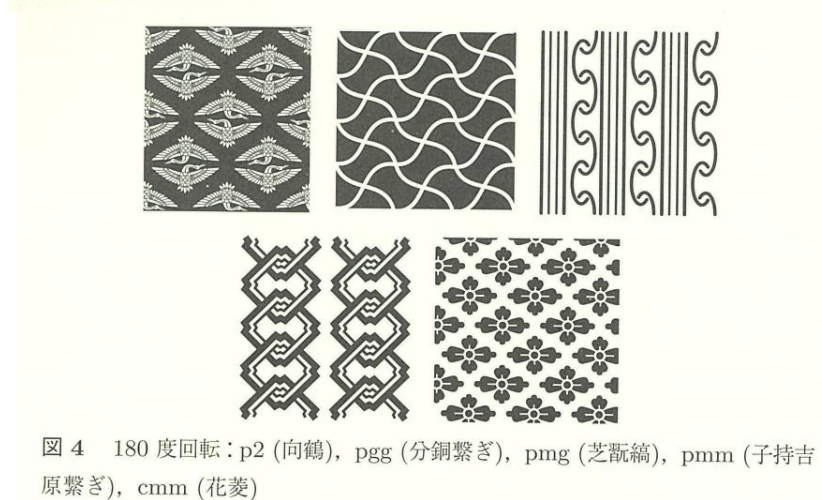
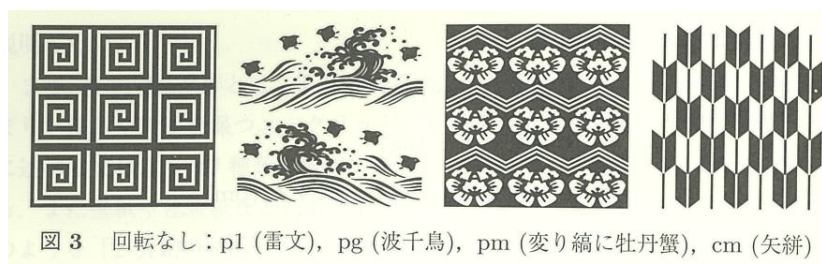


Figure 2.8: 17種の二次元結晶群=壁紙群とその例。

まず、 $G = \mathbb{Z}_{1,2,3,4,6}$ であるものは自動的に半直積で、結晶学ではそれぞれ p1, p2, p3, p4, p6 と呼ばれる。

次に $G = D_{2,菱}$ は自動的に半直積で、cm とよぶ。m は mirror の略。

次に、 $G = D_{2,長}$ で半直積であるものが pm, 半直積でないものが pg である。g は glide reflection の略。単位胞が $a \times b$ の長方形だとすると、pm は

$$(x, y) \mapsto (x + a, y), \quad (x, y) \mapsto (x, y + b), \quad (x, y) \mapsto (-x, y) \quad (2.3.13)$$

で生成され、pg は

$$(x, y) \mapsto (x + a, y), \quad (x, y) \mapsto (x, y + b), \quad (x, y) \mapsto (-x, y + b/2) \quad (2.3.14)$$

で生成される。このおしまいの $(x, y) \mapsto (-x, y + b/2)$ は、 y に $b/2$ だけ滑らして (glide) x を反転 (reflection) するので glide reflection とよぶ。

次に $G = D_{4,菱}$ は自動的に半直積で、cmm とよぶ。m がふたつなのは、鏡映面がふたつあるから。

次に $G = D_{4,長}$ の場合は半直積のものが pmm、くわえて pmg と pgg がある。pmm は

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (x + a, y), & (x, y) &\mapsto (x, y + b), \\ (x, y) &\mapsto (-x, y), & (x, y) &\mapsto (x, -y), \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

で生成され、pmg は

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (x + a, y), & (x, y) &\mapsto (x, y + b), \\ (x, y) &\mapsto (-x, y + b/2), & (x, y) &\mapsto (-x, -y), \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

で生成され、pgg は

$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (x + a, y), & (x, y) &\mapsto (x, y + b), \\ (x, y) &\mapsto (-x + a/2, y + b/2), & (x, y) &\mapsto (-x, -y) \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

で生成される。

次に $G = D_{6+}$ と $G = D_{6-}$ は自動的に半直積で、p31m と p3m1 とよばれる。

次に $G = D_8$ は半直積が p4m、半直積でないものが p4g である。単位胞は $a \times a$ の正方形で、p4g は $(x, y) \mapsto (-x + a/2, y + a/2)$ という glide reflection を含む。

おしまいに、 $G = D_{12}$ は自動的に半直積で、p6m である。

二次元の結晶群が17種であるという議論は、ここでは群論をもちいたが、 \mathbb{R}^2 /結晶群のトポロジーを考察することで行う方法もある¹⁷。

2.3.3 一般次元

さて、以上、二次元の結晶群を「分類した」が、どのときに二つの結晶群を「同じ」と思って分類したかが問題である。 \mathbb{R}^2 において、縦1横2の長方形を敷き詰めた模様と、縦2横3の長方形を敷き詰めた模様の二つの模様の保つ合同変換の部分群は同じといえは同じである(群は同型である)が異なるといえは異なる(単位胞の大きさが異なる)。もっとい

した。著者曰く、ひとつわざと対称性がまちがっている例があるので、きちんと確認すること!

¹⁷たとえば、河野俊丈「結晶群」(共立講座数学探検7)を参照。

ろいろ微妙なニュアンスのもとでの「同じさ」があって結晶学ではいろいろ用語があるが、通常、「結晶群を分類する」という場合の「同じ」は、

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}^N & \hookrightarrow & \text{群} & \twoheadrightarrow & G \\ \wr & & \wr & & \wr \\ \mathbb{Z}^N & \hookrightarrow & \text{群}' & \twoheadrightarrow & G' \end{array} \quad (2.3.18)$$

という同型で、さらに、 \mathbb{Z}^N の単位胞の向きを保つようなものがあるとき「同じ」という、とする¹⁸。この意味では同じでない二つの結晶群が、単位胞の向きを保たないが (2.3.18) は満たすような同型がある場合は、互いに enantiomorphic だという¹⁹。

以下、各次元での結晶群について、ざっとみていこう。²⁰

一次元 では \mathbb{Z} と $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ の二種類。

二次元 では前節で見たように結晶群は 17 種類。(Enantiomorphic pair はない。) これは世界のいろいろな文化で大昔から具体的に模様が描かれて暗黙裏に知られていた。アルハンブラのタイルに全種類あるとかないとか論争がある²¹。日本の伝統的な模様には前節で見たように全種類確認できる。

三次元 では結晶群は 230 種類、そのうち enantiomorphic pair が 11 個。(よって、向きを無視すれば 219 種類。) これは 19 世紀おわりのイギリスの Barlow、ロシアの Fedorov、ドイツの Schönflies の独立な結果²²。

四次元 さて、1900 年の世界数学会議で Hilbert は有名な 23 の問題を発表したけど、その第18番は三つにわかれていて、はじめが勝手な N 次元での結晶群は有限種類しかないか? というもので、ふたつめが、**anisohedral tiling** はあるか、というもので、みつめが、三次元での最密充填はなにか、というもの。

ここで関係があるのは、ひとつめである²³。1910年には Bieberbach が有限種類しかないことを示したが、1948 年に Zassenhaus はその証明をすこし考えれば実際に列挙するアルゴリズムが書けることを示した。1978 年になって、Zassenhaus は共著者と四次元の

¹⁸多分これでよいと思うがちょっと自信がない。このあたりの記述は **Hiller, “Crystallography and cohomology of groups”, American Mathematical Monthly, 93 (1986) 765** を参照した。

¹⁹enantios = 反対、morph = 形。

²⁰以下、Wikipedia の **Space group** の項目 を大いに参考にした。

²¹**B. Grünbaum, “What Symmetry Groups Are Present in the Alhambra?”, Notices of the AMS, 53 (2006) 670** には、すり減ってもはや確認出来ないものを除くと 17 種類ないのではとあるが、その後ちゃんと探せばあるとかいろいろ反論があるようだ、e.g. **Blanco and Harris, “Symmetry Groups in the Alhambra”, Visual Mathematics 13 (2011) 1**

²²それぞれ 1894, 1891, 1891 に発表。最近では arXiv があるので三年後に独立な結果を発表するというのはあり得ない。世知辛い話だ。

²³しかし三つ目はあまりに劇的なので雑学として書いておきたい。これは所謂 **ケプラー予想** というもので、通常の立方最密充填もしくは六方最密充填がほんとうに最密であることを示せ、という問題である。これは整数論もやる T. Hales が 1998 年にコンピュータを一部援用した長い長い証明を Annals of Math. に投稿したのだが、結局四年後に査読者は正しいと結論できないまま出版された。これに憤慨した Hales は、2003 年にコンピュータによる証明の自動検証の分野に乗り込んで、十年間かけて実際に証明の検証をおこなった。その結果が **arXiv:1501.02155** および **Flyspeck project** である。

場合にこの計算を完遂して本として出版²⁴。2002 年の誤植訂正²⁵を考慮すると、結局四次元では 4894 種類ある、うち enantiomorphic pair は 111 対。

五次元 では Plesken-Schultz²⁶が 2000 年に up to enantiomorph で調べて、Souvignier²⁷が 2003 年に enantiomorph を決定した。それによると、222097 個の結晶群があり、そのうち 79 対の enantiomorphic pair がある。

六次元 は up to enantiomorph なら上記 Plesken-Schultz がやっているが後に訂正が出ている。それ以上は現時点では未知だそうである。

2.3.4 三次元

物理で実際に重要である三次元の結晶群についてもうすこしだけ雑多な事実を記録しておく。

まず、三次元の結晶群は単に空間群 (space group) ともよぶ。さて、三次元の結晶群についてはとても重要だから、いろいろ文献があり、ネット上にもその話題だけで半年分ぐらいあるよい講義が沢山上がっている²⁸。

また、230個という分類は、あくまで数学的に可能な対称性の種類であって、実際にそういう結晶があるかは別問題である。どの空間群がどの頻度で出るかという研究もある²⁹。ほとんど実例が知られていない空間群もいくつかあるが、現在では一応全種類知られていることになっているようだ³⁰。

また、上記脚注 29 の論文に [42] として引用されている 1922 年のソ連の論文によると、結晶群の数学の不思議な応用として、二元素化合物 X_nY_m が普通に結晶を組むとすると、許される $n:m$ に制限があるそうである。たとえば 2:5 は絶対に許されず、二酸化五燐 P_2O_5 は安直な結晶ではない。後に、 P_4O_{10} の分子のなす結晶であるか、もしくはポリマーであることが確認された。

さて、具体的に水晶 (quartz)、化学式 SiO_2 を考える。結晶には鏡像でうつりあう二種類があって、それぞれ enantiomorphic pair をなす空間群 $P3_121$ と $P3_221$ に属する。このように、鏡像が異なるものを chiral³¹ であるという。物理法則は (β 崩壊を導く弱い力を除いて) 鏡像のもとで対称だから、右巻き水晶と左巻き水晶のどちらかのほうがより安定で

²⁴Brown, Bülow, Neubüser, Wondratschek, Zassenhaus, “Crystallographic groups of four-dimensional space”, Wiley and Sons, 1978. この結果のアナウンスを聞いた日本の研究者のコメントが結晶学会誌で読めて、なかなか感慨深い。

²⁵Neubüser, Souvignier, Wondratschek, “Corrections to *Crystallographic Groups of Four-Dimensional Space*”, Acta Crystallographica A, 58 (2002) 301.

²⁶Plesken, Schultz, “Counting crystallographic groups in low dimensions”, Experimental Mathematics, 9 (2000) 407

²⁷Souvignier, “Enantiomorphism of crystallographic groups in higher dimensions with results in dimensions up to 6”, Acta Crystallographica A, 59(2003) 210

²⁸神戸大の瀬戸さんによるものが http://pms1.planet.sci.kobe-u.ac.jp/~seto/?page_id=379、Hamburg 大の Hoffmann さんによるものが <https://crystalsymmetry.wordpress.com/> にあり、こちらは Youtube に動画もあがっている。

²⁹Urusov, Nadezhina, “Frequency distribution and selection of space groups in inorganic crystal chemistry”, Journal of Structural Chemistry, 50 (2009)22.

³⁰上記 Hoffmann さんの記事 <https://crystalsymmetry.wordpress.com/230-2/> がある。群ひとつあたり一頁の形式で読みたかったので、pdf 化して僕のページにもおいてある。それを読むと、既存の文献にある結晶構造を網羅したデータベースがあるが、そもそも文献に記載されている結晶群が間違っていることもしばしばあるようで、そういう間違いを除くと、レアな結晶群はますます結晶群になるようだ。

³¹日本では物理屋はカイラルと呼ぶが化学の文献ではキラルと書いてあることが多い。



Figure 2.9: 壁紙群 p2 をもつ鏡像格子。

あるというのは考えがたい³²。実際、地球上の右巻き水晶と左巻き水晶の分布を丁寧にしらべた文献がいろいろあって、統計誤差の枠内で半々らしい。

細かい水晶はいくらでも地球上にあるが、右巻き水晶と左巻き水晶の表面での化学反応は分子構造が右巻きか左巻きかによって異なる。良く知られているように生体分子は鏡像異性体のうち片方のみをつかっているが、その原因として、たまたま生命がはじまった所にあった水晶(や他の鉱物)の巻き方が影響したのではないか、という論文がいくらでもある³³。

Chiral な結晶に関する注意点がある。水晶のように結晶群自体が鏡像で変化する(すなわち enantiomorphic な)場合は当然結晶は chiral である。しかし、結晶群自体は鏡像で変化しなくても chiral な結晶はいくらでもある。簡単な例として二次元の p2 を考える。図 2.9 に描いた鏡像の格子は双方とも p2 を対称性にもつ。結晶が chiralなのは、結晶の属する結晶群が enantiomorphic pair に属するかどうかではなく、結晶群を $\mathbb{Z}^N \hookrightarrow \text{結晶群} \rightarrow G$ と書いた時の G が $\text{SO}(N)$ に入る時である。そのような結晶群は Sohncke 群と呼ばれる。この事実は結晶学屋には良く知られているが、鏡像異性体を研究する化学屋にはあまり知られていなかったらしく、それを指摘しただけの論文も出版されている³⁴。

おしまい、数学的な話に戻ると、230個ある証明は19世紀おわりのものは上で二次元のときにやったような群論的考察に基づくものだった。2001年になって、 $\mathbb{R}^3/\text{結晶群}$ のトポロジーを考察するという幾何学的方法を用いた証明が出ている³⁵。

2.3.5 準結晶

どんどん本題と離れるが、ほとんど周期的だが微妙に非周期的な敷き詰めというものも存在し、準結晶とよばれる。二次元で有名なのは図 2.10 の Penrose tiling である³⁶。これは二種類のタイルのみをつかって平面をしきつめているが、微妙に周期的でない。

\mathbb{Z}_5 対称性があるが、これは上に事実 2.3.10 で見たように結晶群では不可能である。Penrose が提案したのは 1970 年代だが³⁷、準周期タイルングは中世イスラムで知られて

³²といっても、何十億年も地球の歴史はあるので、弱い力から来る非常に微妙なエネルギー差が影響してなにかがおきないかというのはすぐには僕にはわからない。論文もいろいろある。

³³しかし、こういうのは自発的対称性の破れだから、破れの原因をとにかくいうのはあまり有意義でない気がする。東京ではエスカレータの右をあけておくが大阪ではエスカレータの左をあけておく。その原因を他のものの chirality にもとめても仕方がない気がする。

³⁴Dryzun, Avnir “On the abundance of chiral crystals”, Chem. Comm. 48 (2012) 5874。イギリス王立化学会報にも紹介されている <https://www.chemistryworld.com/news/chiral-confusion/4980.article> とところを見ると、よくある混乱なのだろう。

³⁵Conway, Delgado-Friedrichs, Huson, Thurston, “On Three-Dimensional Space Groups”, Beiträge zur Algebra und Geometrie, 42 (2001) 475.

³⁶TeX.SE から拝借した: <https://tex.stackexchange.com/questions/61437/penrose-tiling-in-tikz>

³⁷Penrose, “Pentaplexity: A Class of Non-Periodic Tilings of the Plane”, Math. Intelligencer, 2 (1979) 32.

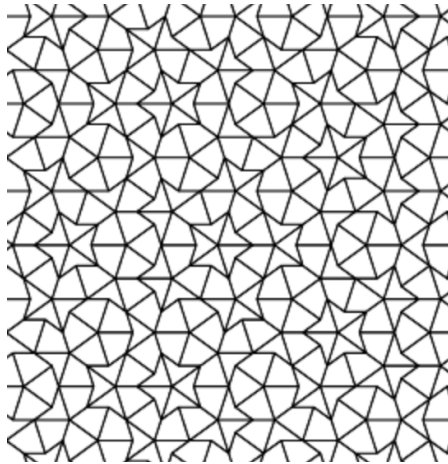


Figure 2.10: Penrose tiling

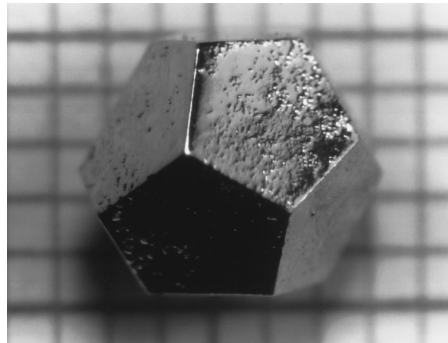


Figure 2.11: 準結晶の実例。文献は脚注 39 を見よ。

いたという話もある³⁸。また、のちに実際に自然界に「結晶」として存在することも知られている、図 2.11 を見よ³⁹。

というわけで、「結晶」の数学として結晶群だけ考えていけばよいわけではない。

2.4 $SO(3)$ と $SU(2)$; そのヴァリエーション

2.4.1 $SO(3)$ と $SU(2)$ 、その1

三次元空間の回転群 $SO(3)$ については既にいろいろなことを考えてきたが、次に $SU(2)$ との関係をみよう。

³⁸Lu and Steinhardt, “Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture”, *Science* 315 (2007) 1106

³⁹I. R. Fisher, K. O. Cheon, A. F. Panchula, P. C. Canfield, M. Chernikov, H. R. Ott, K. Dennis, “Magnetic and transport properties of single-grain R-Mg-Zn icosahedral quasicrystals” *Phys. Rev. B* 59, 308 より拝借。

定義 2.4.1 ユニタリ群 (unitary group) $U(N)$, 特殊ユニタリ群 (special unitary group) $SU(N)$ を以下のように定める:

$$U(N) := \{M \mid M \text{ は複素 } N \times N \text{ 行列, } M^\dagger M = 1\}, \quad (2.4.1)$$

$$SU(N) := \{M \mid M \text{ は複素 } N \times N \text{ 行列, } M^\dagger M = 1, \det M = 1\}. \quad (2.4.2)$$

特にこの節では $SU(2)$ について考える。勝手な $SU(2)$ の元は

$$\begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}, \quad |z|^2 + |w|^2 = 1 \quad (2.4.3)$$

と書ける。これは複素数ふたつ (z, w) を実数四つだとおもうと、そこにひとつ式を課しているの、三つパラメタがある。だから \mathbb{R}^4 内の単位球面だと思える。一般に \mathbb{R}^N 内の単位球面を S^{N-1} と書くことにする。

事実 2.4.2 多様体として $SU(2) \simeq S^3$ である。

さて、トレースレス (トレースがゼロ) な 2×2 エルミート行列 h はパウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4.4)$$

と実数 X, Y, Z を用いて

$$h = X\sigma_x + Y\sigma_y + Z\sigma_z \quad (2.4.5)$$

と書ける。また、

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = -\det h \quad (2.4.6)$$

である。(トレースレスなら自動的に $-\det h = \text{tr } h^2/2$ なので、 $\text{tr } h^2/2$ と書いたほうが内積らしさが出るかも知れない。) そこで、長さの構造を含めて、

$$\mathbb{R}^3 \simeq \{2 \times 2 \text{ のトレースレスなエルミート行列}\} \quad (2.4.7)$$

と思おう。 $U \in SU(2)$ に対し

$$h \mapsto h' := UhU^{-1} \quad (2.4.8)$$

を考えると、明らかに h' はトレースレス、エルミートでかつ $\det h = \det h'$ であるから、 $h \mapsto h'$ は三次元の等長変換である。これより、

$$SU(2) \rightarrow O(3) \quad (2.4.9)$$

という準同型が出来た。良く考えると、像は $SO(3)$ に含まれることがわかる。核は $\{\pm 1\} \subset SU(2)$ である。 -1 が核に入ることは $X \mapsto Y := (-1)X(-1) = X$ からすぐわかる。これ以外に無いことも考えればわかる。これより、次のことがわかった:

事実 2.4.3 $\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow SU(2) \twoheadrightarrow SO(3)$ となっている。特に、 $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2$ 。

これより、

事実 2.4.4 多様体として、 $SO(3) \simeq S^3/\mathbb{Z}_2$ 。ただし、 \mathbb{Z}_2 は $S^3 \ni (z, w) \mapsto (-z, -w) \in S^3$ と作用する。

S^3 内のループはすべてほどける。一方で、 S^3/\mathbb{Z}_2 のループには、一回まいているとほどけないが、二回まくとほどけるようなものがある。これを、 $\pi_1(S^3)$ は自明だが、 $\pi_1(S^3/\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ だ、と書く。

具体的には、

$$U_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \quad (2.4.10)$$

を考える。これに対して $U_\theta(X\sigma_x + Y\sigma_y + Z\sigma_z)U_\theta^{-1}$ を具体的に計算すると、これは z 軸まわりの θ 回転に対応する。よって、 θ を連続的に 0 から大きくすると、 $\theta = 2\pi$ で $SO(3)$ の中では単位元になるが、その段階では $SU(2)$ の中では $U_{2\pi} = -1$ であって、まだ単位元でない。この θ を 0 から 2π まで変えることに相当するループを $SO(3) = S^3/\mathbb{Z}_2$ で考えるとほどけない。これは講義のときに変な踊りをして実演する予定⁴⁰。

$SO(3)$ は回転だから、三次元空間 \mathbb{R}^3 の中の単位球面 S^2 に自然に作用する。すると、 $SU(2)$ も、 $SU(2) \twoheadrightarrow SO(3)$ で $SO(3)$ にいってから S^2 に作用する。これを直接 $SU(2)$ の言葉で書こう。そのためには多少準備が必要である。

2.4.2 複素射影平面 \mathbb{CP}^1

唐突だが、次を考える：

定義 2.4.5 複素一次元射影空間を

$$\mathbb{CP}^1 := \{[u : v] \mid (u, v) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\} \quad (2.4.11)$$

で定める。

ここで、 $[u : v]$ は u と v の比ということで、式でかけば $c \neq 0$ に対して $(u, v) \sim (cu, cv)$ という同値関係を入れるということ。

さて、 $v \neq 0$ ならば、 $(u, v) \sim (u/v, 1)$ だから、 $w := u/v$ という複素数は \mathbb{CP}^1 の点を定める。 $v = 0$ のときは、勝手な u, u' に対して $(u, 0) \sim (u', 0)$ である。これを $w = u/0 = \infty$ と書くことにすると、

事実 2.4.6 $\mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$

と思ってよい。

さて、実は \mathbb{CP}^1 は \mathbb{R}^3 の単位球面 S^2 と自然に同一視できる。まず、 $(u, v) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ に対し、 $(u, v) \simeq (cu, cv)$ なのだから、 c としてまずは実数をとって、長さを 1、すなわち

$$|u|^2 + |v|^2 = 1 \quad (2.4.12)$$

としてもよい。(二状態量子系があるとして、確率を規格化したと思えばよい。)

そのような長さ 1 の (u, v) と (u', v') が \simeq だとすると、 $|c|^2 = 1$ である。すなわち、絶対値 1 の位相がかかったものはまだ同一視しないといけない。(これも二状態量子系で知っていること。)

⁴⁰剣玉では「飛竜のぼりけん」という大層な名前がついている。例えば <http://www.k5.dion.ne.jp/~hampen/k-waza/hiryuunoboriken.html> 参照。

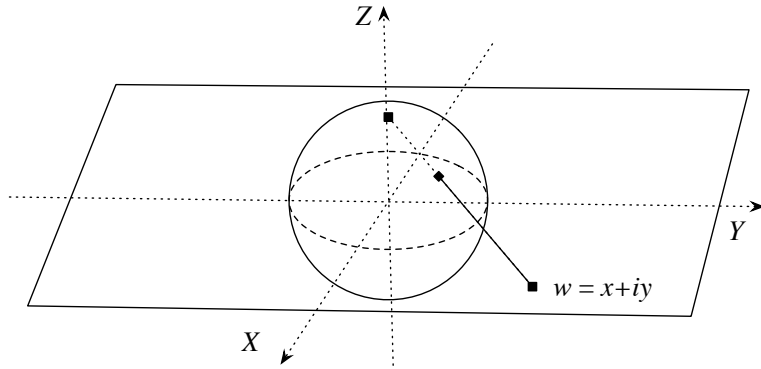


Figure 2.12: 球面の平面への投影。

このため、

$$X = (\bar{u}, \bar{v})\sigma_x \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad Y = (\bar{u}, \bar{v})\sigma_y \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad Z = (\bar{u}, \bar{v})\sigma_z \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.4.13)$$

を考えると、これは位相倍だけ異なる (u, v) と (u', v') に対して同じ $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ を与える。(二状態量子系としては、 $\sigma_{x,y,z}$ の期待値を取っている。) $|u|^2 + |v|^2 = 1$ から $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ が従う。これによって、具体的に $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ なる写像が作れた。(二状態量子系としては、この構成は Bloch 球として知られる。)

事実 2.4.6 では、 \mathbb{CP}^1 の点を複素数(もしくは無限大) $w \in \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ でラベル付けたが、これで具体的に (2.4.13) を考えると、まず $[w : 1]$ を長さ 1 にすると $(u, v) = (w, 1)/\sqrt{|w|^2 + 1}$ と取るので

事実 2.4.7 \mathbb{CP}^1 から S^2 への写像が

$$\mathbb{CP}^1 \ni w \mapsto (X, Y, Z) := \left(\frac{w + \bar{w}}{|w|^2 + 1}, \frac{iw - i\bar{w}}{|w|^2 + 1}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right) \in \mathbb{R}^3 \quad (2.4.14)$$

で与えられる。

この写像は、 $w = x + iy$ から (X, Y, Z) への写像だとおもうと、ちょうど球面の北極からの赤道を通る平面への投影(の逆)になっていることが具体的に計算すればわかる、図 2.12 をみよ。

2.4.3 $\text{SO}(3)$ と $\text{SU}(2)$ 、その2

さて、以上準備したことをつかって、 $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ が S^2 にどう作用するかを直接 $\text{SU}(2)$ の立場でみよう。

まず、 $\text{SU}(2)$ は自然に \mathbb{CP}^1 に作用する:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.4.15)$$

に対して、

$$\mathbb{CP}^1 \ni [u : v] \mapsto [u' : v'] \in \mathbb{CP}^1 \quad (2.4.16)$$

とする。(これが矛盾無く定義できるのは単に U が線形写像だということ。)

具体的に $w \in \mathbb{CP}^1$ でかけば、

$$Uw = \frac{aw + b}{cw + d} \quad \text{但し } U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (2.4.17)$$

これを、一次分数変換 (fractional linear transformation) という。

さて、 $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ だったから、 $SU(2)$ は自然に S^2 にも作用する。あとはこれが $SU(2) \rightarrow SO(3)$ で $SO(3)$ に行った後に S^2 に三次元の回転として作用するのと同じであることを確認すればよい。そのために、(2.4.13) でやった $(u, v) \mapsto (X, Y, Z)$ が、

$$h := X\sigma_x + Y\sigma_y + Z\sigma_z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (\bar{u}, \bar{v}) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.4.18)$$

とも書けることに注意する。そもそも、 $U \in SU(2)$ に対しその $SO(3)$ の像は $h = X\sigma_x + Y\sigma_y + Z\sigma_z$ に対し $h' := UhU^{-1}$ で定義されていた。一方で、右辺をみれば、(2.4.18) への UhU^{-1} の作用はまさに (2.4.15) から従う。これが確認したいことだった。

2.4.4 $SO(3, 1)$ と $SL(2, \mathbb{C})$

前節とほぼ同じ議論で、ローレンツ群 $SO(3, 1)$ と $SL(2, \mathbb{C})$ を関係付けられる。まずそもそもこれらの群を定義しよう：

定義 2.4.8 \mathbb{R}^{m+n} に「長さの二乗」を

$$|\vec{x}|^2 := x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 - x_{m+1}^2 - x_{m+2}^2 - \cdots - x_{m+n}^2 \quad (2.4.19)$$

と定めたものを $\mathbb{R}^{m,n}$ と書き、次のように定義する：

$$O(m, n) := \{\mathbb{R}^{m,n} \text{ 上の線形変換で、長さを保つもの}\}, \quad (2.4.20)$$

$$SO(m, n) := \{\mathbb{R}^{m,n} \text{ 上の線形変換で、長さを保ち、行列式が } 1 \text{ のもの}\}. \quad (2.4.21)$$

$m = 3, n = 1$ と取ると保つ長さの二乗は $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ であるから、普通のローレンツ群である。(このノートでは、面倒くさいので光速は無次元の 1 とする。)

次に

定義 2.4.9 値を \mathbb{X} にとる一般線形(general linear)群 $GL(N, \mathbb{X})$ と特殊線形(special linear)群 $SL(N, \mathbb{X})$ を次のように定める：

$$GL(N, \mathbb{X}) := \{M \mid M \text{ は要素が } \mathbb{X} \text{ の } N \times N \text{ 行列、} \det M \neq 0\}, \quad (2.4.22)$$

$$SL(N, \mathbb{X}) := \{M \mid M \text{ は要素が } \mathbb{X} \text{ の } N \times N \text{ 行列、} \det M = 1\}. \quad (2.4.23)$$

ここで $\mathbb{X} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ などとする。一般に可換環ならよい。

さて、 2×2 の勝手なエルミート行列は

$$h = T + X\sigma_x + Y\sigma_y + Z\sigma_z \quad (2.4.24)$$

と書ける。(上の (2.4.5) と異なって、トレースレスを要求しない。) このとき、

$$-\det h = X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2 \quad (2.4.25)$$

となるので、

$$\{2 \times 2 \text{ のエルミート行列} \} \simeq \mathbb{R}^{3,1} \quad (2.4.26)$$

と思える。さて、 $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に対し

$$h \mapsto h' := MhM^{-1} \quad (2.4.27)$$

を考えると、これは当然 $\det h = \det h'$ を満たす。これから

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{O}(3, 1) \quad (2.4.28)$$

なる準同型が出来た。像は、良く考えると $\mathrm{SO}(3, 1)$ に入っていて、さらに良く考えると $\mathrm{SO}(3, 1)_+$ であることがわかる。ここで、 $\mathrm{SO}(3, 1)$ の元は時間をひっくり返さないもの (典型的な元は $+1$) と時間をひっくり返すもの (典型的な元は -1) にわかれて、両者は連続的につながっていないので、時間をひっくり返さないものの全体のなす部分群を $\mathrm{SO}(3, 1)_+$ と書いた。また、 $M = \pm 1$ は当然 $\mathrm{SO}(3, 1)_+$ の単位元にうつり、核はこれのみであることもわかる。結局、次のことが分かった:

事実 2.4.10 次の列がある:

$$\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SO}(3, 1)_+. \quad (2.4.29)$$

さて、 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ も自然に \mathbb{CP}^1 に作用する、実際 (2.4.15), (2.4.16), (2.4.17) は $U \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ であってもまったく問題ない。また、 $(u, v) \simeq (-u, -v)$ だから、 $-1 \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ は \mathbb{CP}^1 に自明に作用する。これより、 $\mathrm{SO}(3, 1)_+$ も自然に $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$ に作用するはずである。ローレンツ群が球面に作用するというのはどういうことだろうか? この作用は、ローレンツ群の天球への作用と同定できることを以下で見よう。

$\mathbb{R}^{3,1}$ の原点に観測者がいるとする。光が (x, y, z, t) から原点に来るとすると、 $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$ である。天球上の点としては、どの方向から来たかだけが問題なので、 $(x, y, z, t) \simeq a(x, y, z, t)$ という同一視をする必要がある。また、 $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ は向きが定まらないので、除く必要がある。これを (2.4.24) でエルミート行列と思うと、天球とは「 $h \neq 0$ であり、 $\det h = 0$ であるような 2×2 エルミート行列で、さらに実数 a に対して $h \sim ah$ という同値関係をいれたもの」と思える。さて、 $\det h = 0$ なので、 h の二つの行は比例する。さらに、エルミートなので、

$$h = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (\bar{u}, \bar{v}) \quad (2.4.30)$$

とかならず書ける。これより、天球とは「 $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ で、 $(u, v) \neq 0$ であるようなものに、複素数 c に対して $(u, v) \simeq c(u, v)$ という同値関係をいれたもの」と思えるが、これはまさに定義 2.4.5 の \mathbb{CP}^1 の定義そのものである。

また、 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の (2.4.16) で定めた \mathbb{CP}^1 への作用と、(2.4.27) で定めた $\mathbb{R}^{3,1}$ への作用が、(2.4.30) のもとで整合していることもすぐ確認できる。まとめると:

事実 2.4.11 $\mathrm{SO}(3, 1)_+$ の天球 S^2 への作用は、 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の \mathbb{CP}^1 への一次分数変換の作用と等価である。

2.4.5 $\mathrm{SO}(2, 1)$ と $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$

ほとんど同じ考察で、 $\mathrm{SO}(2, 1)$ と $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ の間にも関係がつく。実際、勝手な 2×2 実対称行列 h は

$$h = T + X\sigma_x + Z\sigma_z \quad (2.4.31)$$

と書け、

$$-\det h = X^2 + Z^2 - T^2 \quad (2.4.32)$$

である。よって、 $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ に対して

$$h \mapsto MhM^{-1} \quad (2.4.33)$$

を考えれば $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{O}(2, 1)$ という準同型がある。像と核を良く考えれば、

事実 2.4.12 次の列がある:

$$\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(2, 1)_+. \quad (2.4.34)$$

さて、 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ は \mathbb{R}^2 に作用するが、 \mathbb{C}^2 にも作用する。だから、(2.4.15), (2.4.16), (2.4.17) の要領で、 \mathbb{CP}^1 にも作用する。具体的に $w \in \mathbb{CP}^1$ への作用を考えると、実軸を実軸にうつす。球面としては赤道を赤道にうつすことがわかる。だから、北半球を北半球にうつし、南半球を南半球にうつすこともわかる。

これは $\mathrm{SO}(2, 1)_+ \subset \mathrm{SO}(3, 1)_+$ は (2.4.32) からわかるように Y 軸をさわらない $\mathbb{R}^{3,1}$ のローレンツ群の元だと思えるので、天球への作用を考えれば天球の $Y > 0$ 部分と天球の $Y < 0$ 部分をそれぞれ保つということである。

2.5 一次分数変換と二次元の格子の分類

前節で出て来た一次分数変換 (2.4.17) を用いて二次元の格子を結晶群の立場より細かく分類することができる。この節では、平面 \mathbb{R}^2 に埋め込まれた格子

$$\{n_1\vec{v}_1 + n_2\vec{w}_2 \mid n_{1,2} \in \mathbb{Z}, \vec{v}_{1,2} \in \mathbb{R}^2\} \quad (2.5.1)$$

がいつ向きを保つ相似変換で等価か、ということを考えよう。 $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ だと思えば、向きを保つ相似変換はちょうどゼロでない複素数でかけ算することに相当する。そこで、

$$\{n_1z_1 + n_2z_2 \mid n_{1,2} \in \mathbb{Z}, z_{1,2} \in \mathbb{C}\} \quad (2.5.2)$$

を考える。全体を z_2 で割れば、これは

$$\{nz + m \mid n, m \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C}\} \quad (2.5.3)$$

という格子と相似である。また、 z を $-z$ ととりかえれば、 $\mathrm{Im} z > 0$ に限って良い。そこで、格子の形を $z \in \mathbb{H}$ でパラメタ付けすることにする。但し $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ は上半平面 (upper half plane)。

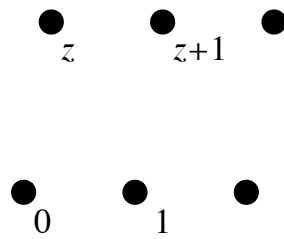


Figure 2.13: z と $z+1$ は同じ格子を与える。

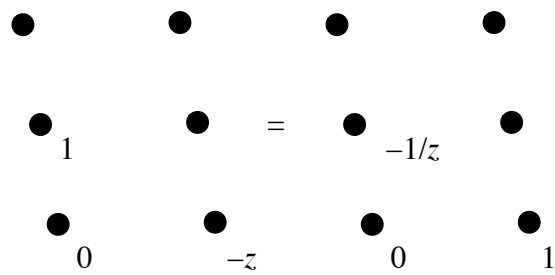


Figure 2.14: z と $-1/z$ は同じ格子を与える。

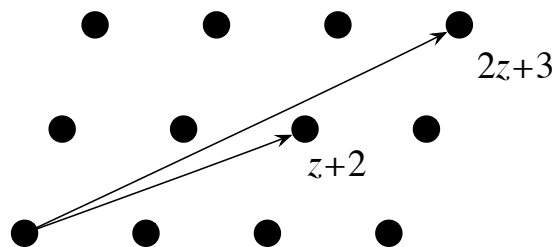


Figure 2.15: $az+b$ と $cz+d$ の二つのベクトルは $ad-bc=1$ ならもとの格子全体を覆う。

問題は、 $z, z' \in \mathbb{H}$ がいつ同じ格子を与えるかである。図 2.13 からわかるように、 z と $z+1$ は同じ格子を与える。これを $z \sim z+1$ と書こう。図 2.14 からは、 $z \sim -1/z$ もわかる。

もっと一般に、 a, b, c, d の四つの整数をとって、 $az+b, cz+d$ で生成される格子を考え、これは一般には (2.5.3) の部分格子だが、単位胞のサイズはもとのものの $ad-bc$ 倍なので、これが ± 1 ならば同じ格子になる。向きを保つのは $= 1$ のときである。 $(a, b, c, d) = (2, 3, 1, 2)$ の場合を図 2.15 に描いた。このとき、 $cz+d$ で全体をわると、

$$z \sim \frac{az+b}{cz+d} \quad (2.5.4)$$

である。これは (2.4.17) でやった一次分数変換で、 a, b, c, d を整数に限ったもの。 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ で、 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ による一次分数変換は上半平面を上半平面にうつすことは前節でみた。そこでは、 \mathbb{CP}^1 の北半球を北半球にうつすとかいたが、同じことである。

まとめると、次のことがわかった。

事実 2.5.1 $z, z' \in \mathbb{H}$ に対し、格子 $\{nz+m\}, \{nz'+m\}$ が相似なのは、 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ による一次分数変換でうつりあうとき、すなわち

$$z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \quad (2.5.5)$$

のとき、またそのときのみである。

特に、 $z \sim z+1$ と $z \sim -1/z$ はそれぞれ行列

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5.6)$$

による一次分数変換である。ユークリッドの互除法をよく思い出すと、勝手な $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ の元は S, T から生成されることが示せる。

さて、一次分数変換をうまくつかって、 $z \in \mathbb{H}$ をさらに標準的な領域にうつすことができる。まず、

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\mathrm{Im} z}{|cz+d|^2} \quad (2.5.7)$$

という関係が計算をすればわかる。 $|cz+d|$ にはノンゼロの最小値があるので、 z の一次分数変換の像の虚部には最大がある。それをひとつとって、 z' と呼ぶ。 $z'' = z' \pm n$ をうまくとれば、 $|z''| \leq 1/2$ と出来る。さて、このとき $|z''| \geq 1$ である。なぜなら、そうでないとすると、 $\mathrm{Im}(-1/z'') > \mathrm{Im}(z'')$ となって矛盾するからである。まとめると、次のことがわかった：

事実 2.5.2 勝手な $z \in \mathbb{H}$ は、 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ による一次分数変換をつかって、 $|z| \leq 1/2$ 、 $|z| \geq 1$ の領域にうつすことができる。

状況は図 2.16 に描いた。また、もうすこし考えると、この領域内の二点で $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ でうつるのは、境界の $\mathrm{Re} z = -1/2$ と $\mathrm{Re} z = 1/2$ が $z \mapsto z+1$ でうつる場合(赤と桃色を貼る)と、境界の $|z| = 1$ が $z \mapsto -1/z$ でうつる場合(青と水色を貼る)のみであること

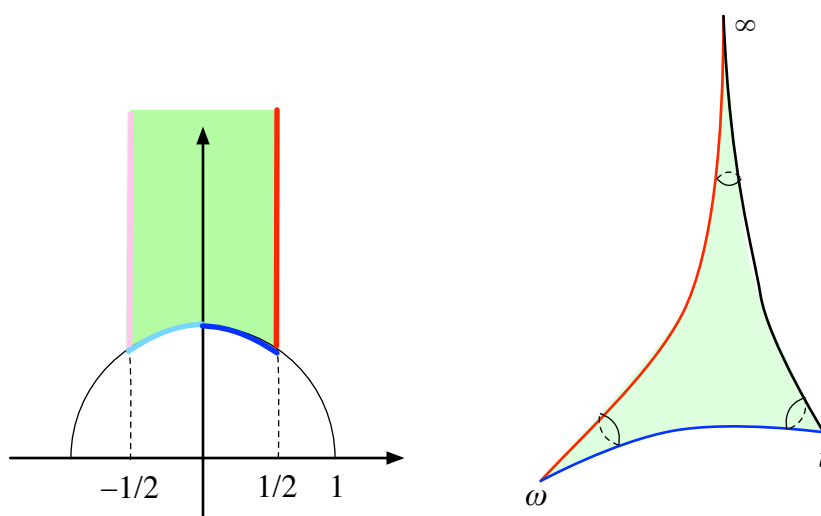


Figure 2.16: 勝手な二次元の格子の z は緑の領域にとれる。境界を適切に貼ると、三点が尖った「球面」になる。

がわかる。図示した緑の領域を $SL(2, \mathbb{Z})$ の上半平面 \mathbb{H} への作用の基本領域 (fundamental domain) という。境界の貼り合わせを上記の通り行くと、図の右のような、尖った「球面」だと思えることが出来る。

さて、二次元の結晶群をやったときは、格子の対称性を気にした。勝手な格子は \mathbb{Z}_2 対称性をもつ。 \mathbb{Z}_3 対称性をもつのは、基本領域内では $z = e^{2\pi i/3} =: \omega$ と $z = e^{2\pi i/6}$ に対応する。この二つは $z \mapsto z+1$ でうつりかわる。これらは \mathbb{Z}_6 対称性も持つ。 \mathbb{Z}_4 対称性を持つのは、基本領域内では $z = i$ である。この点は $z \mapsto -1/z$ で自分自身にうつる。だから、格子の対称性という観点だけみていると、図の右の尖った球面のうち $z = i$ と $z = \omega$ だけは対称性が高いが、その他の $z \neq i, \omega, \infty$ は全て同一視していることになる。

2.6 古典群

これまで \mathbb{R}^N の長さを保つ変換の群 $O(N)$ 、 $\det = 1$ の部分群 $SO(N)$ 、また \mathbb{C}^N の長さを保つ変換の群 $U(N)$ 、 $\det = 1$ の部分群 $SU(N)$ が出て来た。これらに加えて、 $Sp(N)$ と書かれる古典群がある。これを導入するために、 $SU(2)$ についてもういちど考え直したいが、まずそれ以前に $SO(2)$ と \mathbb{C} の関係から考えることにする。

2.6.1 二次元の回転と複素数

二次元の回転群 $SO(2)$ は、 θ 回転するという操作からなる。さて、 $e^{i\theta}$ を掛けるという操作は複素平面の θ 回転をひきおこす。これは良く知られていると思うが、何故だかを反省する。

複素数 $z = a + bi$ に対し、 $\bar{z} = a - bi$ と定めて、

$$|z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2 \quad (2.6.1)$$

である。だから、長さの構造をふくめて、 $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ と思える。また

$$|z||z'| = |zz'| \quad (2.6.2)$$

だった。これより、

$$U(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad (2.6.3)$$

は群をなすことがわかる。このように定義した $U(1)$ は自然に $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ にかけて算で作用し、 $z \in U(1)$, $w \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ に対し $|zw| = |z||w| = |w|$ であるのでこれは長さを保つ。これによって $U(1) \simeq SO(2)$ という同型ができた。

2.6.2 四元数

二次元の回転は複素数のかけ算としてうまく理解できた。そうすると、高次元の回転もなにかの「数」のかけ算としてうまく理解できないか？と考える。

実二次元ベクトル (a, b) を複素数と同一視すると、複素数の足し算はベクトルの足し算である。複素数のかけ算は、実二次元ベクトル $\vec{z} = (a, b)$ と $\vec{z}' = (a', b')$ に対して、もうひとつの実二次元ベクトル

$$\vec{z} \circ \vec{z}' = (aa' - bb', ab' + a'b) \quad (2.6.4)$$

を定める操作であって、たし算に関して分配的

$$(\vec{z} + \vec{z}') \circ \vec{w} = \vec{z} \circ \vec{w} + \vec{z}' \circ \vec{w} \quad (2.6.5)$$

であって、さらに積の長さが長さの積になる

$$|\vec{z} \circ \vec{z}'| = |\vec{z}||\vec{z}'|. \quad (2.6.6)$$

成分で書けばこれは

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2 \quad (2.6.7)$$

という等式を意味している。

さて、ハミルトンはこれが実三次元ベクトルでも出来ないかと考えた。すなわち、実三次元ベクトル $\vec{z} = (a, b, c)$, $\vec{z}' = (a', b', c')$ に対しその積 $\vec{z} \circ \vec{z}'$ が三次元ベクトルになるようにして、

$$|\vec{z} \circ \vec{z}'| = |\vec{z}||\vec{z}'| \quad (2.6.8)$$

を満たすようにできないかと考えた。(三次元のベクトル積 $\vec{z} \times \vec{z}'$ はこの条件を満たさない。) 死の床についたハミルトンが昔を回想して息子にあてた手紙が残っている⁴¹:

Every morning in the early part of the above cited month, on my coming down to breakfast, your (then) little brother, William Edwin, and yourself, used to ask me, “Well, papa, can you multiply triplets?” Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: “No, I can only *add* and *subtract* them”.

ハミルトンはしばらくして、実4次元ベクトルなら積の長さが長さの積になるような積を入れられることを発見した。これを(ハミルトンの)四元数 (quaternion) と言う。実4次元ベクトル $\vec{q} = (a, b, c, d)$ の代わりに、通常虚数単位を i, j, k のみつつ導入する。

⁴¹<http://books.google.co.jp/books?id=9j8MAQAIAAJ&pg=PA46>を参照。もうちょっと文献を探すと、この会話をしたのは息子が9歳だかのときということがわかる。

定義 2.6.1 シンボル i, j, k と実数 a, b, c, d に対して $q = a + bi + cj + dk$ の形のものを四元数 (quaternion) とよび、その全体を \mathbb{H} と書く。但し、かけ算則は

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \quad (2.6.9)$$

で定め、また、 q の共役を

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk \quad (2.6.10)$$

と定める。

上半平面も \mathbb{H} と書かれるので混乱するが、アルファベットは文字が少ないので仕方がない。

結合則 $q(q'q'') = (qq')q''$ は幸い満たされているが、 qq' と $q'q$ は必ずしも等しくない。すくなくとも $q\bar{q}$ と $\bar{q}q$ は同じになり、ちょうど長さの二乗になる：

$$q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =: |q|^2. \quad (2.6.11)$$

これより、長さをこめて $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ と同定できる。また、

事実 2.6.2 $|q||q'| = |qq'|$ 。

練習問題として、やってみると勉強になる。もうすこし一般に、

$$\overline{ab} = \bar{b}\bar{a} \quad (2.6.12)$$

になる。これは \bar{a} のかわりに a^\dagger と書けば

$$(ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger \quad (2.6.13)$$

となってよりなじみ深いかもしれない。

現在では、長さの積が積の長さになるような積を入れられる実ベクトル空間の次元は 1, 2, 4, 8 に限ることが知られている⁴²：

実数 \mathbb{R}	$a = a$	
複素数 \mathbb{C}	$z = a + bi$	$z^2 > 0$ を諦める
四元数 \mathbb{H}	$q = a + bi + cj + dk$	$qq' = q'q$ を諦める
八元数 \mathbb{O}	$o = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_7 i_7$	$o(o'o'') = (oo')o''$ を諦める

(2.6.14)

2.6.3 $\mathrm{Sp}(1)$ について

四元数をつかって定義される次の群 $\mathrm{Sp}(1)$ について考えよう：

$$\mathrm{Sp}(1) := \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}. \quad (2.6.15)$$

$\mathrm{Sp}(1)$ は当然 \mathbb{H} に長さを保って作用するが、 $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2$ と思うと実は

⁴²エビングハウス他著、成木訳「数」(上下) シュプリングー数学リーディングス6、丸善、2004 など参照。また、単純超対称ゲージ理論が存在する次元は $d = 2 + 1, 2 + 2, 2 + 4, 2 + 8$ であって、超弦理論が 10 次元であるということにも関係がある。Kugo, Townsend “Supersymmetry and the Division Algebras” Nuclear Physics B221 (1983) 357 Evans, “Supersymmetric Yang-Mills theory and Division Algebras”, Nuclear Physics B298 (1988) 92

事実 2.6.3 $\text{Sp}(1) \simeq \text{SU}(2)$

である。

SU(2)との関係: これをみるには、

$$\mathbf{i} = i\sigma_x, \quad \mathbf{j} = i\sigma_y, \quad \mathbf{k} = i\sigma_z \quad (2.6.16)$$

を考えると、

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \quad (2.6.17)$$

を満たすので、

$$\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = \begin{pmatrix} a + di & -c + bi \\ c + bi & a - di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \quad (2.6.18)$$

のことを四元数と思ってもよい⁴³。このとき、

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^\dagger \quad (2.6.19)$$

ただし右辺の \dagger は行列としてのエルミート共役、また

$$|\mathbf{q}|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |z|^2 + |w|^2 = \det q. \quad (2.6.20)$$

これより、

$$|\mathbf{q}\mathbf{q}'| = |\mathbf{q}||\mathbf{q}'| \quad (2.6.21)$$

はほとんどあたりまえ、なぜなら左辺の自乗は $\det(\mathbf{q}\mathbf{q}')$ で、右辺の自乗は $\det \mathbf{q} \det \mathbf{q}'$ だから。

すると、 $|q| = 1$ なる四元数は \mathbb{C}^2 の長さをたもち、 $\det = 1$ だから、当然 SU(2) の元を定める。これは全単射である。

SO(3)との関係: Sec. 2.4.1 でやった SU(2) と SO(3) の関係も、四元数を使っていいかえられる。 $q = a + bi + cj + dk$ のうち、 $q = -\bar{q}$ を満たす「純虚」なものは

$$v = xi + yj + zk \quad (2.6.22)$$

の形をしていて、ちょうど実三次元である。長さ 1 の四元数 q をとってくる。すると、変換

$$v \mapsto v' = qv\bar{q} \quad (2.6.23)$$

⁴³これを聞くと、四元数は複素数と同様あらたな「数」と思ふべきなのか、それとも単に 2×2 行列なのか?と思うかも知れない。これは複素数に対しても同じことが言えて、上記 $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{j}^2 = -1$ を満

たすから、 $z = a + bi$ のかわりに全ての計算で $\mathbf{z} = a + b\mathbf{j} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ を使ってもいいのである、すると上記と同様に $|\mathbf{z}|^2 = \det \mathbf{z}$ だし、この行列の要素は全部実数だから、複素数なんてものは無くって、単に実数の行列があるだけだと思ってもよい。これから、量子力学の通俗解説書で、複素数ってのは実際の数じゃないのに波動関数には複素数が現れて不思議だ、とか書いてあるのはちゃんちゃらナンセンスであることがわかる。

結局のところ、実際に数なのか、行列なのか、という疑問自体がよくないので、場合に応じて適切に使いやすい形式をつかえばいいというだけである。

は

$$\bar{v}' = q\bar{v}\bar{q} = q\bar{v}\bar{q} = -qv\bar{q} = -v' \quad (2.6.24)$$

で、かつ

$$|v'| = |q||v||\bar{q}| = |v| \quad (2.6.25)$$

だから、三次元の回転を与える。これより、 $\text{Sp}(1) \rightarrow \text{SO}(3)$ がつくれた。

もうすこし具体的に、 $q = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ の場合に作用を考えると、 $qi\bar{q} = i$ また

$$qj\bar{q} = (\cos \theta + i \sin \theta)j(\cos \theta - i \sin \theta) = j \cos 2\theta + k \sin 2\theta \quad (2.6.26)$$

さらに

$$qk\bar{q} = (\cos \theta + i \sin \theta)k(\cos \theta - i \sin \theta) = -j \sin 2\theta + k \cos 2\theta \quad (2.6.27)$$

なので、これは j - k 平面内の 2θ 回転である。同様に、 $e^{j\theta}$ は k - i 平面の 2θ 回転、 $e^{k\theta}$ は i - j 平面内の 2θ 回転である。

一般に、 $s^2 + t^2 + u^2 = 1$ なる3つの実数を取ると、

$$(si + tj + uk)^2 = -1 \quad (2.6.28)$$

であるので、

$$q = e^{((si+tj+uk))\theta} = \cos \theta + (si + tj + uk) \sin \theta \quad (2.6.29)$$

である。この q に対し、

$$v \mapsto qv\bar{q} \quad (2.6.30)$$

は軸 $\vec{n} = (s, t, u)$ 周りの 2θ 回転である。勝手な長さ 1 の四元数 q は、かならず (2.6.29) の形にかけるから、これで、 $|q| = 1$ なる四元数がどういう三次元の回転を与えるかが一般にわかった。

三次元の回転角は Euler 角で書くより長さ 1 の四元数 q で書くほうがいろいろと便利で、3d CG 等の処理ではしばしば使われる(そうである。)

SO(4)との関係: \mathbb{H} は四元数なのだから長さをこめて $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ である。すると、 $\text{SO}(4)$ との関係がついてもよさそうである。実際、 $v \in \mathbb{H}$ には $(q, q') \in \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1)$ が

$$v \mapsto qv\bar{q}' \quad (2.6.31)$$

が長さを保って作用する。これより $\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1) \rightarrow \text{O}(4)$ という準同型ができたが、像と核をきちんと考えると次のことがわかる:

事実 2.6.4 $\text{SO}(4) = (\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1))/\mathbb{Z}_2$

ただし割っている \mathbb{Z}_2 は $(-1, -1) \in \text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1)$ が $v \mapsto (-1)v(-1) = v$ と自明に作用することから来る。

2.6.4 最後の古典群 $\mathrm{Sp}(N)$

さて、 \mathbb{H} も「数」なので、 \mathbb{H} 成分のベクトル、行列等を考えることが出来る。ただし、一般には $qq' \neq q'q$ なので、すこし気をつけないといけない。 \mathbb{H}^n を \mathbb{H} 成分 n 次元縦ベクトルのなす空間とする:

$$v = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^n. \quad (2.6.32)$$

\mathbb{H}^n の元に対してその長さを

$$|v|^2 = |q_1|^2 + \cdots + |q_n|^2 \quad (2.6.33)$$

で定める。

A, B を $n \times n$ 行列で要素が \mathbb{H} の元であるものとして、いつものように左からのベクトルへの作用を決めると、

$$(AB)v = A(Bv) \quad (2.6.34)$$

である。これは左からの \mathbb{H} の作用に対しては一般には線形でない

$$q(Av) \neq A(qv) \quad (2.6.35)$$

が、右からの \mathbb{H} の作用に関しては線形である:

$$(Av)q = A(vq). \quad (2.6.36)$$

兎も角、つぎのように定義する:

定義 2.6.5

$$\mathrm{O}(n) := \{\mathbb{R} \text{ 値 } n \times n \text{ 行列で } \mathbb{R}^n \text{ の長さをたもつもの}\}, \quad (2.6.37)$$

$$\mathrm{SO}(n) := \{\mathbb{R} \text{ 値 } n \times n \text{ 行列で } \mathbb{R}^n \text{ の長さをたもち、} \det = 1 \text{ であるもの}\}, \quad (2.6.38)$$

$$\mathrm{U}(n) := \{\mathbb{C} \text{ 値 } n \times n \text{ 行列で } \mathbb{C}^n \text{ の長さをたもつもの}\}, \quad (2.6.39)$$

$$\mathrm{SU}(n) := \{\mathbb{C} \text{ 値 } n \times n \text{ 行列で } \mathbb{C}^n \text{ の長さをたもち、} \det = 1 \text{ であるもの}\}, \quad (2.6.40)$$

$$\mathrm{Sp}(n) := \{\mathbb{H} \text{ 値 } n \times n \text{ 行列で } \mathbb{H}^n \text{ の長さをたもつもの}\} \quad (2.6.41)$$

$\mathrm{Sp}(n)$ はユニタリシンプレクティック群と呼ばれるが、他の群と同様通常アルファベットを順に読み上げエスピー群と呼ばれる。非可換性のため、 Sp の場合は \det がうまく定義できないので、 SSp に相当するものはない。また、前節で見た八元数 \mathbb{O} を使って同様なものを定義しようとすると、これらは結合律が成り立たないため、行列のかけ算がそもそも結合律をみたさず、なかなかうまくいかない。

事実 2.6.6 コンパクトな連続群は、有限群のずれをのぞいて、 $\mathrm{U}(1)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$ および五つの例外 E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 の直積であらわせる。

この定理の証明は重要なので、講義の後半で行うが、ここで、コンパクトな群というのは、群が多様体としてコンパクトであるということ。たとえば $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ は $\mathrm{diag}(z, z^{-1})$ と

いう元は z は無限に大きくなれるのでコンパクトでないが、 $SU(2)$ は $|z| = 1$ と限られるのでコンパクトである。

また、有限群のずれをのぞいて、というのは、 $SO(n) \hookrightarrow O(n) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ や $\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow SU(2) \twoheadrightarrow SO(3)$ の形のずれは同一視するとして、ということ。

ここにも数学における分類の典型的な振舞いがみられる: いくつかの無限系列があって、そうしてすこしの例外が有限個ある。コンパクト群の無限系列は古典群 (classical group) とよばれ、例外は例外群 (exceptional group) という。

また、このノートではここまで、いろいろな古典群が \mathbb{Z}_2 を除けばおなじであるケースをいろいろみてきたが、これらは例外的な現象である。実際、

事実 2.6.7 コンパクト古典群 $SU(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$ のあいだで、有限群をのぞいて同じになるケースは

$$SU(2) \simeq Sp(1), \quad (2.6.42)$$

$$SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3), \quad (2.6.43)$$

$$(SU(2) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(4), \quad (2.6.44)$$

$$Sp(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(5), \quad (2.6.45)$$

$$SU(4)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(6) \quad (2.6.46)$$

で尽きる。

例外群は八元数上のベクトル空間をなんとか定義してなんとかその上の長さのようなものを保つ群を作ろうとしてなんとか有限個できるもの、と思えなくもない。⁴⁴ 例えば、 G_2 は八元数上の \mathbb{R} 線形変換で八元数のかけ算を保つもの全体であり、 F_4 は八元数の 3×3 エルミート行列全体 \mathcal{A} に $x, x' \in \mathcal{A}$ に対して $x \circ x' = (xx' + x'x)/2$ と積をいれた Albert 代数というもののかけ算を保つものの全体である。

2.6.5 Jordan 代数の話

Albert 代数はまた数学における分類の典型的な振舞いをしめすのでここで僕の備忘のために書いておく⁴⁵。量子力学ではエルミート行列が観測量であるが、エルミート行列 A, B に対して AB は一般にはエルミートでない。しかし $A \circ B := (AB + BA)/2$ はエルミートであり、また観測量である。(観測量 $A, B, A \circ B$ の間の物理的な関係はよくわからないが。) というわけで、Jordan は $A \circ B$ を基礎にして量子力学(の基礎となる数学)を展開出来ないかと考えた。

定義 2.6.8 Jordan 代数 J とは、 \mathbb{R} ベクトル空間で、次の条件をみたす積 \circ が入っているものである:

$$x \circ y = y \circ x, \quad (x \circ x) \circ x = x \circ (x \circ x). \quad (2.6.47)$$

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 値 $n \times n$ 行列に上述のとおり

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx) \quad (2.6.48)$$

⁴⁴詳細は横田「古典型単純リー群」「例外型単純リー群」現代数学社等を参照。これのあとがきを昔読んで感動した覚えがある。「例外型」のほうは英語版は [arXiv:0902.0431](https://arxiv.org/abs/0902.0431) として公開されているが、あとがきは英訳されていない。

⁴⁵佐竹「リー環の話」日本評論社の付録の「ジョルダン環とリー環」がわかりやすい。

で \circ を決めれば上記の条件をみたしていることはすぐに確認出来る。

さらに、エルミートという条件を課したい。これは

定義 2.6.9 形式的に実 (formally real) な Jordan 代数とは、

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \quad (2.6.49)$$

なら

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \quad (2.6.50)$$

なるものである。

ということに Jordan は決めた。 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 値エルミート $n \times n$ 行列に上記の \circ を入れたものを $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}), \mathcal{H}_n(\mathbb{C}), \mathcal{H}_n(\mathbb{H})$ とかくと、それぞれ formally real である。

さて、Jordan, von Neumann, Wigner は有限次元で形式的に実な Jordan 代数を分類した⁴⁶:

事実 2.6.10 形式的に実な有限次元の Jordan 代数は以下のどれかの直和である:

- $\mathcal{X}_{n,1} := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ に $(x, t) \circ (x', t') = (tx' + t'x, x \cdot x' + tt')$ と定めたもの、
- 上記の $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}), \mathcal{H}_n(\mathbb{C}), \mathcal{H}_n(\mathbb{H})$,
- 及び $\mathcal{H}_n(\mathbb{O}), n = 1, 2, 3$.

これらは以下の例外的な同型を除いて異なる:

$$\mathbb{R}_{>0} = \mathcal{H}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_1(\mathbb{C}) = \mathcal{H}_1(\mathbb{H}) = \mathcal{H}_1(\mathbb{O}), \quad (2.6.51)$$

$$\mathcal{H}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{X}_{2,1}, \quad (2.6.52)$$

$$\mathcal{H}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{X}_{3,1}, \quad (2.6.53)$$

$$\mathcal{H}_2(\mathbb{H}) \simeq \mathcal{X}_{5,1}, \quad (2.6.54)$$

$$\mathcal{H}_2(\mathbb{O}) \simeq \mathcal{X}_{9,1}. \quad (2.6.55)$$

八元数 \mathbb{O} は結合的でないが、 $n \leq 3$ ならば $n \times n$ 行列が Jordan 代数になる。しかし、 $n \leq 2$ なら他の無限系列と同型なので、本当に例外的なのは $\mathcal{A} := \mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ のみで、その自己同型が F_4 である。

上の例外的同型はつぎのようにわかる。 $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 値 2×2 エルミート行列は

$$h = \begin{pmatrix} t+x & z \\ \bar{z} & t-x \end{pmatrix}, \quad t, x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{X} \quad (2.6.56)$$

と書ける。これに対して、

$$\det h = t^2 - x^2 - |z|^2 \quad (2.6.57)$$

と定める。(これは $\mathbb{X} = \mathbb{H}, \mathbb{O}$ に対しては一般的な \det の定義がないから本当に定めただけ。) そこで、 $(z, x) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ とすればよい、但し $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ に対し $n = 2, 3, 5, 9$.

⁴⁶Jordan, von Neumann, Wigner, "On an Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism", *Ann. Math.* 35 (1934) 29. ここには形式的に実なら通常の Jordan 代数の定義の $x \circ (y \circ x^2) = (x \circ y) \circ x^2$ のかわりに上の $(x \circ x) \circ x = x \circ (x \circ x)$ で良いことも書いてある。

特に、トレースレス $\mathbb{X} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 値 2×2 エルミート行列は長さの構造をこめて \mathbb{R}^n と同定できる。 $\mathbb{X} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$ の場合は、 $U \in \mathrm{SU}(2)$ および $U \in \mathrm{Sp}(2)$ に対して、自然に

$$h \mapsto U h U^{-1} \quad (2.6.58)$$

という変換を考えることが出来るから、

$$\mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{O}(3), \quad \mathrm{Sp}(2) \rightarrow \mathrm{O}(5) \quad (2.6.59)$$

なる準同型ができた。核と像をきちんと考えると、

$$\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathrm{SU}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(3), \quad \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathrm{Sp}(2) \twoheadrightarrow \mathrm{SO}(5) \quad (2.6.60)$$

がわかった。この導出は前者は Sec. 2.4.1 でやったことそのもの、後者は例外的同型 (2.6.45) を導いたことになる。

2.7 有限群について

これまで群の例として $\mathrm{SO}(3)$ とその仲間ばかりみてきたが、有限群一般についても見ておきたい。

2.7.1 有限可換群

まず有限で可換な群について考える。既に $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ を実例としてなんども考えた。まず \mathbb{Z}_n についてもうすこし考えよう。 $\varphi: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ を自己同型とする。もちろん恒等写像は自己同型であるが、それ以外にもあってもよい。たとえば、 $\mathbb{Z}_n \ni x \mapsto -x \in \mathbb{Z}_n$ も自己同型である。勝手な自己同型はどう与えられるか? いま、

$$\varphi(x) = \varphi(\underbrace{1 + \dots + 1}_{x \text{ 回}}) = \underbrace{\varphi(1) + \dots + \varphi(1)}_{x \text{ 回}} = x\varphi(1) \quad (2.7.1)$$

なので、 $\varphi(1)$ さえ決めればよい。さて、勝手な $m \in \mathbb{Z}_n$ に対して、 $\varphi_m: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$ を $x \mapsto mx$ で定めると、これは準同型になるが、同型になるのは $\gcd(m, n) = 1$ のときである。そのような m, m' に対し、 $\varphi_m \circ \varphi_{m'} = \varphi_{mm'}$ である。まとめると、

事実 2.7.1 \mathbb{Z}_n の勝手な自己同型は $\gcd(m, n) = 1$ なる $m \bmod n$ に対し

$$\begin{aligned} \varphi_m &: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n \\ x &\mapsto mx \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

と書け、それらの合成はまた群をなす。

一般に次のように定める:

定義 2.7.2 群 G に対しその自己同型 (automorphism) 全体が合成でなす群を $\mathrm{Aut}(G)$ と書くことにする。

すると、上の事実は次のように言い換えられる:

事実 2.7.3 $\text{Aut}(\mathbb{Z}_n) = \{m \in \mathbb{Z}_n \mid \gcd(m, n) = 1\}$ 。ただし右辺の群構造は積で入れる。

自己同型に関して、次の用語を定める:

定義 2.7.4 群 G に対して、 g による共役 $c_g : h \mapsto ghg^{-1}$ は自己同型を与える。このような自己同型を内部 (inner) 自己同型とよび、内部自己同型でない自己同型を外部 (outer) 自己同型と呼ぶ。

内部自己同型全体は $\text{Aut}(G)$ の正規部分群をなし、内部自己同型群 $\text{Inn}(G)$ と書く。また、 $\text{Out}(G) := \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ を外部自己同型群と呼ぶ。

当然であるが、可換群に対しては内部自己同型は単に恒等写像になってしまい、 $\text{Inn}(\mathbb{Z}_n)$ は自明な群である。特に

事実 2.7.5 \mathbb{Z}_n の自己同型はすべて外部自己同型である。

内部/外部自己同型は非可換群のときに意味を持つてくる。

さて、一般的な有限可換群はどんなものだろうか? まず、 \mathbb{Z}_m は m が素数でなければさらに分解出来る:

事実 2.7.6 $m = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ が m の素因数分解とすると、

$$\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}. \quad (2.7.3)$$

この証明は中国剰余定理を使えば良い。さらに次の事実がある:

事実 2.7.7 勝手な有限可換群 G は次の形に書ける:

$$\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}} \quad (2.7.4)$$

ただし p_i は互いに異なるとは限らない素数。

証明はいろいろな方法がある。群論の教科書を開くと証明はかならず載っているが、本によって随分異なる。

ひとつの方法の概要は以下の通り⁴⁷: 以下、可換群なので加法的に書くとして、特に、単位元は 0 である。一般に $x \in G$ に対して

$$nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ 回}} \quad (2.7.5)$$

とする。さて、 x_1, \dots, x_m をとってきて、

$$G = \{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_mx_m \mid n_i \in \mathbb{Z}\} \quad (2.7.6)$$

と書けるようにする。(これは G が有限だから必ず出来る。たとえば、非常に無駄がおおいが、 $m = |G|$ として、全部の元をとってくればよい。) すると、

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{Z}^m &\rightarrow G \\ (n_1, \dots, n_m) &\mapsto n_1x_1 + \cdots + n_mx_m \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

⁴⁷この証明が気に入らないのだからもっと巧いのはないのか、というのが <https://mathoverflow.net/questions/12009/> で議論されていて、勉強になる。

という全射準同型がある。すると

$$\text{Ker } \varphi = \{(n_1, \dots, n_m) \mid n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_mx_m = 0 \in G\} \quad (2.7.8)$$

で、

$$G = \mathbb{Z}^n / \text{Ker } \varphi \quad (2.7.9)$$

である。さて、ユークリッドの互除法をつかうと、何か $v_1, v_2, \dots, v_s \in \mathbb{Z}^m$ があって、

$$\text{Ker } \varphi = \{t_1v_1 + t_2v_2 + \dots + t_sv_s \mid t_i \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}^s \quad (2.7.10)$$

と書けることがわかる。いいかえると、

$$\text{Ker } \varphi = \{tM \in \mathbb{Z}^m \mid t \in \mathbb{Z}^s\} \quad \text{但し } M = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix}. \quad (2.7.11)$$

あとは、線形代数でやった掃き出し法で、整数のかけ算しか許さないことを丁寧につかってやると、上記の行列が

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_s & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad (2.7.12)$$

と書けることがわかる。これより、 $G = \mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_s}$ と書けることがわかった。

2.7.2 対称群と交代群

有限非可換群の典型的な例は対称群と交代群である。もういちど定義を書いておくと：

定義 2.7.8 $X = \{1, \dots, n\}$ の置換全体のなす群を S_n と書き、対称群 (symmetric group) という。偶置換全体のなす正規部分群を A_n と書き、対称群 (alternating group) という。

$|S_n| = n!$, $|A_n| = n!/2$ だった。

定義 2.7.9 S_n の元で上記 X のうち $i \neq j$ のみを入れ替えるものを (ij) と書き、互換 (transposition) と呼ぶ。

事実 2.7.10 勝手な $g \in S_n$ は互換の積でかける。

勝手な置換があみだくじで実現出来るということ。証明はかんがえてみよう。

さて、 S_n は非可換であるため、 $g \in S_n$ に対して定まる内部自己同型 $c_g : S_n \ni h \mapsto ghg^{-1}$ は一般には非自明な自己同型になる。たとえば、 $n = 4$ として、 g が $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1, 4 \mapsto 4$ ならば、 $c_g((12)) = (23)$ である。同様に、互換の内部自己同型による像は互換になることはすぐわかる。また、互換を互換に写す自己同型は内部自己同型である。

実は次のことが知られている：

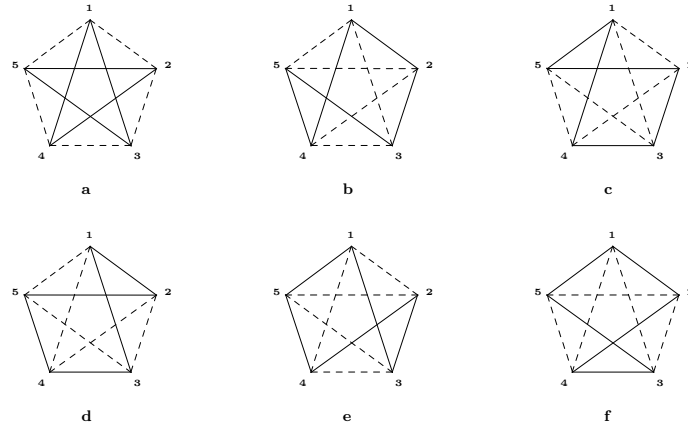


Figure 2.17: 五角グラフの二色による塗り分け。

事実 2.7.11 $n = 6$ でないかぎり、勝手な S_n の自己同型は内部自己同型である: $\text{Aut}(S_n) = \text{Inn}(S_n)$. $n = 6$ の場合は、変な外部自己同型があり、 $\text{Inn}(S_n) \hookrightarrow \text{Aut}(S_n) \twoheadrightarrow \text{Out}(S_n) = \mathbb{Z}_2$ となっている。

この $n = 6$ の場合の例外は有限群論を難しくするひとつの理由らしい。

さて、 $n = 6$ の場合の内部でない自己同型を具体的に書こう。これもいろいろ方法はある⁴⁸。まず、五点 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の中の異なる二点をすべて結んだグラフを二色のサイクルふたつに塗り分けることを考える。ただし、色をとりかえた二つのグラフは同じものとみなす。これは六通り $\{a, b, e, c, d, f\}$ ある。図 2.17 を参照。

さて、五点 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ に S_5 が自然に作用するから、これがグラフの点の入れ替えとして作用すると、六つのグラフの入れ替えとしても作用する。すなわち、

$$S_{\{1,2,3,4,5\}} \hookrightarrow S_{\{a,b,c,d,e,f\}} \quad (2.7.13)$$

という単射準同型がある。さて、 $S_{\{a,b,c,d,e,f\}}$ は剰余類

$$\{\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \underline{5}, \underline{6}\} := S_{\{a,b,c,d,e,f\}} / S_{\{1,2,3,4,5\}} \quad (2.7.14)$$

にも自然に作用する。ただし、 $\underline{6} = S_{\{1,2,3,4,5\}}$ として、 \underline{i} と i は $1, 2, 3, 4, 5$ については自然に同一視ができる。以下、下線はつけないものとする。これにより、

$$S_{\{1,2,3,4,5\}} \hookrightarrow S_{\{1,2,3,4,5,6\}} \simeq S_{\{a,b,c,d,e,f\}} \quad (2.7.15)$$

で、この \hookrightarrow は単に 6 を動かさないような自然な S_n の S_{n+1} への埋め込みである。すると、

$$\begin{aligned} \varphi: S_{\{1,2,3,4,5,6\}} &\xrightarrow{\sim} S_{\{a,b,c,d,e,f\}} \\ (12) &\mapsto (ad)(bc)(ef) \end{aligned} \quad (2.7.16)$$

⁴⁸例えば Howard, Millson, Snowden, Vakil, “A description of the outer automorphism of S_6 and the invariants of six points in projective space”, J. Combinatorial Theory, 115 (2008) 1296 を参照。図 2.17 もここから拝借した。また、橋本義武「グロタンディークの双二十面体—マチウ群試論」も詳しい。こちらにはマチウ群との関連も書いてある。

となった。最後のステップとして、 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ から $\{a, b, c, d, e, f\}$ への自然な全単射はないのだが、 $1 = a, 2 = b, 3 = c, 4 = d, 5 = e$ という同一視を無理やり行う。すると、上記 φ は自己同型だが、互換を互換にうつさない。よって、外部自己同形になる。

教訓: \mathbb{Z}_n の自己同型はすべて外部自己同形だが、 S_n の自己同型はほぼいつも内部自己同型である。

2.7.3 単純群

上で、有限可換群の構造はよくわかることを見た。さて、有限非可換群はどうだろうか？
まず、一般に群 G に正規部分群 H があると、

$$H \hookrightarrow G \twoheadrightarrow K = G/H \quad (2.7.17)$$

という列があった。有限群だと $|H||K| = |G|$ である。ある意味 G は H と K から出来ている。ただし、 H と K を定めても G は一意には定まらない。これは先に結晶群の議論をしたときにいろいろ実例をみた。しかし、そこでもかいたように、 K と H が与えられると、どのような G がありうるか、というのを調べる数学的手法がある。

すると、勝手な有限部分群を調べるには、まずは正規部分群をみつけて、上記のように分解するのがいいだろう。さて、勝手な G に対し、 $\{e\}$ と G は正規部分群であるが、これらは分解の役に立たない。逆に言えば、これら以外に正規部分群を持たないような群はそれ以上分解出来ないので、構成要素である。そこで、次のように定義する：

定義 2.7.12 群 G が G および $\{e\}$ 以外に正規部分群をもたないとき、単純群 (simple group) と呼ぶ。

次のアナロジーをもつと良いかも知れない：

$$\begin{aligned} \text{自然数} &\leftrightarrow \text{有限群}, \\ \text{約数} &\leftrightarrow \text{正規部分群}, \\ \text{素数} &\leftrightarrow \text{単純群} \end{aligned} \quad (2.7.18)$$

実際に、巡回群 \mathbb{Z}_n に対して、勝手な部分群は正規部分群で、 \mathbb{Z}_m ただし m は n の約数。よって、有限可換単純群は \mathbb{Z}_p に限ることがわかる。

さて、勝手な単純でない有限群 G に対して、正規部分群 H で $\{e\} \subsetneq H \subsetneq G$ なるものがある。特に、 $H \subsetneq H' \subsetneq G$ なるようなさらに大きな正規部分群 H' が無い H を考える。このような H を極大な正規部分群とよぶ。そのとき、 G/H は単純群になることがわかる。

この操作を繰り返すと、勝手な有限群 G に対して、以下のように定義される組成列があることがわかる：

定義 2.7.13 有限群 G に対して、 $G \supset H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \cdots \supsetneq H_n = \{0\}$ 、且つ H_{i+1} は H_i の正規部分群、 H_i/H_{i+1} は単純群、であるようなものを G の組成列 (composition series) という。

さて、組成列に対しては次の性質がある：

事実 2.7.14 有限群 G の組成列 $G \supset H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq \cdots \supsetneq H_n = \{0\}$ に対して、その長さ n は組成列の選び方に依らない。また、単純群の列 (H_i/H_{i+1}) も添え字 i の並べ替えを除いて組成列の選び方に依らない。

これを巡回群 \mathbb{Z}_n について適用すると、素因数分解そのものである。するとアナロジー (2.7.18) にひとつ追加できる:

$$\text{素因数分解の一意性} \leftrightarrow \text{組成列の並べ替えを除いた一意性.} \quad (2.7.19)$$

組成列の並び替えを除いた一意性の証明も、ほぼ素因数分解の一意性の証明と同様である。重要なステップは次の定理である:

事実 2.7.15 G を有限群、 N, N' を極大正規部分群とする。このとき、 $H = N \cap N'$ とすると、 H は N の正規部分群でも N' の正規部分群でもあり、

$$A = G/N = N'/H, \quad B = G/N' = N/H \quad (2.7.20)$$

はそれぞれ単純群である。

これは次のように図示できる:

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & A & \swarrow & \searrow & B \\ N & & & & N' \\ & B & \swarrow & \searrow & A \\ & & K = N \cup N' & & \end{array} \quad (2.7.21)$$

あとは素因数分解の一意性と同様、上から並べ替えてゆけば良い。

そうすると、次のステップは有限単純群を分類することである。

事実? 2.7.16 有限単純群は以下で尽きる。

1. 可換なものは p が素数の場合の巡回群 \mathbb{Z}_p
2. $n \geq 5$ の交代群 A_n 。
3. リー型の単純群。
4. 26個の散在型 (sporadic) 単純群。

ここで三つ目と四つ目に関してはコメントが必要である。また、「事実」の後ろにはてながあることについても以下でコメントする。

リー型の有限単純群 まず、三つ目のリー型の単純群 (finite simple group of Lie type) というのは、おおよそ次のようなものである。定義 2.4.9 で $\text{SL}(N, \mathbb{X})$ を一般に

$$\text{SL}(N, \mathbb{X}) := \{M \mid M \text{ は要素が } \mathbb{X} \text{ の } N \times N \text{ 行列、} \det M = 1\} \quad (2.7.22)$$

と定めた。この定義が意味を持つには、 \mathbb{X} でかけ算と足し算が普通にできれば良かった。これまでは $\mathbb{X} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ の場合を考えて、それぞれ無限群になる。しかし、 \mathbb{Z}_p で p が素

数ならば、かけ算と足し算が普通に出来て有限体になる。(有限体としては \mathbb{F}_p と書かれることが多い。) そこで、 $SL(N, \mathbb{F}_p)$ という群を考えることができる。これは有限群であり、ほとんどほぼ単純群である。ほとんど、というのは $N = 2, p = 2, 3$ を除くということで、ほぼ、というのは、中心(=最大可換部分群)で割らないといけないということ。割ったものを $PSL(N, \mathbb{F}_p)$ と書く。

ほかの有限体を使うことも出来るが、有限体は素数べき $q = p^n$ ごとに一つあり、それに尽きることが知られている。すると同様に $PSL(N, \mathbb{F}_q)$ を考えることが出来る。(群論の専門家はこれを $L_N(q)$ と略記する。)

これがリー型の単純群の典型例である。すなわち、連続群をとってきて、そのパラメタを、なんとか実数体 \mathbb{R} や複素数体 \mathbb{C} から有限体 \mathbb{F}_q に置き換えたものである。事実 2.6.6 で、コンパクト連続群の分類を述べたが、コンパクト連続群に対して一様に、有限体版を考えることが出来る。このようにして、各古典コンパクト群と例外コンパクト群および \mathbb{F}_q の選び方によって(はじめのほうをのぞいて)有限単純群の無限系列が得られる。

ここにおいては、コンパクト群では例外的だった $E_{6,7,8}, F_4, G_2$ から有限単純群の無限系列が得られる。

それに加えて、ディンキン図のグラフ自己同型や \mathbb{F}_q のフロベニウス自己同型を組み合わせ、**「捻った」**リー型の有限単純群というものが得られる。

散在型単純群 すると、単純群というと、

- 可換なもの \mathbb{Z}_p
- 偶置換のなす群 A_n
- コンパクト連続群のパラメタをうまく有限体 \mathbb{F}_q にしたものとそれを捻ったもの

という無限系列があるが、それに加えて

- よくわからない 26 個の散在するもの

があるのである。これもまた数学における分類の典型的な様相をみせる。

散在型単純群ではじめにみつかったのはマチウ (Mathieu) 群とよばれるもので、 $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}$ という五つの群。これは Mathieu が19世紀にみつけた。つぎにみつかったのはヤンコ (Janko) 群 J_1 で 1965 にみつかった。その後は陸続とみつき、散在群の中で一番大きいものはモンスター群 \mathbb{M} であり、位数は

$$|\mathbb{M}| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \simeq 8 \times 10^{53} \quad (2.7.23)$$

である⁴⁹。

事実? なぜ事実 2.7.16 のあとにはてなをつけたかについてコメントする。

有限単純群の分類作業 (classification of finite simple groups, CFSG としばしば略される) は1970年代に精力的に行われ、1983 年には Gorenstein は分類が完成したとアナウンスした。単純群の分類は有限群論の大目標であったが、これが完成してしまったということになったので、分野に新規参入する学生が少なくなり、分野が縮小してしまう。しかし、証明の一部はながらく発表されず、ようやく 2011 年に残った部分が Aschbacher と

⁴⁹ これはバカでかい気がするが、そんなに大きくないらしい。 <https://mathoverflow.net/questions/17617/> 参照。たとえば、トランプ 52 枚の並べ方の群は S_{52} だが、その位数は $52! \simeq 8 \cdot 10^{67}$ 。

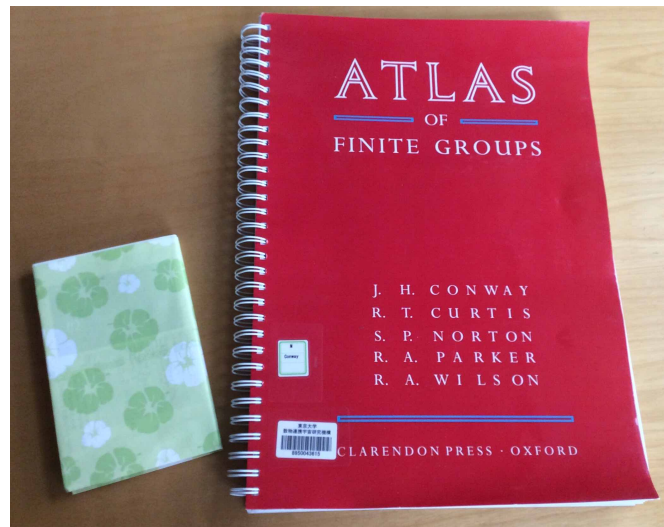


Figure 2.18: Conway, Curtis, Norton, Parker, Wilson, “Atlas of Finite Groups”, Clarendon Press 1985, & 2005. サイズの比較のため横に新書を一冊おいてみた。豪華世界地図のサイズの本。

Smith により出版された。また、分類の証明自体は合計一万五千ページを超える沢山の原著論文に分散しており、証明の全貌を把握している数学者はごく限られていると言われる。

そのため、分類の証明を始めから見通し良く書き直す作業が Gorenstein, Lyons と Solomon によりはじめられた。第一巻が 1994 に出版され、現時点では 2004 年に出た第六巻が最新であるが、まだ未完である。既に $165 + 218 + 419 + 341 + 467 + 529 = 2139$ ページある。それから10年以上、続きの巻は出版されていない。Gorenstein は亡くなり、Lyons と Solomon ももう七十台である。この作業は完成するのであろうか？最早時間との戦いであると思われる。有限単純群の分類は人間精神の達成した精髓の一つであると思う。このノートを読んだような若い人が発奮して、やり遂げてくれれば良いと思うのだけ。

兎に角、有限単純群の分類は、数学の問題としても、それを取り巻く数学者の共同体の社会学の問題としても、とても興味深い対象である。幸い、分類問題には日本人も沢山参加したため日本語のサーベイもいくつもあり⁵⁰、探すといろいろ出て来て、読むと面白い。英語の文章は勿論もっと沢山有る⁵¹。また、このあたりの有限群の情報は Atlas of Finite Groups というとても(厚いのではなく)大きな本にまとまっている。図 2.18 を参照。

とにかく、僕が自分で証明を追ったことがないが使っている定理は幾らでもあるので、そういう意味ではこの定理にのみ？をつけるのは良く無いのではあるが、数学者のコミュニティ全体でこういう問題のある定理はそれほど多くないのである、コメントしておいた。

⁵⁰ 鈴木道夫「有限単純群の分類」数学 34 (1982) 193, 原田耕一郎「有限群論の成果と課題」数学 53 (2001) 46 など。

⁵¹ Gorenstein 本人の “Classifying the finite simple groups”, Bulletin of AMS, 14 (1986) 1 など。

2.7.4 Voyager 探査機とマチウ群

折角なので散在型群についてもうすこしのみ書いてから、この雑多な Sec. 2 を終えたい。

デジタル処理ではデータを 0, 1 のビット列にして送るわけだが、現実世界は危険に満ちているので、書いたビットが正しく読みとれない、正しく転送されないことはしばしば起こる。そのために、データを冗長に表現して、エラーに対処する。安直には単に 0 と書くかわりに 00000 と書いて、単に 1 と書くかわりに 11111 と書く、とすれば、ひとつふたつビットが正しくとどかなくても、読み取り側で元の意図が読みとれるだろう。しかし、あまり冗長にすると無駄が多い。場合場合に応じて、適切な方法を選ばないといけない。これをエラー訂正符号 (error correcting code) という。ここには深い数学と実際の技術の面白い接点がある⁵²。

一般の理論を展開するのはあまりに話が逸れるので、次のような場合を考えよう。まず、あらわしたいデータを n ビット毎の塊にまず分ける。そして、各 n ビットを $m(>n)$ ビットの列に冗長に表現する。この際、 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ で足し算とかけ算が自在にできることをつかって、

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2^n &\rightarrow \mathbb{F}_2^m \\ b := (b_1, b_2, \dots, b_n) &\mapsto e := (e_1, \dots, e_m) \end{aligned} \quad (2.7.24)$$

が \mathbb{F}_2 上の線形写像

$$e = bX, \quad X \text{ は } 0, 1 \text{ 値 } m \times n \text{ 行列} \quad (2.7.25)$$

と書ける場合を考える。こういうのを線形符号という。 X の像をコードワードという。

さて、転送中に何ビットか間違ってしまうかもしれない。そこで、勝手な X の像の異なる元 $e = bX$, $e' = b'X$ がビット列としてなるべく異なっていて欲しい。二つのビット列 e, e' が何ビット異なるかを e と e' のハミング (Hamming) 距離という。というわけで、 X の像の異なる二つの元のハミング距離の最小をなるべく大きくしたいわけである。

さて、ここで M. Golay が 1949 に導入した Golay code をとりあげよう⁵³。微妙にことなるバージョンがいくつかあるが、ここでは extended binary Golay code というものをつかう。これは $n = 12$ ビットを $m = 24$ ビットに埋め込むもので、

$$X = (I_{12 \times 12} A_{12 \times 12}) \quad (2.7.26)$$

ただし I は単位行列、 A は正二十面体の頂点に 1 から 12 まで名前をつけて、

$$A_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{頂点 } i \text{ と } j \text{ がつながっている,} \\ 1, & \text{頂点 } i \text{ と } j \text{ がつながっていない} \end{cases} \quad (2.7.27)$$

としたもの⁵⁴。 X の像は 2^{12} 元あるが、そのうちわけは

(0の数, 1の数)	(24, 0)	(20, 4)	(16, 8)	(12, 12)	(8, 16)	(4, 20)	(0, 24)
個数	1	0	759	2576	759	0	1

(2.7.28)

となっている。線形符号だから、勝手な二つの異なる元の間の最小ハミング距離は 8 である。この符号は実際に、人類がはじめて木星土星に送った人工衛星 Voyager 一号二号が情

⁵²数学的な方面からは Ebeling, “Lattice and Codes”, Vieweg, 2002 など参照。

⁵³Golay, “Notes on Digital Coding”, *Proceedings of Institute of Radio Engineers*, 37 (1949) 657

⁵⁴グラフでつながっているとき 1、つながっていないとき 0 とするのが普通かと思うが、ここでは逆にとる。

報を地球に送る際に使われたらしい⁵⁵。1が八つあるコードワードをオクタッド (octad), 1が十二個あるコードワードをドデカッド (dodecad) という。

さて、対称群 S_{24} は長さ 24 のビット列を置換することで作用する。いま、 X の像は長さ 24 のビット列が 2^{12} 個あるわけである。そこで S_{24} の部分群を

$$M_{24} := \{\sigma \in S_{24} \mid \sigma \text{Im } M = \text{Im } M\} \quad (2.7.29)$$

で定義する。すなわち、 M_{24} は Golay code のコードワードをコードワードに写すような 24 文字の置換よりなる群である。これはマチウが19世紀に発見した散在型単純群 M_{24} と同じものである。 M_{24} には不思議な性質がいろいろある。

定義 2.7.17 S_n の部分群 H が $\{1, \dots, n\}$ に作用するとする。勝手な順序付きの k 個の元 (a_1, \dots, a_k) と (b_1, \dots, b_k) に対し、 $\sigma \in H$ で全ての i に対し $\sigma(a_i) = b_i$ となるようなものが取れる時、 H を k -重可移 (k -transitive) という。

例 2.7.18 S_n は n 重可移である。 A_n は $(n-2)$ 重可移である。

次の定理が知られている:

事実 2.7.19 S_n の部分群 H が $\{1, \dots, n\}$ に作用するとする。

- $k \geq 6$ 重可移なら、 H は S_n か A_n である。
- 5 重可移群は M_{24} と M_{12} のみである。
- 4 重可移群は M_{23} と M_{11} のみである。

上の定理にはより小さなマチウ群が出て来たので定義しておく、

- $1 \in \{1, \dots, 24\}$ を固定する M_{24} の部分群が M_{23} 。
- $2 \in \{1, \dots, 24\}$ を固定する M_{23} の部分群が M_{22} 。

さて、ひとつドデカッドをえらぶ。これは 1 の数が 12 個のコードワードだった。

- 選んだドデカッドを固定する部分群が M_{12} 。これは残りの 12 点に自然に作用する。
- $1 \in \{1, \dots, 12\}$ を固定する M_{12} の部分群が M_{11} 。

上記の可移群に関する定理の有限単純群の分類定理を使わない証明は知られていない。

僕が M_{24} に関する話をここに書いたのは、以前それに関して論文をかいたことがあるからです⁵⁶。

⁵⁵ ネット上では B. Cherowitzo の [Combinatorics in Space](#) という講義用スライドには細かい情報がのっているが典拠がない。Pless, Huffman ed., “Handbook of Coding Theory” vol. 2, North Holland, 1998 の Chapter 25 の Wicker “Deep Space Applications” は惑星探査の際のエラー訂正符号の当時のレビューだが、それによると、Voyager では画像データと非画像データでエンコーダが異なり、画像はエラーが多少あってもよいので Golay code は使わず、非画像データのみ使ったと書いてある。Wicker は情報の出所として謝辞に NASA/JPL のアーカイブを見せてもらった、と書いてある。Facebook でさらなる情報を聞いて見たら、数学者の友人の Ivan Ip が NASA の webpage に例えば [JPL publication 82-61](#) としてあると教えてくれた。

⁵⁶ Eguchi, Ooguri, Tachikawa “Notes on the K3 Surface and the Mathieu group M_{24} ”, [arXiv:1004.0956](#)。別に書いた解説記事も [数理解析研究所講究録 1811 \(2012\) 23](#) にある。その謝辞に書いたように、僕のその論文に関する寄与は非常にミニマルだった。

3 群の表現

3.1 基本的な定義

定義 3.1.1 群 G から、複素線形空間 V 上の線形変換のなす群への準同型 ρ を考える。 (V, ρ) の組のことを G の複素表現 (complex representation) という。 V の次元をその表現の次元という。

準同型の定義等を参照して、上記の定義を解釈すると、次の四つの条件を満たしているということ:

- $g \in G$ に対して、 $\rho(g) : V \rightarrow V$ という線形写像がある。
- $e \in G$ に対して、 $\rho(e) : V \rightarrow V$ は単位行列。
- $g^{-1} \in G$ に対して、 $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$ 。
- $g, h \in G$ に対して、 $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$ 。

この表現が n 次元であるというのは、 $\rho(g)$ が $n \times n$ 行列であるということ。

表現 (V, ρ) のことを表現 V 、表現 ρ と略記することも多い。

定義 3.1.2 群 G の複素表現 (V, ρ) と (W, σ) が同値であるとは、可逆な線形変換 $f : V \rightarrow W$ があって、 $\sigma = f \circ \rho \circ f^{-1}$ となることをいう。

定義を行列の言葉で書き下そう。可逆な線形変換があるので、 V と W は同じ次元 n をもつ。よって f は可逆な $n \times n$ 行列で書ける。それを M と書くと、

$$\sigma(g) = M\rho(g)M^{-1} \quad (3.1.1)$$

となるということ。 M は \mathbb{C}^n の基底変換行列と思えるので、 ρ と σ が基底の変換でうつりあうということ。

定義 3.1.3 群 G の複素表現 (V, ρ) で、 V にユニタリ内積が入っており、 $\rho(g)$ が全てユニタリ変換のばあい、ユニタリ表現という。

量子力学において対称性 G を考えることは、数学的には状態空間 \mathcal{H} が G のユニタリ表現であるということと(ほぼ)同じことである⁵⁷。以下、特に断らなければつねにユニタリ表現を考える。

定義 3.1.4 群 G のユニタリ表現 (V, ρ) と (W, σ) が同値である $(V, \rho) \simeq (W, \sigma)$ とは、可逆なユニタリ変換 $U : V \rightarrow W$ があって、 $\sigma = U \circ \rho \circ U^{-1}$ であることである。

これも上記と同様で、ユニタリ基底変換 U に対して $\sigma(g) = U\rho(g)U^{-1}$ となるということ。

⁵⁷ほぼ、というのは後述。時間反転は反ユニタリ変換になる。また、真の表現でなく射影表現を考えないといけないこともある

定義 3.1.5 群 G の表現 (V, ρ) と (W, σ) に対し、 $(V \oplus W, \rho \oplus \sigma)$ も表現である。これを表現の直和という。

覚えていない人、もしくははじめての人のために、ベクトル空間 V, W の直和 $V \oplus W$ の定義を書いておくと、これは $v \in V, w \in W$ に対して、ペア (v, w) のなすベクトル空間のこと。ペアのことを $v \oplus w$ とも書く。 $\rho \oplus \sigma$ の定義は

$$(\rho \oplus \sigma)(g)(v \oplus w) = \rho(g)(v) \oplus \sigma(g)(w) \quad (3.1.2)$$

である。 V が m 次元、 W が n 次元ならば、 $V \oplus W$ は $m+n$ 次元で、 $\rho \oplus \sigma$ を行列表示したものは

$$(\rho \oplus \sigma)(g) = \left(\begin{array}{c|c} \rho(g) & 0 \\ \hline 0 & \sigma(g) \end{array} \right) \quad (3.1.3)$$

というブロック対角行列のこと。これが群の表現になることは簡単に確認出来る。

定義 3.1.6 群 G のユニタリ表現 (V, ρ) がふたつのユニタリ表現 $(W_1, \sigma_1), (W_2, \sigma_2)$ の直和 $(W_1 \oplus W_2, \sigma_1 \oplus \sigma_2)$ と同値であるとき、 V を可約 (reducible) であるという。可約でないとき V を既約 (irreducible) という。

可約であるというのは、適切に基底を変換してやると、行列 $\rho(g)$ が上記のようにブロック対角に分割できるということである。

既約表現 (irreducible representation) は対称性の高い量子物理をやっているとひたすら出てくる概念であるが、言葉が長いので、irrep (複数形 irreps) と略されることがしばしばある。

V を量子力学の状態空間として H をハミルトニアンとする。 G が系の対称性であるとする、 $\rho(g)H = H\rho(g)$ となる。だから、 V を H の固有値 E_1, E_2, \dots に応じて

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \quad (3.1.4)$$

と分解すると、各 V_i は G のユニタリ表現になる。

事実 3.1.7 群 G の勝手なユニタリ表現 (V, ρ) は、既約表現 (W_i, σ_i) の直和

$$(W_1 \oplus W_2 \oplus \dots, \sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \dots)$$

に一意に分解出来る。

分解出来ることは、つぎつぎに直和分解をしていって、できなくなったらそこでやめればよい。問題は一意性であるが、それを示す際に一番重要なことは結局つぎのことである：

事実 3.1.8 群 G の既約ユニタリ表現 (V, ρ) に対し、ユニタリ変換 $f: V \rightarrow V$ があって $\rho = f\rho f^{-1}$ だとする。このとき、 f は単に定数倍である。

これをシューアの補題 (Schur's lemma) という。証明は簡単で、 V を f の固有空間に分解して $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ とすると、 V_i それぞれが G の部分表現になるので、固有空間分解が二つ以上になるとすると V の既約性と矛盾する。

兎も角、量子力学への群論の応用においては、まずは考えたい群 G に対してそのユニタリ既約表現にどのようなものがあるかを理解するのが先決である。

量子力学の講義で、すでに角運動量演算子

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \quad (3.1.5)$$

がスピン $0, 1/2, 1, \dots$ のもので尽くされることを学んだと思うが、これは $G = \mathrm{SO}(3)$ と $G = \mathrm{SU}(2)$ の場合をそのリー代数を用いて調べたことに対応している、ということをまた後でやる。

3.2 可換群の表現

一般の群の表現をやる前に、まずは可換群の場合を考える。

3.2.1 \mathbb{Z}_n の表現

まず $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ の表現 (V, ρ) を考えよう。 $\rho(k) = \rho(1)^k$ であるから、 $\rho(1)$ を定めればよい。 $1 = \rho(0) = \rho(n) = \rho(1)^n$ であるから、 $\rho(1)$ は対角化すれば単に対角成分は全て 1 の n 乗根 $e^{2\pi i k/n}$ のどれかである。これから次のことがわかった：

事実 3.2.1 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ の既約表現はすべて一次元で、 $x \in \mathbb{Z}_n$ に対し

$$\chi_k(x) = e^{2\pi i \frac{kx}{n}}$$

を対応させるものである。ただし、 k は $\hat{\mathbb{Z}}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ に値をとるラベルである。勝手な \mathbb{Z}_n の表現はこれら χ_k の直和に分解出来る。

ここで、 k も集合としては $\{0, 1, \dots, n-1\}$ に値をとるのではあるが、もとの群 \mathbb{Z}_n ではなくて、その表現をラベルするものであることを明示するために、 $\hat{\mathbb{Z}}_n$ と書いた。

この記法には実はもうすこし意味がある。

事実 3.2.2 勝手な群 G に対して、その一次元既約表現達は、かけ算のもとで群をなす。その群を \hat{G} と書く。 G が可換群のとき、 \hat{G} を G のポントリャーギン双対群 (Pontryagin dual group) という。

証明は簡単である。一次元表現とは単に 1×1 行列だから単に複素数一個である。一次元表現 $\chi, \chi' : G \rightarrow \mathbb{C}$ が与えられた時に、 $(\chi\chi')(g) := \chi(g)\chi'(g)$ が表現になることは簡単に確認できる。自明な表現 $\hat{e} : G \rightarrow \mathbb{C}$ を $\hat{e}(g) = 1$ で定めるとこれは表現であって、 \hat{G} の単位元になる。 $\chi^{-1}(g) := \chi(g)^{-1}$ と定めると(ここで χ^{-1} は χ の逆写像でないことに注意) これも表現であり、 \hat{G} の中で χ の逆元になる、等。

実際、上記の \mathbb{Z}_n の場合では、 $\chi_k \chi_{k'} = \chi_{k+k'}$ で、添え字は $\text{mod } n$ で考えればよい。これから、抽象的な群として $\hat{\mathbb{Z}}_n = \mathbb{Z}_n$ がわかった⁵⁸。

一般の可換群 G では $\hat{G} \neq G$ であることに注意しておく。

⁵⁸しかし、自然な (canonical な) 同型はとれないことが知られている、cf <https://mathoverflow.net/questions/282452/>

3.2.2 \mathbb{Z}_n の表現と離散フーリエ変換

さて、 $a: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$ なる勝手な関数を考える。これは

$$(a(0), a(1), \dots, a(n-1)) \in \mathbb{C}^n \quad (3.2.1)$$

という n 次元ベクトルと同じことである。 a, b を二つのそのような関数として、エルミート内積を

$$\langle a, b \rangle := \frac{1}{n} \sum_x \overline{a(x)} b(x) \quad (3.2.2)$$

と定める。上記既約表現 χ_k もそのような関数の一例であって、

$$\langle \chi_k, \chi_{k'} \rangle = \delta_{kk'} = \begin{cases} 1 & k = k' \\ 0 & k \neq k' \end{cases} \quad (3.2.3)$$

を満たすことが計算すればすぐわかる。いいかえれば、 χ_k は $a: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$ なる関数のなす n 次元ベクトル空間の基底をなす。そのため、勝手な a は

$$a = \sum_k \hat{a}(k) \chi_k \quad (3.2.4)$$

と展開出来る。この両辺と $\chi_{k'}$ の内積をとれば、

$$\hat{a}(k) = \langle \chi_k, a \rangle = \frac{1}{N} \sum_x e^{-2\pi i k x / n} a(x) \quad (3.2.5)$$

であることがわかる。逆変換は (3.2.4) そのもので、

$$a(x) = \sum_k \hat{a}(k) \chi_k(x) = \sum_k e^{2\pi i k x / n} \hat{a}(k) \quad (3.2.6)$$

である。これは離散フーリエ変換 (discrete Fourier transform) と呼ばれるもので、 $a: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{C}$ なる関数と $\hat{a}: \hat{\mathbb{Z}}_n \rightarrow \mathbb{C}$ なる関数を結びつけるものである。

3.2.3 高速フーリエ変換

さて、離散フーリエ変換は応用上非常に重要である。(時系列のデータをフーリエ変換して周波数空間にうつすのは物理屋なら誰しも重要なのはわかるだろうが、実際上のデータは連続では無くて離散なので。) そこで、この離散フーリエ変換を速く計算することはとても意味がある。ナイーブには n^2 回のかけ算が必要であるが、高速フーリエ変換 (fast Fourier transformation) という標準的なテクニックがあり、 $O(n \log n)$ 回まで減らすことができる。

この概要を説明しよう。 N と M が互いに素なばあい、 $\mathbb{Z}_{NM} \simeq \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ であるということを以前やった。これは単に中国剰余定理である。離散フーリエ変換は \mathbb{Z}_{NM} 上の関数を $\hat{\mathbb{Z}}_{NM}$ 上の関数にうつす操作である。これを一気にやらず、

$$\mathbb{Z}_{NM} \simeq \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M \rightsquigarrow \hat{\mathbb{Z}}_N \times \mathbb{Z}_M \rightsquigarrow \hat{\mathbb{Z}}_N \times \hat{\mathbb{Z}}_M \simeq \hat{\mathbb{Z}}_{NM} \quad (3.2.7)$$

とやることにする。 \mathbb{Z}_N 上の離散フーリエ変換にかかる計算量を $f(N)$ とすると、一回目の \rightsquigarrow には $Mf(N)$ ぐらいの計算量がかかり、二回目の \rightsquigarrow には $Nf(M)$ ぐらいの計算量がかかる。 $N \sim M \sim \sqrt{NM}$ ぐらいにとれたとすると、

$$f(N^2) \sim Nf(N) \quad (3.2.8)$$

なので、 $f(N) \sim N \log N$ ぐらいだということがわかった。

具体的に式を書くため、

$$\mathbb{Z}_{NM} \ni x = x_1 M + x_2 N, \quad x_1 \in \mathbb{Z}_N, \quad x_2 \in \mathbb{Z}_M \quad (3.2.9)$$

と中国剰余定理で分解し、

$$\widehat{\mathbb{Z}}_{NM} \ni k = k_1 S M + k_2 T N, \quad k_1 \in \widehat{\mathbb{Z}}_N, \quad k_2 \in \widehat{\mathbb{Z}}_M \quad (3.2.10)$$

とする。ただし、 $S, T \in \mathbb{Z}_{NM}$ は

$$S M = 1 \pmod{N}, \quad T N = 1 \pmod{M} \quad (3.2.11)$$

となるように選んでおく。(ここで N, M が互いに素という条件が必要。) すると、

$$\frac{xk}{NM} = \frac{x_1 k_1}{N} + \frac{x_2 k_2}{M} \pmod{1} \quad (3.2.12)$$

となる。そうすると、 $a: \mathbb{Z}_{NM} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、

$$\widehat{a}(k) = \frac{1}{MN} \sum_x e^{-2\pi i \frac{xk}{NM}} a(x) \quad (3.2.13)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{x_2} e^{-2\pi i \frac{x_2 k_2}{M}} \left(\frac{1}{N} \sum_{x_1} e^{-2\pi i \frac{x_1 k_1}{N}} a(x) \right) \quad (3.2.14)$$

となった。内側で $\mathbb{Z}_N \rightsquigarrow \widehat{\mathbb{Z}}_N$ をし、外側で $\mathbb{Z}_M \rightsquigarrow \widehat{\mathbb{Z}}_M$ をする。これが **Good-Thomas アルゴリズム** である。

さらに応用上は、コンピュータだから $N = 2^n$, $M = 2^m$ として $N = 2^{n+m}$ の場合を考えることがおおい。この場合は N と M は互いに素ではないので修正が必要である。この場合は

$$\mathbb{Z}_{NM} \ni x = x_1 2^m + x_2, \quad x_1 \in \mathbb{Z}_{2^n}, \quad x_2 \in \mathbb{Z}_{2^m} \quad (3.2.15)$$

とし、

$$\widehat{\mathbb{Z}}_{NM} \ni k = k_1 + k_2 2^n, \quad k_1 \in \mathbb{Z}_{2^n}, \quad k_2 \in \mathbb{Z}_{2^m} \quad (3.2.16)$$

とする。すると

$$\frac{xk}{NM} = \frac{x_1 k_1}{N} + \frac{x_2 k_2}{M} + \frac{x_2 k_1}{NM} \pmod{1} \quad (3.2.17)$$

となる。これより

$$\widehat{a}(k) = \frac{1}{MN} \sum_x e^{-2\pi i \frac{xk}{NM}} a(x) \quad (3.2.18)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{x_2} e^{-2\pi i \frac{x_2 k_2}{M}} e^{-2\pi i \frac{x_2 k_1}{NM}} \left(\frac{1}{N} \sum_{x_1} e^{-2\pi i \frac{x_1 k_1}{N}} a(x) \right) \quad (3.2.19)$$

これが **Cooley-Tukey アルゴリズム** である。

N, M が互いに素な場合と比べて、途中に $e^{-2\pi i \frac{x_2 k_1}{NM}}$ という (twiddle factor と業界では呼ばれるらしい) 因子を掛けるところが異なる。あとで射影表現をやるところで、twiddle factor のあるなしは

$$\mathbb{Z}_N \hookrightarrow \mathbb{Z}_{NM} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_M \quad (3.2.20)$$

が直積か直積でないか、 \mathbb{Z}_M の \mathbb{Z}_N による拡大が自明か自明でないかを反映していることを学ぶだろう。

3.2.4 \mathbb{Z} の表現と $U(1)$ の表現

次に $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ のユニタリ表現を考えよう。 $\rho(n) = \rho(1)^n$ だから、 $\rho(1)$ を決めれば良いが、これは対角化すれば一次元表現の直和であることがわかる。 ρ が一次元表現の場合、 $\alpha := \rho(1) \in \mathbb{C}$ はユニタリだから絶対値が 1 でないといけない。これで次のことがわかった:

事実 3.2.3 群 \mathbb{Z} の既約表現は全て一次元で、 α を絶対値が 1 の複素数として

$$\chi_\alpha(n) = \alpha^n$$

と掛ける。

いま $\chi_\alpha \chi_\beta = \chi_{\alpha\beta}$ であるから、これら一次元表現は絶対値が 1 の複素数がかけ算のもとでなす群 $U(1)$ をなす。これより次のことがわかった:

事実 3.2.4 $\widehat{\mathbb{Z}} = U(1)$ である。

次に $U(1)$ のユニタリ表現を考えよう。 $e^{it} \in U(1)$ に対して、 $\rho(e^{it})$ という $n \times n$ ユニタリ行列があるわけだが、これは何か $n \times n$ エルミート行列 H があって

$$\rho(e^{it}) = e^{itH} \quad (3.2.21)$$

と掛けるはずである。すると、 H を対角化すれば、 $\rho(e^{i\theta})$ も対角化されて、一次元表現の直和に分解する。一次元表現だとすると、対応する H の固有値を E とかけば

$$\rho(e^{it}) = e^{itE} \quad (3.2.22)$$

であるが、 $t = 2\pi$ のときは $e^{2\pi i} = 1$ は単位元であるため、 $e^{2\pi i E}$ も 1 でなければならない。よって n を整数として $E = n$ と掛ける。これによって次のことがわかった:

事実 3.2.5 群 $U(1)$ の既約表現は全て一次元で、整数 n に対して

$$\chi_n(\alpha) = \alpha^n$$

と書ける。ただし $\alpha \in U(1)$ は絶対値 1 の複素数。

また、 $\chi_n \chi_m = \chi_{n+m}$ であるから、次のことがわかった:

事実 3.2.6 $\widehat{U(1)} = \mathbb{Z}$ である。

実は一般に次の事実が成り立つ:

事実 3.2.7 可換群 G に対し自然に $\widehat{\widehat{G}} = G$ である。

これをおおまかに説明しよう。 \widehat{G} は G の一次元表現のなす群であるから、 $\widehat{\widehat{G}}$ は「 G の一次元表現のなす群」の一次元表現のなす群である。よって、 $\widehat{\widehat{G}}$ の元は、「 G の一次元表現のなす群」の一次元表現である。だから、 $\widehat{\widehat{G}} = G$ を示すには、 G の元が自然に「 G の一次元表現のなす群」の一次元表現を与えることをみればよい。そのためには、 $x \in G$ に対して、「 G の一次元表現のなす群」の一次元表現 \widehat{x} を

$$\widehat{\widehat{x}}(\chi) := \chi(x) \in \mathbb{C} \quad (3.2.23)$$

と定めれば良い。

3.2.5 周期関数のフーリエ変換について

群 $U(1)$ は複素平面内の単位円 S^1 である。その元を $e^{it} \in U(1)$ とかけば、 $t \sim t + 2\pi$ という周期境界条件のついた一次元的なものと思って良い。すると関数 $f: U(1) \rightarrow \mathbb{C}$ を考えるということは周期関数を考えるということである。一次元周期的な量子力学的粒子の波動関数と思って良い。物理屋の習慣にしたがって、これを $f(e^{it})$ とも $f(t)$ と書くことにする。そのような関数ふたつ f, g に対してエルミート内積を

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt \quad (3.2.24)$$

と定める。一次元表現 $\chi_n(t) = e^{int}$ はそのような関数の例であるが、正規直交基底になることがわかる:

$$\langle \chi_n, \chi_m \rangle = \begin{cases} 1 & (n = m), \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}. \quad (3.2.25)$$

よって勝手な関数 f は χ_n の重ね合わせとしてかける:

$$f(t) = \sum_n \hat{f}(n) \chi_n(t) = \sum_n \hat{f}(n) e^{int}. \quad (3.2.26)$$

$\hat{f}(n)$ を決定するには、両辺を χ_m との内積をとればよいので、

$$\hat{f}(n) = \langle \chi_n, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t) dt. \quad (3.2.27)$$

これはまさに周期関数のフーリエ変換の式であって、関数 $f: U(1) \rightarrow \mathbb{C}$ と関数 $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を対応させるものである。また、 $\widehat{U(1)} = \mathbb{Z}$ 、 $\widehat{\mathbb{Z}} = U(1)$ に注意せよ。

3.2.6 \mathbb{R} の表現と通常のフーリエ変換

次に \mathbb{R} の表現を考えよう。 $t \in \mathbb{R}$ が $n \times n$ ユニタリ行列 e^{itH} にうつされれるとする。エルミート行列 H を対角化すると、これは一次元表現の直和に分解する。 H の固有値を ω と書くと

事実 3.2.8 群 \mathbb{R} の既約表現は全て一次元で、実数 ω に対して

$$\chi_\omega(t) = e^{i\omega t}$$

と書ける。

$\chi_\omega \chi_{\omega'} = \chi_{\omega+\omega'}$ だから、 χ_ω 達はまた群 \mathbb{R} をなすことがわかる。すなわち

事実 3.2.9 $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ である。

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、内積を

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) dt \quad (3.2.28)$$

と定めると、 χ_ω 達は (δ 関数の意味で) 正規直交である:

$$\langle \chi_\omega, \chi_{\omega'} \rangle = 2\pi \delta(\omega - \omega'). \quad (3.2.29)$$

これから、

$$f(t) = \int \hat{f}(\omega) \chi_\omega \frac{d\omega}{2\pi} = \int \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3.2.30)$$

と

$$\hat{f}(\omega) = \langle \chi_\omega, f \rangle = \int f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.2.31)$$

という対応があることがわかった。これは通常のフーリエ変換である。

3.2.7 標語

標語にまとめると情報量が落ちるので僕はそれほど好きでは無いが、これまでみてきたことは次のようにまとめられる。

可換群の表現はいつでも一次元既約表現の直和に分解できる。というのは、 $g \in G$ に対して $\rho(g)$ 達はすべて交換するから、同時固有空間を考えればいいのである。

フーリエ変換とは、可換群 G 上の関数をその一次元表現達で展開することで、展開係数は一次元表現のなす可換群 \hat{G} 上の関数である。 $\hat{G} = G$ なので、もういちどフーリエ変換をすると G 上の関数が再構成される。

3.3 有限群の表現

これまで可換群の表現についてすこし調べたので、非可換群の表現について考えよう。

3.3.1 例1: D_8

いつも例につかっている二面体群 D_8 を考える。元は

$$\begin{array}{cccc} e, & a, & a^2, & a^3 \\ x, & xa, & xa^2, & xa^3 \end{array} \quad (3.3.1)$$

で、 $a^4 = x^2 = e$, $xa x^{-1} = a^{-1}$ という関係式だった。

ユニタリ表現にはどのようなものがあるだろうか？ まず、一次元表現として

$$\rho_{++}(a) = +1, \quad \rho_{+-}(a) = +1, \quad \rho_{-+}(a) = -1, \quad \rho_{--}(a) = -1, \quad (3.3.2)$$

$$\rho_{++}(x) = +1, \quad \rho_{+-}(x) = -1, \quad \rho_{-+}(x) = +1, \quad \rho_{--}(x) = -1 \quad (3.3.3)$$

で定まる $\rho_{\pm\pm}$ の四つがある。また、そもそも二面体群は平面内の正多角形に作用するのだから、

$$\rho_2(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3.4)$$

で定まる二次元表現がある。実はこれで既約表現が尽きている。

3.3.2 例2: Q_8

次に四元数群 (quaternion group) Q_8 と呼ばれる群を考える。これは、四元数 \mathbb{H} の中で $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ が積のもとでなす群である。四元数のかけ算ルールは $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ だった。

Q_8 と D_8 は異なる群である。たとえば、二乗して単位元になる元は Q_8 ではふたつ (± 1 のみ) だが、 D_8 では (a, a^{-1} 以外の) 六つある。

一次元表現 σ は、 $\sigma(ij) = \sigma(-ji)$ から $\sigma(-1) = \sigma(ij)/\sigma(ji) = 1$ となるので、

$$\sigma_{++}(i) = +1, \quad \sigma_{+-}(i) = +1, \quad \sigma_{-+}(i) = -1, \quad \sigma_{--}(i) = -1, \quad (3.3.5)$$

$$\sigma_{++}(j) = +1, \quad \sigma_{+-}(j) = -1, \quad \sigma_{-+}(j) = +1, \quad \sigma_{--}(j) = -1, \quad (3.3.6)$$

$$\sigma_{++}(k) = +1, \quad \sigma_{+-}(k) = -1, \quad \sigma_{-+}(k) = -1, \quad \sigma_{--}(k) = +1 \quad (3.3.7)$$

の四通りがある。

また、そもそも四元数の定義のひとつとして、パウリ行列を使うものもあったことを思い出すと、

$$\sigma_2(i) = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2(j) = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2(k) = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.3.8)$$

という二次元表現もある。

この場合もこれで既約表現は尽きていることが知られている。

3.3.3 一般論

一般の有限群 G の既約表現を調べるにはどうしたらよいだろうか? そのために、 G 上の関数 $a: G \rightarrow \mathbb{C}$ のなす線形空間 R_G を考えるのが有効である。 R_G の元二つ a, b に対し、内積を

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{a(g)} b(g) \quad (3.3.9)$$

で定める。つぎに、与えられた a に対し、 $\rho(h)a: G \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$(\rho(h)a)(g) = a(gh) \quad (3.3.10)$$

で定める。これは線形写像で、かつ長さを保つ。そこで、

定義 3.3.1 G 上の関数 $a: G \rightarrow \mathbb{C}$ のなす線形空間 R_G は、上記の ρ のもとで G のユニタリ表現になる。これを G の正則表現 (regular representation) と呼ぶ。

これから以下の定理を導く:

事実 3.3.2 群 G の異なる既約表現を V_1, \dots, V_k と全て列挙し、それぞれの次元を n_k とする。このとき、正則表現 R_G は

$$R_G = \underbrace{V_1 \oplus \dots \oplus V_1}_{n_1 \text{ 回}} \oplus \underbrace{V_2 \oplus \dots \oplus V_2}_{n_2 \text{ 回}} \oplus \dots \oplus \underbrace{V_k \oplus \dots \oplus V_k}_{n_k \text{ 回}}$$

と分解される。特に、 $|G| = \sum n_i^2$.

これを認めると、 $|D_8| = |Q_8| = 8$ で、 $8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$ なので、これ以外に既約表現がないことがわかる。

定理を証明しよう。

Step 1: 勝手な既約表現 V_i を n_i 回 R_G に埋め込む。 G の既約ユニタリ表現 (V, σ) を考える。その次元を n とする。 $\langle e | \in V$ をノンゼロの元とし、線形写像

$$f_e : V \rightarrow R_G \quad (3.3.11)$$

を

$$f_e(v) = \langle e | \sigma(g) | v \rangle \quad (3.3.12)$$

で定める。

- まず、この線形写像が(定数倍を除いて)長さを保つことをしめそう。そのために

$$\langle f_e(v), f_{e'}(v') \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\langle e | \sigma(g) | v \rangle} \langle e' | \sigma(g) | v' \rangle \quad (3.3.13)$$

$$= \langle v | \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) | e \rangle \langle e' | \sigma(g) \right) | v' \rangle \quad (3.3.14)$$

を考える。括弧内の演算子

$$O_{e,e'} := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) | e \rangle \langle e' | \sigma(g) \quad (3.3.15)$$

は

$$\sigma(h^{-1}) O_{e,e'} \sigma(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(h^{-1} g^{-1}) | e \rangle \langle e' | \sigma(gh) = O_{e,e'} \quad (3.3.16)$$

である。よってSchur の補題によりこれは定数倍 $c_{e,e'}$ である。これを決めるには

$$c_{e,e'} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sigma(g^{-1}) | e \rangle \langle e' | \sigma(g) \quad (3.3.17)$$

の両辺のトレースをとればよい:

$$c_{e,e'} = \frac{1}{n} \langle e' | e \rangle. \quad (3.3.18)$$

- 次に、この線形写像が G の作用を保つことを示そう。これは直接

$$f_e(\sigma(h)v)(g) = \langle e | \sigma(g) \sigma(h) | v \rangle = (\rho(h)f_e)(v)(g) \quad (3.3.19)$$

であるから、

$$f_e \sigma(h) = \rho(h) f_e \quad (3.3.20)$$

と確認出来る。

以上のことから、 e_1, \dots, e_n を V の正規直交基底として、 $V^{(i)}$ を $f_{e_i} : V \rightarrow R_G$ の像とすると、 $V^{(i)}$ はそれぞれ G の既約表現で、また直交していることがわかる。これから、 R_G は V と同値な既約表現を n_i コピー含んでいることがわかった。

これで、 R_G は

$$\underbrace{V_1 \oplus \dots \oplus V_1}_{m_1 \text{回}} \oplus \underbrace{V_2 \oplus \dots \oplus V_2}_{m_2 \text{回}} \oplus \dots \oplus \underbrace{V_k \oplus \dots \oplus V_k}_{m_k \text{回}} \quad (3.3.21)$$

ただし $m_i \geq n_i$ 、というところまで証明出来た。

Step 2: これで尽きていることを示す。ここで、 $V^{(i)}$ の元についてより丁寧にみておくと、 $V^{(i)} \subset R_G$ だから、これも $G \rightarrow \mathbb{C}$ なる関数である。どんな関数かというと、 $f_{e_i}(g) = \langle e_i | \sigma(g) | v \rangle$ だった。よって、 $V^{(i)}$ の基底としては、関数 $f_{i,j}^V(g) := \langle e_i | \sigma(g) | e_j \rangle$ が取れる。すなわち、 $V^{(1)} \oplus \cdots \oplus V^{(n)}$ は、 $\sigma(g)$ の n^2 個の行列要素 $f_{i,j}^V \langle e_i | \sigma(g) | e_j \rangle$ が張る R_G の部分空間である。

そこで、証明を完成するには、 $a \in R_G$ が勝手な既約表現 (V, σ) に対する行列要素 $f_{i,j}^V$ と内積がゼロならば、 $a = 0$ であることを示せばよい。

そのため、まず既約表現 (V, σ) に対し、 $\sum_g \overline{a(g)} \sigma(g)$ という元を考える。これは $n \times n$ 行列だが、その (i, j) 行列要素は

$$\langle e_i | \sum_g a(g) \sigma(g) | e_j \rangle = |G| \langle a, f_{i,j}^V \rangle = 0 \quad (3.3.22)$$

となる。よって、 $\sum_g \overline{a(g)} \sigma(g)$ は行列としてゼロである。

しかし、何にせよ (3.3.21) は成り立っているので、これから、 $\sum_g \overline{a(g)} \rho_{\text{regular}}(g)$ が行列としてゼロであるということである。これから、 $a(g) = 0$ が従う。これが示したいことだった。

証明の過程で、つぎの事実も示せた：

事実 3.3.3 群 G 上の関数 $a : G \rightarrow \mathbb{C}$ のなすベクトル空間の中の直交基底として、各既約表現 $(V_\alpha, \sigma_\alpha)$ ($\alpha = 1, \dots$) の行列要素

$$f_{i,j}^\alpha(g) := \langle e_i | \sigma_\alpha(g) | e_j \rangle$$

を取れる、但し n_α を V_α の次元として、添え字は $i, j = 1, \dots, n_\alpha$ 。また基底の長さは

$$\langle f_{i,j}^\alpha, f_{i,j}^\alpha \rangle = 1/n_\alpha$$

で与えられる。

これは少し前にみた \mathbb{Z}_n の表現 $\chi_k(x) = e^{2\pi i k x / n}$ が \mathbb{Z}_n 上の線形空間の正規直交基底になっていることの一般の群への拡張である。

3.3.4 群の指標

さて、行列要素 $f_{i,j}^\alpha$ を全部考えるとちょっと情報量が多い。もうすこし荒い量として次のものがある：

定義 3.3.4 群 G の表現 (V, ρ) に対し、その指標 (character) χ_ρ を

$$\chi_\rho(g) = \text{tr } \rho(g)$$

と定める。

すぐに分かるように、 $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$ である。すなわち、 g と g' が共役なら χ_ρ は同じ値を取る。言い換えれば、 χ_ρ は群の共役類のうえの関数である。共役類の集合を C_G とかこう。

定義 3.3.5 $a : G \rightarrow \mathbb{C}$ で $a(hgh^{-1}) = a(g)$ を満たすものを類関数 (class function) と言う。類関数のなす線形空間の次元は C_G である。

さて、既約表現 $(V_\alpha, \sigma_\alpha)$ に対しその指標を χ_α とかくと、

$$\chi_\alpha(g) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} f_{i,i}^\alpha(g) \quad (3.3.23)$$

である。ベクトルとしては、 $\chi_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} f_{i,i}^\alpha$ 。これより、 $\langle \chi_\alpha, \chi_\alpha \rangle = 1$ 。また異なる既約表現 V_α, V_β に対しては $\langle \chi_\alpha, \chi_\beta \rangle = 0$ 。これから、異なる既約表現の数 $\leq |C_G|$ が分かった。実はこれは丁度等しい。そのためには、類関数 $a : G \rightarrow \mathbb{C}$ が勝手な指標と直交する場合、 a がゼロであることを言えば良い。証明の方針はおなじで、既約表現 V_α に対し $O := |G|^{-1} \sum_g a(g) \sigma(g)$ を考える。類関数であるから、 $\sigma(h)O\sigma(h^{-1}) = O$ である。シューアの補題により、 O は定数倍 c である。トレースをとると、 $c = n^{-1} \langle \bar{a}, \chi_\alpha \rangle = 0$ となる。これが勝手な V_α に対して成立するので、 $\sum_g a(g) r_{\text{regular}}(g)$ もゼロである。よって $a(g) = 0$ がわかった。まとめると：

事実 3.3.6 類関数の正規直交基底として、異なる既約表現の指標 χ_α がとれる：

$$\langle \chi_\alpha, \chi_\beta \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_\alpha(g)} \chi_\beta(g) = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta), \\ 0 & (\alpha \neq \beta). \end{cases}$$

特に、異なる既約表現の種類数は、共役類の数 $|C_G|$ に等しい。

D_8 の共役類は $[e], [a^2], [a], [xa], [x]$ で五つ、 Q_8 の共役類は $[+1], [-1], [i], [j], [k]$ の五つで、確かにこうなっている。

ここでみた正規直交性は、

$$\sum_{[g] \in C_G} \frac{x_g}{|G|} \overline{\chi_\alpha(g)} \chi_\beta(g) = \begin{cases} 1 & (\alpha = \beta), \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad (3.3.24)$$

とも書ける。ただし x_g は g と共役な元の数。これは、行列 $X_{\alpha[g]} = \chi_\alpha([g])$ を $|C_G| \times |C_G|$ 行列だと思ったとき、 $D_{[g][g']} = \delta_{[g][g']} x_g / |G|$ とすると、 $I = XDX^\dagger$ ということだから、 $X^\dagger X = D^{-1}$ 、すなわち

事実 3.3.7 指標は次の直交性も満たす：

$$\sum_\alpha \overline{\chi_\alpha(g)} \chi_\alpha(g') = \begin{cases} |G|/x_g & ([g] = [g']), \\ 0 & ([g] \neq [g']). \end{cases}$$

ここで $[g] = [h]$ とは g と h が共役だということ。

3.3.5 群の指標の例: D_8 と Q_8

上で見た D_8 と Q_8 について指標の表をかいてみよう。まず D_8 については、Sec. 3.3.1 の

具体的な記述から

	$[e]$	$[a^2]$	$[a]$	$[x]$	$[xa]$
ρ_{++}	1	1	1	1	1
ρ_{+-}	1	1	1	-1	-1
ρ_{-+}	1	1	-1	1	-1
ρ_{--}	1	1	-1	-1	1
ρ_2	2	-2	0	0	0

(3.3.25)

となる。次に Q_8 については Sec. 3.3.2 の具体的な記述から

	$[1]$	$[-1]$	$[i]$	$[j]$	$[k]$
σ_{++}	1	1	1	1	1
σ_{+-}	1	1	1	-1	-1
σ_{-+}	1	1	-1	1	-1
σ_{--}	1	1	-1	-1	1
σ_2	2	-2	0	0	0

(3.3.26)

となる。前節でやった直交性を確認するのはよい練習になる。

D_8 と Q_8 は異なる群だが、指標表は全く同じになってしまった。これより、指標を知るだけでは群は再構成できないことがわかる。

3.3.6 表現のテンソル積と指標

群 G とその表現 (V, ρ) , (W, σ) に対し、その直和 $(V \oplus W, \rho \oplus \sigma)$ はすでに導入した。 V の基底を e_1, \dots, e_n , W の基底を f_1, \dots, f_m に対して $V \oplus W$ の基底は $e_1, \dots, e_n; f_1, \dots, f_m$ なので、 $V \oplus W$ の次元は V と W の次元の和である。

量子力学では、これは、一つ系の状態空間を対称性 G の作用の仕方で分解することに対応する。

ふたつの表現に対し、そのテンソル積 (tensor product) を考えることもできる。ベクトル空間 V と W に対し、そのテンソル積 $V \otimes W$ は次のように定義されるのだった: V の基底を e_1, \dots, e_n , W の基底を f_1, \dots, f_m に対して $V \otimes W$ の基底は $e_i \otimes f_j$ 。なので、 $V \otimes W$ の次元は V と W の次元の積である。

線形写像 $A: V \rightarrow V$ と $B: W \rightarrow W$ に対し、 $A \otimes B: V \otimes W \rightarrow V \otimes W$ は

$$v \otimes w \mapsto Av \otimes Bw \quad (3.3.27)$$

で定める。成分でかけば、

$$(AB)_{ij;i'j'} = A_{ii'}B_{jj'} \quad (3.3.28)$$

である。ただし $i, i' = 1, \dots, n$ で $j, j' = 1, \dots, m$ 。量子力学ではこれは部分系 V と W から合成系 $V \otimes W$ を作ることに対応する。

事実 3.3.8 群 G の表現 (V, ρ) と (W, σ) に対し、 $(V \otimes W, \rho \otimes \sigma)$ はまた表現になる。これをテンソル積表現という。

線形写像 A, B に対し、

$$\mathrm{tr}_{V \oplus W} A \oplus B = \mathrm{tr}_V A + \mathrm{tr}_W B, \quad \mathrm{tr}_{V \otimes W} A \otimes B = \mathrm{tr}_V A \times \mathrm{tr}_W B \quad (3.3.29)$$

であることは計算すればわかる。指標の定義を思い出すと、

事実 3.3.9 表現の直和とテンソル積の指標は、表現の指標の和と積であたえられる。
すなわち

$$\chi_{\rho \oplus \sigma}(g) = \chi_{\rho}(g) + \chi_{\sigma}(g), \quad \chi_{\rho \otimes \sigma}(g) = \chi_{\rho}(g)\chi_{\sigma}(g).$$

この関係式は、表現のテンソル積がどのように既約表現に分解されるかを調べるのに使うことができる。群 G の既約表現を $(V_{\alpha}, \rho_{\alpha})$ ($\alpha = 1, \dots, \ell$) とする。表現 (W_1, σ_1) と (W_2, σ_2) の積を考える。

$$W_1 \otimes W_2 \simeq \underbrace{V_1 \oplus \dots \oplus V_1}_{a_1 \text{ 回}} \oplus \underbrace{V_2 \oplus \dots \oplus V_2}_{a_2 \text{ 回}} \oplus \dots \oplus \underbrace{V_{\ell} \oplus \dots \oplus V_{\ell}}_{a_{\ell} \text{ 回}} \quad (3.3.30)$$

$$= a_1 V_1 \oplus a_2 V_2 \oplus \dots \oplus a_{\ell} V_{\ell} \quad (3.3.31)$$

と必ず書ける。ただし、 a_1, \dots, a_{ℓ} は0以上の整数で、二行目は一行目の略記。

a_{α} を読みとるには、まず両辺の指標をとって

$$\chi_{\sigma_1}(g)\chi_{\sigma_2}(g) = a_{\alpha}\chi_{\alpha}(g) \quad (3.3.32)$$

である。ただし $\chi_{\alpha}(g) = \text{tr}_{V_{\alpha}} \rho_{\alpha}(g)$ は α 番めの既約表現の指標。ここで、 χ_{α} が G 上の類関数の正規直交基底を与えることを思い出せば、両辺と $\chi_{\alpha'}$ との内積をとって、次のことがわかった:

事実 3.3.10 表現 (W_1, σ_1) と (W_2, σ_2) のテンソル積に既約表現 V_{α} があらわれる回数は

$$\langle \chi_{\alpha}, \chi_{\sigma_1} \chi_{\sigma_2} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{\alpha}(g)} \chi_{\sigma_1}(g) \chi_{\sigma_2}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{[g] \in C_G} x_g \overline{\chi_{\alpha}(g)} \chi_{\sigma_1}(g) \chi_{\sigma_2}(g)$$

で与えられる。ただし x_g は以前のとおり g と共役な元の数。

3.3.7 例: D_8 と Q_8 の既約表現のテンソル積

さて、上式をつかって既約表現のテンソル積の既約分解の例を考えよう。

D_8 の場合は、頑張って計算すると、

$$\rho_{a,b} \otimes \rho_{c,d} = \rho_{ac,bd}, \quad \rho_2 \otimes \rho_{a,b} = \rho_2, \quad \rho_2 \otimes \rho_2 = \rho_{++} \oplus \rho_{+-} \oplus \rho_{-+} \oplus \rho_{--} \quad (3.3.33)$$

となる。ただし、 $a, b, c, d \in +1, -1$ とした。

Q_8 の場合も、頑張って計算すると、

$$\sigma_{a,b} \otimes \sigma_{c,d} = \sigma_{ac,bd}, \quad \sigma_2 \otimes \sigma_{a,b} = \sigma_2, \quad \sigma_2 \otimes \sigma_2 = \sigma_{++} \oplus \sigma_{+-} \oplus \sigma_{-+} \oplus \sigma_{--} \quad (3.3.34)$$

となる。ただし、 $a, b, c, d \in \{+1, -1\} = \mathbb{Z}_2$ とした。

D_8 と Q_8 は異なる群であるにもかかわらずテンソル積の既約分解も全く同じだということがわかった。

また、どちらの場合も、二次元既約表現をわすれて一次元表現だけを考えると、かけ算ルールは $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ である。一般に、一次元既約表現に対し、表現とその指標は同じである。そこで同じ文字 χ を使うことにする。二つの一次元既約表現 χ, χ' に対し、そのテンソル積 $\chi \otimes \chi'$ は自動的に一次元で、指標は単に積になる。よって、一次元既約表現全体は群になるので、それを \hat{G} と書くのだった。これは自動的に可換群である。いまのばあい、 $\hat{D}_8 = \hat{Q}_8 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ だということがわかった。

3.3.8 対称テンソル表現、反対称テンソル表現

群 G の表現 (V, ρ) に対して、自分自身とのテンソル積 $V \otimes V$ に関しては、もうすこし細かい考察ができる。いま $V^2 := V \otimes V$ の元 $v \otimes w$ に対して、 $w \otimes v$ を与える作用 P を考える：

$$P : V^2 \ni v \otimes w \mapsto w \otimes v \in V^2 \quad (3.3.35)$$

量子力学では、対称性 G の表現 V にいる粒子がふたつあったばあいに、粒子を入れ替える操作である。ボゾンならば対称だから $P = +1$ 、フェルミオンならば反対称だから $P = -1$ でないといけない。 V^2 の中の対称な部分空間を $\text{Sym}^2 V$ 、反対称な部分空間を $\wedge^2 V$ と書くのが数学では普通である。

いれかえ P は G の作用と交換するから、 $\text{Sym}^2 V$ と $\wedge^2 V$ はそれぞれ G の表現になるはずであり、それぞれ既約分解できるはず。そのためには、 $\text{Sym}^2 V$ と $\wedge^2 V$ の指標がわかればよい。

これは次のトリックで計算できる。 $g \in G$ に対して、 $\rho(g)$ を対角化して、固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 、対応する固有ベクトルを e_1, \dots, e_n とする。 $\chi_V(g) = \sum \lambda_i$ である。

さて、 V^2 への g の作用は固有値 $\lambda_i \lambda_j$ で $e_i \otimes e_j$ に作用する。一方、 $\text{Sym}^2 V$ の基底は $e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i$ ($i \leq j$)、一方、 $\wedge^2 V$ の基底は $e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i$ ($i < j$) である。よって、

$$\chi_{\text{Sym}^2 V}(g) = \sum_{i \leq j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_i \lambda_i \right)^2 + \sum_i \lambda_i^2 \right) = \frac{1}{2} [\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)], \quad (3.3.36)$$

$$\chi_{\wedge^2 V}(g) = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_i \lambda_i \right)^2 - \sum_i \lambda_i^2 \right) = \frac{1}{2} [\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)] \quad (3.3.37)$$

がわかった。まとめると、

事実 3.3.11 群 G の表現 (V, ρ) に対して、対称テンソル表現 $\text{Sym}^2 V$ および反対称テンソル表現 $\wedge^2 V$ の指標は次の式で与えられる：

$$\chi_{\text{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{2} [\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)], \quad \chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2} [\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)].$$

指標がわかれば、既約表現に分解することも内積をとれば出来る。 D_8, Q_8 の二次元既約表現に関してはつぎの結果を得る：

$$\text{Sym}^2 \rho_2 = \rho_{++} \oplus \rho_{--} \oplus \rho_{-+}, \quad \wedge^2 \rho_2 = \rho_{+-}, \quad (3.3.38)$$

$$\text{Sym}^2 \sigma_2 = \sigma_{+-} \oplus \sigma_{-+} \oplus \sigma_{--}, \quad \wedge^2 \sigma_2 = \sigma_{++}, \quad (3.3.39)$$

これより、 D_8 と Q_8 で異なる結果が得られた。

3.3.9 複素共役表現

群 G の表現 (V, ρ) に対して、 $v \in V$ の成分にすべて複素共役をつけたもののなすベクトル空間を \bar{V} と書き、 $\rho(g) : V \rightarrow V$ の行列表示の成分をすべて複素共役にしたものを $\bar{\rho}(g) : \bar{V} \rightarrow \bar{V}$ とする。あきらかに $\bar{\rho}(gh) = \bar{\rho}(g)\bar{\rho}(h)$ なので、これも表現になる。

定義 3.3.12 群 G の表現 (V, ρ) に対して、 $(\bar{V}, \bar{\rho})$ を共役表現という。

既約表現の共役表現は既約表現である。また、共役表現の指標は表現の指標の複素共役である。

次の基本的な事実がある：

事実 3.3.13 既約表現 (V, ρ) と、その複素共役表現 $(\bar{V}, \bar{\rho})$ に対し、 $V \otimes \bar{V}$ にはかならず一回だけ自明な表現が含まれる。

自明な表現というのは $\chi_1(g) = 1$ で定まる一次元表現だった。これを示すには、前々節の公式から

$$\langle \chi_1, \chi_\rho \chi_{\bar{\rho}} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_1(g) \chi_\rho(g) \overline{\chi_{\bar{\rho}}(g)} = \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1. \quad (3.3.40)$$

具体的にこの自明な表現を $V \otimes \bar{V}$ の中で特定しよう。 V の基底を e_i , \bar{V} の基底を \bar{e}_i とする。 $V \otimes \bar{V}$ の基底は $e_i \otimes \bar{e}_j$ である。 $\rho(g)$ の行列表示を $\rho(g)_{ij}$ とすると、 $e_i \otimes \bar{e}_k$ には $g \in G$ は

$$e_i \otimes \bar{e}_k \mapsto \sum_{jl} \rho(g)_{ij} \bar{\rho}(g)_{kl} e_j \otimes \bar{e}_l \quad (3.3.41)$$

と作用する。そこで $V \otimes \bar{V}$ の元

$$\delta := \sum_i e_i \otimes \bar{e}_i \quad (3.3.42)$$

を考えると、

$$\delta \mapsto \sum_i \sum_{jl} \rho(g)_{ij} \bar{\rho}(g)_{il} e_j \otimes \bar{e}_l = \delta \quad (3.3.43)$$

となった。 i の和は $\rho(g)$ を複素共役して転置して作用していることになって $\rho(g)_{ij}$ はユニタリ行列であることを思い出せば取れる。

3.3.10 実表現

つぎに実表現について考える：

定義 3.3.14 $V \simeq \bar{V}$ のとき、 V を(広い意味での)実表現 (real representation) という。

「広い意味での」とつけた理由はすぐに説明する。

例として、 \mathbb{Z}_n の表現 $\chi_k(x) := e^{2\pi i k x / n}$ に対しては、 $\bar{\chi}_k = \chi_{-k}$ である。 よって、 $k = 0$ はいつでも実表現、 $n = 2N$ なら χ_N も実表現。 それ以外はすべて複素表現である。

また、 D_8 と Q_8 に関しては、上でみた指標表がすべて実数だから、すべて $\bar{\rho} \simeq \rho$, $\bar{\sigma} \simeq \sigma$ となっており、すべて広い意味での実表現である。

D_8 の既約表現 ρ_2 の行列表示は成分すべてが実である。 だから $\rho_2 = \bar{\rho}_2$ なのはあたりまえである。 Q_8 の既約表現 σ_2 の行列表示はかならずしも成分すべては実でない。 どのように基底をとりかえても、行列表示を実には出来ないことが知られている。

このことをきちんと調べよう。 まず、一般に、 $\kappa: V \rightarrow \bar{V}$ を成分全部に複素共役をつける自然な写像とする。 これは反ユニタリである：

$$\kappa c v = \bar{c} \kappa v. \quad (3.3.44)$$

また、あたりまえだが、

$$\kappa \rho(g) = \bar{\rho}(g) \kappa \quad (3.3.45)$$

である。さて、広い意味で (V, ρ) が実だとする。これは $V \simeq \bar{V}$ ということだから、基底の取り換え行列 $M: \bar{V} \rightarrow V$ があって

$$M\bar{\rho}(g) = \rho(g)M \quad (3.3.46)$$

ということである。 M はユニタリである。すると、 κ と M を組み合わせて、

$$\tau = M\kappa: V \rightarrow V \quad (3.3.47)$$

という反ユニタリ写像があって、

$$\tau\rho(g) = \rho(g)\tau \quad (3.3.48)$$

である。

さて、いま V がさらに既約だとする。すると $\tau^2: V \rightarrow V$ はユニタリでかつ

$$\tau^2\rho(g) = \rho(g)\tau^2 \quad (3.3.49)$$

をみtas。よってシューアの補題より $\tau^2 = c$ 、ただし c は絶対値 1 の実数である。実は $c = \pm 1$ である。なぜなら

$$c\tau = (\tau^2)\tau = \tau^3 = \tau(\tau^2) = \tau c \quad (3.3.50)$$

であるが、 τ は反ユニタリだから

$$\bar{c}\tau = \tau c \quad (3.3.51)$$

であるので、 $c = \bar{c}$ となるからである。よって、実既約表現には $\tau^2 = \pm 1$ の二つの種類がある。

$\tau^2 = 1$ のばあいには、勝手なベクトル $v \in V$ は

$$v = w + w', \quad w = \frac{v + \tau v}{2}, \quad w' = \frac{v - \tau v}{2} \quad (3.3.52)$$

と分解できて、 $\tau w = w$ 、 $\tau w' = -w'$ なので、複素ベクトル空間 V は実な部分

$$W = \{w \in V \mid w = \tau w\} \quad (3.3.53)$$

と純虚な部分

$$W' = \{w' \in V \mid w' = -\tau w'\} \quad (3.3.54)$$

に分解することができる。 W は実ベクトル空間である。そうすると $\rho(g): W \rightarrow W$ だから、これは実ベクトル空間から実ベクトル空間への写像なので、行列表示は成分がすべて実である。また逆に、適切な基底をとって行列表示の成分がすべて実になれるような表現であれば、 $\tau: V \rightarrow V$ をその基底において複素共役をとる写像とさだめると、当然 $\tau^2 = 1$ である。

よって、 $\tau^2 = 1$ である広い意味での実表現は、実際に基底を適切にとって実行列で書ける表現のことだとわかった。これを狭義の実表現 (strictly real representation) という。

$\tau^2 = -1$ を満たす広い意味での実表現は、そういうことができない変な表現である。これを擬実表現 (pseudoreal representation) という。 Q_8 の σ_2 は擬実表現である。実際、

$$\tau \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} \quad (3.3.55)$$

と定めると、

$$\sigma_2(g)\tau = \tau\sigma_2(g) \quad (3.3.56)$$

が計算で確認できるが、この τ は $\tau^2 = -1$ をみたす。

そもそも、擬実表現 (V, ρ) に対して、 $j = \tau$ と定めると、 $i^2 = j^2 = -1$, $ij = -ji$ を満たす。そこで $k := ij$ と定めると、 i, j, k は四元数の関係式をみたし、これらは $\rho(g)$ と交換する。よって、 V は四元数ベクトル空間だと思える。この理由から、擬実表現は四元数表現とも呼ばれる。まとめると：

事実 3.3.15 既約表現 (V, ρ) が広い意味で実 $V \simeq \bar{V}$ というのは、自然な反ユニタリ写像 $\tau: V \rightarrow V$ があって ρ と交換するということである。それには二通りある：

- $\tau^2 = 1$ であるものを狭義の実表現 (strictly real representation) と呼び、行列表示の成分がすべて実数であるようにとれる。
- $\tau^2 = -1$ であるものを擬実表現 (pseudoreal representation) と呼び、実質四元数のうへの表現である。

3.3.11 時間反転とクラマース縮退

前節での考察は、時間反転対称性を量子力学で考える際に必要になる。古典力学的には、運動方程式は $t \rightarrow -t$ という時間反転の作用で対称であることが多い。これは x は固定するが $p \rightarrow -p$ となる。量子力学において時間反転が T という演算子であらわされるとすると、

$$T\hat{x}T^{-1} = \hat{x}, \quad T\hat{p}T^{-1} = -\hat{p} \quad (3.3.57)$$

であって欲しいが、 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ なので、これから

$$TiT^{-1} = -i \quad (3.3.58)$$

でなければ困ることになる。もっと一般に複素数 c に対して

$$Tc = \bar{c}T \quad (3.3.59)$$

となることになって、時間反転演算子 T は反ユニタリであることがわかった。

ヒルベルト空間の内積を $(|a\rangle, |b\rangle)$ と書くことにすると、ユニタリ変換 U は

$$(|a\rangle, |b\rangle) = (U|a\rangle, U|b\rangle) \quad (3.3.60)$$

を満たすが、反ユニタリ変換 T は

$$(|a\rangle, |b\rangle) = (T|b\rangle, T|a\rangle) \quad (3.3.61)$$

を満たす。これは、

$$(c|a\rangle, c'|b\rangle) = \bar{c}c'(|a\rangle, |b\rangle) \quad (3.3.62)$$

だったことを思い出せばわかる。 $|a\rangle = |\text{out}\rangle$, $|b\rangle = |\text{in}\rangle$ と書くと、(3.3.61) は

$$(|\text{out}\rangle, |\text{in}\rangle) = (T|\text{in}\rangle, T|\text{out}\rangle) \quad (3.3.63)$$

となって、in 状態と out 状態を入れ替えるので、これも時間反転らしい振舞いだと言える。ここで、bra を使わなかったのには理由がある。(3.3.61) を bra を使って書いてみて、どう混乱するか考えてみよう。

古典的には、時間反転は二回やるとともにもどる。量子力学では、状態ベクトルの複素数倍には意味がないので、何か複素数 c があって、 $T^2 = c$ となっているはずである。前と同じ議論により、 $T^2 = \pm 1$ であることになる。

考えている系が $T^2 = -1$ をみたすような時間反転対称性をもつとする。ハミルトニアン H は $TH = HT$ を満たす。さて、ひとつ H の固有状態 $H|a\rangle = E|a\rangle$ をとってくる。当然 $|b\rangle := T|a\rangle$ も $H|b\rangle = E|b\rangle$ を満たして同じエネルギーをもつ。ここで $|b\rangle$ と $|a\rangle$ は必ず異なる状態である、なぜなら

$$(|a\rangle, T|a\rangle) = (|a\rangle, |b\rangle) = (T|b\rangle, T|a\rangle) = (T^2|a\rangle, T|a\rangle) = -(|a\rangle, T|a\rangle) \quad (3.3.64)$$

より $(|a\rangle, |b\rangle) = 0$ だからである。

これより、 $T^2 = -1$ であるような時間反転対称性をもつ系の全ての固有状態は二重に縮退することがわかった。これを Kramers 縮退という。

ユニタリな対称性 G と時間反転対称性 T がある場合は、ヒルベルト空間 \mathcal{H} にはユニタリな $\rho(g)$ と反ユニタリな T が作用し、さらに $T\rho(g) = \rho(g)T$ を満たすことになる。こういうのを調べることは、結局 G の表現の(擬、狭義)実性を調べることになる。

3.3.12 実表現と対称性

広い意味での実表現が狭義実か擬実かという違いは、(反)対称性とも関係している。 V を既約表現とする。 $V \otimes \bar{V}$ にはかならず一回自明な表現が含まれることを以前みた。いま $V \simeq \bar{V}$ を実既約表現とする。すると $V \otimes \bar{V} \simeq V \otimes V$ なので、かならず一回自明な表現がそこに含まれる。しかし $V \otimes V = \text{Sym}^2 V \oplus \wedge^2 V$ なので、自明な表現は $\text{Sym}^2 V$ か $\wedge^2 V$ のどちらかにのみ含まれる。

どちらに含まれるかを考えるため、 $\tau: V \rightarrow V$ を群作用と交換する反ユニタリ演算子とする。 $\tau^2 = \pm 1$ である。 V のユニタリ内積を $\langle v, w \rangle$ と書くことにして、

$$(v, w) := \langle \tau v, w \rangle \quad (3.3.65)$$

を考えると、これは v, w の両方に線形になる。また、構成よりこれは G で不変である。だからこれは実質 $V \otimes V$ (の双対) で G 不変なものを定める。前節の計算から

$$\tau^2 = \pm 1 \quad \text{に応じて} \quad (v, w) = \pm (w, v) \quad (3.3.66)$$

と対称か反対称かが決まっている。

これより、狭義実なら $\text{Sym}^2 V$ に、擬実なら $\wedge^2 V$ に自明な表現が含まれることがわかった。また、複素表現ならどちらにも自明な表現は含まれない。一方、事実 3.3.11 より、 $\text{Sym}^2 V, \wedge^2 V$ に自明な表現が含まれる回数はそれぞれ

$$\frac{1}{|G|} \sum_g \frac{1}{2} [\chi_V(g)^2 \pm \chi_V(g^2)] = \frac{1}{2} [\langle \chi_{\bar{V}}, \chi_V \rangle \pm \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_V(g^2)] \quad (3.3.67)$$

である。これが $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ であるのを場合わけすれば、次の定理が示された:

事実 3.3.16 群 G の既約表現 (V, ρ) に対し、

$$S = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi_V(g^2)$$

は $0, 1, -1$ のどれかに限る。また、それぞれ V が複素表現、狭義実表現、擬実表現のときである。

S を Frobenius-Schur indicator と呼ぶ。

3.3.13 時間反転の混ざった群について

以上、群 G のユニタリ表現の狭義実性、擬実性をしらべるのは時間反転対称性 T とのかねあいが出てくることをみたが、実際の系ではもっとややこしい状況がありうる。たとえば、量子力学系のハミルトニアンで、時間反転を含む対称性があるが、 (t, \mathbf{x}) への作用がどうしても空間への非自明な作用 A を伴って

$$g : (t, \mathbf{x}) \mapsto (-t, A\mathbf{x}) \quad (3.3.68)$$

と作用することがある。この場合、 g^2 は

$$g^2 : (t, \mathbf{x}) \mapsto (t, A^2\mathbf{x}) \quad (3.3.69)$$

となって普通の対称性だが、 A^2 は自明な操作とは限らない。⁵⁹

抽象的には、群 G で、

$$G = G_0 \sqcup G_1 \quad (3.3.70)$$

と分解されていて、 G_0 は時間反転を含まない作用からなる部分群であり、 G_1 の元は時間反転を含む作用であって、 $\sigma \in G_1$ に対しいつでも $\sigma^2 \in G_0$ となっている。このとき、ヒルベルト空間には G_0 の元はユニタリに、 G_1 の元は反ユニタリに作用することになる。 $G = G_0 \times \mathbb{Z}_2$ のときは G_0 の通常の話に帰着する

こういうユニタリと反ユニタリのまじった表現にどのようなものがあるかを調べることは基本的な問題である。これは Wigner がその有名な教科書で既にほぼやってある。⁶⁰ 彼はこういう表現を complex conjugate representation だから co-representation と読んだが、その後の数学の発展で co-representation は全然別の意味を持つようになってそちらが主流なので、なかなか co-representation を検索してもこちらの話題が出てこない。

結論は $G = G_0 \times \mathbb{Z}_2$ のときとほぼ同じである。 G_0 の既約表現 V に対して、複素共役表現を $s \in G_1$ から定まる G_0 の自己同型で捻ったものを \tilde{V} と書く。定義から、反ユニタリな $\kappa : V \rightarrow \tilde{V}$ で

$$\tilde{\rho}(sgs^{-1})\kappa = \kappa\rho(g) \quad (3.3.71)$$

を満たす。

- $V \not\cong \tilde{V}$ のばあいが“複素表現”に相当して、対応する G の既約 co-表現は $V \oplus \tilde{V}$ である。

⁵⁹点群の拡張としては黒白群 (black-and-white group)、結晶群の拡張としては磁気空間群 (magnetic space group) という。三次元では磁気空間群は 1651 種類あるらしい。最近の物性理論の論文はたとえば [Watanabe-Po-Vishwanath, arXiv:1707.01903](#) などを見よ。

⁶⁰Wigner, “Group Theory and Its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra”, Academic Press.

- $V \simeq \tilde{V}$ の場合、反ユニタリな $\sigma: V \rightarrow V$ で

$$\rho(sgs^{-1})\sigma = \sigma\rho(g) \quad (3.3.72)$$

を満たすことになるから、 $\sigma^2 = \pm\rho(s^2)$ となることになる。

- この符号が $+$ のときが“狭義実”に相当し、対応する G の既約 co-表現は V そのもの、
- この符号が $-$ のときが“狭義実”に相当し、対応する G の既約 co-表現は $V \oplus V$

となる。Frobenius-Schur indicator の対応物もあり⁶¹、単に

$$S = \frac{1}{|G_0|} \sum_{g \in G_1} \chi_V(g^2) \quad (3.3.73)$$

を考えれば良い。 $S = 0, +1, -1$ のどれかであって、それぞれ“複素”，“狭義実”，“擬実”に対応する。⁶²

3.4 コンパクト連続群の表現

有限群の表現はいろいろ考えたので、連続群の表現にうつろう。

3.4.1 リー代数

以下、考える連続群 G は $n \times n$ 行列のなす群の部分群として与えられているとする。特に単位元 $1 \in G$ は単位行列で与えられている。単位元に近い元 $A \in G$ を小さな実数 ϵ を用いて

$$A = 1 + \epsilon a + O(\epsilon^2) \quad (3.4.1)$$

と書くと、 a も $n \times n$ 行列である。逆に、 $n \times n$ 行列 a で、何か小さな実数 ϵ を用いて (3.4.1) が G の元になるようにできるもの全体を \mathfrak{g} と書こう。

t を実数として $A^t \in G$ であろう。さて

$$A^t = 1 + \epsilon t a + O(\epsilon^2) \quad (3.4.2)$$

だから、 $a \in \mathfrak{g}$ なら $ta \in \mathfrak{g}$ である。また

$$B = 1 + \epsilon b + O(\epsilon^2) \quad (3.4.3)$$

であって

$$AB = 1 + \epsilon(a + b) + O(\epsilon^2) \quad (3.4.4)$$

だから、 $a, b \in \mathfrak{g}$ なら $a + b \in \mathfrak{g}$ である。よって \mathfrak{g} は実ベクトル空間である。

⁶¹Herring, “Effect of Time-Reversal Symmetry on Energy Bands of Crystals”, Phys. Rev. 52 (1937) 361。この事実は何度も後に独立に発見されたようである、例えば Dimmock, “Representation theory for nonunitary groups”, J. Math. Phys. 4 (1963) 1307。

⁶²但し、3.3.12 節でやった証明はこの拡張には使えない。上記 Herring はきちんと証明をかいているようには見えない。Dimmock の証明はわかるが Wigner の教科書に書いてある具体的な co-表現の形をつかってしまうので気に入らない。3.3.12 節の方法を改良して、一般の場合に適用できるようにできないものだろうか？

さらに、すこし詳しく

$$A = 1 + \epsilon a + \epsilon^2 a' + \cdots, \quad B = 1 + \epsilon b + \epsilon^2 b' + \cdots, \quad (3.4.5)$$

とかいておくと

$$AB = 1 + \epsilon(a+b) + \epsilon^2(a'+b'+ab) + \cdots, \quad BA = 1 + \epsilon(a+b) + \epsilon^2(a'+b'+ba) + \cdots, \quad (3.4.6)$$

なので、

$$AB(BA)^{-1} = 1 + \epsilon^2(ab - ba) + \cdots \quad (3.4.7)$$

となる。 ϵ^2 自体を小さい実数パラメタとすることが出来るので、これより $[a, b] := ab - ba \in \mathfrak{g}$ である。

行列の交換子 $[a, b] := ab - ba$ は次の性質をみたす：

- $[a, b]$ は a, b のそれぞれについて線形である。
- $[a, b] = -[b, a]$ 。これを反交換性という。
- $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ 。これをヤコビ律という。

そこで次の定義をする：

定義 3.4.1 実線形空間 \mathfrak{g} で、上記の三性質をみたす操作 $\mathfrak{g} \ni a, b \rightsquigarrow [a, b] \in \mathfrak{g}$ が与えられたものをリー代数 (Lie algebra) もしくはリー環という。

英語では Lie ring とは言わないと思うが、日本語ではリー環と良くよばれる気がする⁶³。

$n \times n$ 行列のなす空間は $[a, b] = ab - ba$ とすることによって自然にリー環になる。しかし、リー環 \mathfrak{g} には掛け算操作 $\mathfrak{g} \ni a, b \rightsquigarrow ab \in \mathfrak{g}$ そのものが定まっていることは要求しないことを注意しておく。たとえば：

例 3.4.2 三次元空間 \mathbb{R}^3 のふたつの元 a, b に対し、 $[a, b] := a \times b$ をベクトル積で定める。これはリー代数になる。

実際、線形性と反交換性はよく知られていて、さらに基底を e_x, e_y, e_z ととると、

$$[e_x, e_y] = e_z, \quad [e_y, e_z] = e_x, \quad [e_z, e_x] = e_y \quad (3.4.8)$$

であって、がんばれば Jacobi 律をみたすことも示せる。

この節のはじめの考察は次のことを意味している：

事実 3.4.3 連続群 G の単位元の近傍を考えることによってリー代数 \mathfrak{g} が取り出せる。また、逆に指数関数写像がある：

$$\exp : \mathfrak{g} \ni tg \mapsto \exp(tg) = e^{tg} \in G$$

具体的に $SU(2)$ と $SO(3)$ に対応するリー代数 $\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{so}(3)$ を決めよう。

⁶³僕は日本語の教科書としては佐竹「リー環の話」日本評論社が好きだ。

リー代数 $\mathfrak{su}(2)$: $SU(2)$ の元は 2×2 行列でユニタリ $UU^\dagger = 1$ で $\det U = 1$ なものだった。 $U = 1 + \epsilon X$ と書くと、ユニタリ性から $X + X^\dagger = 0$ を、 $\det U = 1$ から $\text{tr } X = 0$ 得る。すなわち、 X は反エルミートでトレースがゼロである。そのような X はパウリ行列を用いて

$$\tau_x := -\frac{1}{2}i\sigma_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y := -\frac{1}{2}i\sigma_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z := -\frac{1}{2}i\sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (3.4.9)$$

の線形結合としてかける。リー括弧は

$$[\tau_x, \tau_y] = \tau_z, \quad [\tau_y, \tau_z] = \tau_x, \quad [\tau_z, \tau_x] = \tau_y \quad (3.4.10)$$

となって、 \mathbb{R}^3 のベクトル積と同じになる。($\tau_{x,y,z}$ の定義の変な係数はこのためにいれた。 $-1/2$ 倍しておかないと、 $[\tau_x, \tau_y] = -2\tau_z$ になってしまう。)

リー代数 $\mathfrak{so}(3)$: また、 $SO(3)$ の元は 3×3 実行列で $MM^t = 1$ なものだった。 $M = 1 + \epsilon X$ と書くと、 $X + X^t = 0$ を得る。すなわち、 X は反対称である。そのような X は

$$\lambda_x := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_z := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.11)$$

の線形結合でかける。これらのリー括弧は

$$[\lambda_x, \lambda_y] = \lambda_z, \quad [\lambda_y, \lambda_z] = \lambda_x, \quad [\lambda_z, \lambda_x] = \lambda_y \quad (3.4.12)$$

となる。

また、量子力学において、角運動量演算子は

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \quad (3.4.13)$$

という交換関係をみたした。よって、 $\ell_{x,y,z} := L_{x,y,z}/(i\hbar)$ と定めると、これらは

$$[\ell_x, \ell_y] = \ell_z, \quad [\ell_y, \ell_z] = \ell_x, \quad [\ell_z, \ell_x] = \ell_y \quad (3.4.14)$$

を満たす。

まとめると、つぎのことがわかった:

事実 3.4.4 群 $SU(2)$ および $SO(3)$ に対応するリー代数 $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(3)$ は自然に同型で、ベクトル空間 \mathbb{R}^3 にベクトル積 \times でリー括弧をいれたリー代数と、また角運動量演算子の i 倍のなすリー代数とも同型である。

とくに $SO(3)$ と $\mathfrak{so}(3)$ の場合において、

$$e^{\theta \lambda_x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.4.15)$$

であるから、 λ_x は x 軸まわりの回転を生成する。角運動量演算子は、回転の生成子である。

3.4.2 リー代数の表現

群 G のユニタリ表現 (V, ρ) は群の元 g に対し $\rho(g) : V \rightarrow V$ がユニタリ変換で、 $\rho(g)\rho(h) = \rho(gh)$ なるものであった。

単位元にちかい元を $g = 1 + \epsilon a + \dots$ として書くと、 $\rho(g) = 1 + \epsilon \rho(a) + \dots$ とかきたい。すると、対応して $\rho([a, b]) = [\rho(a), \rho(b)]$ が成立する。 $\rho(g)$ がユニタリならば、 $\rho(a)$ は反エルミートである: $\rho(a)^\dagger = -\rho(a)$ 。そこで、次のように決める:

定義 3.4.5 リー代数 \mathfrak{g} の表現 (V, ρ) は、元 a に対して線形変換 $\rho(a) : V \rightarrow V$ が与えられ、

$$\rho([a, b]) = [\rho(a), \rho(b)]$$

をみたすものである。ユニタリ表現とは、 $\rho(x)$ が反エルミートであるときである。

また、群の表現 $(V, \rho), (W, \sigma)$ の直和 $(V \oplus W, \rho \oplus \sigma)$ は

$$(\rho \oplus \sigma)(g) : v \oplus w \mapsto \rho(g)v \oplus \sigma(g)w \quad (3.4.16)$$

とするものだった。そこで $g = 1 + \epsilon a + \dots$ とすると、

$$(\rho \oplus \sigma)(a) : v \oplus w \mapsto \rho(a)v \oplus \sigma(a)w \quad (3.4.17)$$

となる。一般に

定義 3.4.6 リー代数 \mathfrak{g} の表現 (V, ρ) と (W, σ) にたいして、その直和 $(V \oplus W, \rho \oplus \sigma)$ を上式で定める。直和に分解出来ないユニタリ表現を既約ユニタリ表現であるという。

上記の定義は、つぎのことが成り立つようにつくった:

事実 3.4.7 群 G の表現 (V, ρ) から、自然にそのリー代数 \mathfrak{g} の表現 (V, ρ) が定まる。

逆にリー代数 \mathfrak{g} の表現 (V, ρ) があった際に、 $G \ni g$ はうまく $x \in \mathfrak{g}$ ととって $g = e^x$ とかけるのであるから、 $\rho(g) = e^{\rho(x)}$ と定めれば良さそうに思える。が、うまくいかないことがしばしばある。これを実例を通してみよう。

3.4.3 $\mathfrak{su}(2)$ の表現

$\mathfrak{su}(2)$ のユニタリ表現をすべて決定しよう。これは、角運動量との関係で量子力学2の講義でやったはずである。しかし、重要なのでもう一度やろう。

これまで、数学者のコンベンションにしたがって $\ell_{x,y,z}$ は反エルミートにしていたが、物理屋のコンベンションにしたがってここでは i 倍ずらして $\ell_{x,y,z} := L_{x,y,z}/\hbar$ と定めて、これらが

$$[\ell_x, \ell_y] = i\ell_z, \quad [\ell_y, \ell_z] = i\ell_x, \quad [\ell_z, \ell_x] = i\ell_y \quad (3.4.18)$$

を満たすようにする。その表現 (V, ρ) に対しても、ブラケット記法を用い、面倒くさいので $\rho(\ell_x)$ を ℓ_x と略記する。

$\vec{\ell}^2$ は非負: まず、

$$\vec{\ell}^2 := \ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2 \quad (3.4.19)$$

とする。これはエルミートであり、

$$\langle \psi | \vec{\ell}^2 | \psi \rangle = \sum_{a=x,y,z} |\ell_a | \psi \rangle|^2 \geq 0 \quad (3.4.20)$$

より、 $\vec{\ell}^2$ の固有値は非負。この非負固有値を $j(j+1)$ と書くのが標準的である: $\vec{\ell}^2 | \psi \rangle = j(j+1) | \psi \rangle$. ただし、 j は非負にとる。 j を角運動量の大きさと呼ぶ。なぜ $\vec{\ell}^2$ の固有値を j^2 もしくは ℓ^2 と書かないかはすぐにわかる。

$\ell_{x,y,z}$ は角運動量の大きさ j を変えない: また、上記交換関係より、

$$[\ell_x, \vec{\ell}^2] = [\ell_y, \vec{\ell}^2] = [\ell_z, \vec{\ell}^2] = 0 \quad (3.4.21)$$

となる。これより、部分空間 \mathcal{H}_j を、 $\vec{\ell}^2$ が固有値 $j(j+1)$ をとるベクトル全体とすると、 $\ell_{x,y,z}$ は \mathcal{H}_j を \mathcal{H}_j にうつす。

j を固定すると ℓ_z の固有値 m の絶対値には上限がある: \mathcal{H}_j から ℓ_z の固有状態 $\ell_z | m \rangle = m | m \rangle$ を取る。

$$j(j+1) = \langle m | \vec{\ell}^2 | m \rangle \geq \langle m | \ell_z^2 | m \rangle = m^2 \quad (3.4.22)$$

より ℓ_z の固有値の絶対値 $|m|$ には上限がある。

$\ell_{\pm} := \ell_x \pm i\ell_y$ は ℓ_z の固有値を ± 1 する: さて、 $\ell_+ = \ell_x + i\ell_y$ および $\ell_- = \ell_+^\dagger = \ell_x - i\ell_y$ を定義すると、

$$[\ell_+, \ell_-] = 2\ell_z, \quad [\ell_z, \ell_+] = \ell_+, \quad [\ell_z, \ell_-] = -\ell_- \quad (3.4.23)$$

となるから、調和振動子のときと同様、

$$\ell_z(\ell_+ | m \rangle) = (m+1)\ell_+ | m \rangle, \quad \ell_z(\ell_- | m \rangle) = (m-1)\ell_- | m \rangle \quad (3.4.24)$$

となる。

これより、 $(\ell_+)^n | m \rangle$ はノンゼロであれば ℓ_z の固有値 $m+n$ の固有ベクトル、 $(\ell_-)^n | m \rangle$ はノンゼロであれば ℓ_z の固有値 $m-n$ の固有ベクトル。 ℓ_z の固有値の絶対値には上限があったから、 $(\ell_+)^n | m \rangle \neq 0$ だが $(\ell_+)^{n+1} | m \rangle = 0$ であるような n がある。同様に、 $(\ell_-)^{n'} | m \rangle \neq 0$ だが $(\ell_-)^{n'+1} | m \rangle = 0$ であるような n' がある。

ℓ_{\pm} を可能な限り掛けることにより、角運動量の大きさ j は半整数であることがわかる: そこで、 $|+\rangle := (\ell_+)^n | m \rangle$ について考えると、 $\ell_+ |+\rangle = 0$ である。 $|+\rangle$ は構成より ℓ_z の固有ベクトルなので、固有値を $m_{\max} := m+n$ と書く。一般に

$$\vec{\ell}^2 = \ell_- \ell_+ + \ell_z + \ell_z^2 \quad (3.4.25)$$

であるので、これを $\langle + |, |+\rangle$ で挟んで、

$$j(j+1) = m_{\max}(m_{\max}+1) \quad (3.4.26)$$

である。よって、 $m_{\max} = j$ もしくは $-1 - j$ 。同様に、 $|- \rangle := (\ell_-)^{n'} |m \rangle$ について考えると、 $\ell_- |- \rangle = 0$ であって、 $|- \rangle$ における ℓ_z の固有値を $m_{\min} := m - n'$ と書くと、一般に

$$\ell^2 = \ell_+ \ell_- - \ell_z + \ell_z^2 \quad (3.4.27)$$

であるので、これを $\langle - |, |- \rangle$ で挟んで、

$$j(j+1) = m_{\min}(m_{\min} + 1) \quad (3.4.28)$$

となる。よって、 $m_{\min} = -j$ もしくは $1 + j$ 。

構成より、 $m_{\min} \leq m_{\max}$ なので、 $m_{\max} = j, m_{\min} = -j$ とわかった。また、 $j = m + n, -j = m - n'$ なので、 $2j = n + n'$ 、より j は非負の整数か半整数であることがわかった。

角運動量の大きさ j を固定すると、 ℓ_{\pm} の作用は決まってしまう：そこで、角運動量の大きさ j を非負の整数もしくは半整数とする。 $\ell_z |j \rangle = j |j \rangle$ なる ℓ_z の固有ベクトルがある。 $|j - n \rangle \propto (\ell_-)^n |j \rangle$ は ℓ_z の固有値 $j - n$ の固有ベクトルで、 n は 0 から $2j$ まで許され、 $n = 2j + 1$ にするとベクトルがゼロになってしまう。 $(\ell_-)^n |j \rangle$ を規格化したものを $|j - n \rangle$ と書く。 ℓ_{\pm} の作用を決定してしまおう。まず、

$$\ell_+ |m \rangle = c |m + 1 \rangle \quad (3.4.29)$$

であるが、

$$|\ell_+ |m \rangle|^2 = \langle m | \ell_- \ell_+ |m \rangle = \langle m | (\ell^2 - \ell_z(\ell_z + 1)) |m \rangle = j(j+1) - m(m+1) = (j-m)(j+m+1) \quad (3.4.30)$$

なので、 $c = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}$ としてよい。 ℓ_- についても同様に計算できて、

$$\ell_{\pm} |m \rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |m \pm 1 \rangle, \quad (3.4.31)$$

がわかった。

ℓ_{\pm} がきまれば $\ell_{x,y}$ がきまるので、これより、勝手な非負(半)整数の角運動量の大きさ j について、 $\ell_{x,y,z}$ の作用が矛盾なく定義できることもわかった。

以上の考察より、つぎのことがわかった：

事実 3.4.8 リー代数 $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ の既約表現は、非負(半)整数 $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ で指定される $2j + 1$ 次元表現 (V_j, ρ_j) であって、そのとき $\rho_j(\ell_z)$ の固有値は

$$m = -j, -j + 1, \dots, j$$

であたえられる。

3.4.4 $\mathfrak{su}(2)$ の表現、 $\mathrm{SU}(2)$ の表現、 $\mathrm{SO}(3)$ の表現と球面調和関数

さて、これらのリー代数の表現 (V_j, ρ_j) は群 $\mathrm{SU}(2), \mathrm{SO}(3)$ の表現になるだろうか？

まず、 j が半奇数であると $\mathrm{SO}(3)$ の表現にはなりえないことをみよう。上で見たように、 $e^{i\theta\rho(\ell_z)}$ は z 軸まわりの θ だけの回転である。 $\mathrm{SO}(3)$ では 360° 回転はもとに戻る、すなわち $e^{2\pi i \ell_z} = 1 \in \mathrm{SO}(3)$ であるので、表現にかんしても $e^{2\pi i \rho(\ell_z)} = 1$ でないといけない。よって、 $\rho(\ell_z)$ の固有値は整数でないといけない。さて、 j が整数のばあい

$\rho(\ell_z)$ の固有値は整数だが、 j が半奇数の場合 $\rho(\ell_z)$ の固有値は整数でない。具体的には、 $e^{2\pi i \rho_{n+1/2}(\ell_z)} = -1 \neq 1$ である。よって j が半奇数の場合は、 $SO(3)$ の表現にはならない。

量子力学では、角運動量の大きさ j が整数なら状態 ψ は 360° 回転でもとに戻るが、角運動量の大きさが半整数なら状態 ψ は 360° 回転すると符号が -1 だけつくということである。同種粒子について学ぶ際、ボゾン、フェルミオンという区別を習うが、特殊相対性理論と量子力学を使うと、 j が整数だとボゾン、 j が半整数だとフェルミオンであることが示せる。これを、スピン統計性の定理という。

これから、 j が整数なら $SO(3)$ の表現になること、また、勝手な j のものが $SU(2)$ の表現になることをみよう。これは一般論でも出来るのだが、勉強になるので、具体的に表現をつくることによって示そう。

SO(3) の表現と球面調和関数: 球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を考える。球面上の関数 $f: S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ は無限次元の線形空間になる。 S^2 には回転 $SO(3)$ が作用するので、球面上の関数全体は $SO(3)$ の表現になる。これを既約分解するとどうなるだろうか？

答えは皆さん既にまなんだことがあって、球面調和関数であたえられる。三次元のラプラシアンは極座標をとると

$$\Delta = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Delta_{S^2}}{r^2}, \quad \Delta_{S^2} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{(\sin \theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.4.32)$$

であったが、角度方向のラプラシアンの固有値は ℓ を非負整数として

$$\Delta_{S^2} = -\ell(\ell + 1) \quad (3.4.33)$$

であり、固有関数は

$$Y_{\ell, m} \propto e^{im\phi} P_\ell^{(m)}(\cos \theta) \quad (3.4.34)$$

ただし $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, +\ell$ 、 $P_\ell^{(m)}$ はルジャンドル陪関数だった。

$$\ell_z = i\partial_\phi \quad (3.4.35)$$

なので、確かに m は ℓ_z の固有値である。よって、

$$\{S^2 \text{ 上の関数全体} \} = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \cdots \quad (3.4.36)$$

となって、 $2\ell + 1$ 次元表現 V_ℓ は構成より $SO(3)$ の表現である。

一般の次元の球面調和関数: ここで脱線して、一般次元の球面 $S^{n-1} = \{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ の上の関数を高次元の球面調和関数で分解するにはどうすればよいかをみておこう。一般の次元のラプラシアンは

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (3.4.37)$$

である。極座標をつかうと

$$\Delta = r^{-(n-1)} \frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{n-1}} \quad (3.4.38)$$

と分解出来る。ただし、 $r = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ で、角度座標 $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ は適切にとる。

一般に、 S^{n-1} 上の関数 f を考えるかわりに、単位球内部の関数 g で

$$g|_{r=1} = f, \quad \Delta g = 0 \quad (3.4.39)$$

なる調和関数をかんがえても良い。(三次元ならば、球の表面で温度を与えたときの熱方程式の解である。) さて、かつてな g は多項式で近似できるので、それを次数ごとに分解する。 g_d が x_1, \dots, x_n の d 次式であるとする、

$$g_d(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) = r^d f_d(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \quad (3.4.40)$$

だから、

$$\Delta g_d = 0, \quad r^{-(n-1)} \frac{\partial}{\partial r} r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} g_d = d(d+n-2) \quad (3.4.41)$$

より

$$\Delta_{S^{n-1}} f_d = -d(d+n-2) f_d \quad (3.4.42)$$

と判った。

この構成はいつもの S^2 の場合にもつかえる。特に、球面調和関数 $Y_{\ell, m} \propto e^{im\phi} P_\ell^{(m)}(\cos \theta)$ はルジャンドル多項式とかが入ってややこしいけれど、単に x, y, z の三変数 m 次多項式でラプラシアンがゼロのものを球面上に制限したもので与えられるということがわかった。例えば、 $\ell = 1$ だと

$$Y_{1,1} \propto e^{i\phi} = x + iy, \quad Y_{1,0} \propto \cos \theta = z, \quad Y_{1,-1} \propto e^{-i\phi} = x - iy \quad (3.4.43)$$

である。

さて、一般次元の話に戻って、線形独立な f_d の数は、 n 変数 d 次多項式の数から、四変数 $(d-2)$ 次多項式の数をはひけば良い。 n 変数 d 次多項式の基底の数は $\binom{d+n-1}{n-1}$ なので、ラプラシアンの固有値が $-d(d+n-2)$ であるような、すなわち d 次式であたえらえるような超球面調和関数の数は

$$\#_{n,d} = \binom{d+n-1}{n-1} - \binom{d+n-3}{n-1} \quad (3.4.44)$$

である。具体的には

$$\begin{array}{c|c|c|c} n=3 & n=4 & n=5 & \cdots \\ \hline 1+2d & (1+d)^2 & \frac{1}{6}(6+13d+9d^2+2d^3) & \cdots \end{array} \quad (3.4.45)$$

となって、ひとつめの欄は $Y_{\ell, m}$ で $\ell = d$ を固定すると m が $1+2d$ 種類あることを再現した。

SU(2) の表現: 群 SU(2) の勝手な元は

$$U = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}, \quad |z|^2 + |w|^2 = 1 \quad (3.4.46)$$

とかけた。これの自然な二次元表現は、単にこの行列を縦ベクトルで掛けることで決める:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.4.47)$$

対応してリー代数の基底は (3.4.9) で与えられた。 $\rho(\ell_z)$ と一般論で書いていたものは $i\tau_z$ に相当するので、その固有値は $\pm 1/2$ である。これは二次元既約表現 $V_{1/2}$ である。

さて、他の表現をつくるために、二変数 a, b の多項式全体のなす線形空間を \mathcal{P} と書こう。 \mathcal{P} の元 P は多項式だが、それを $P: (a, b) \mapsto P(a, b)$ と、横ベクトル (a, b) に複素数を割り当てる関数だと思う。 $U \in \text{SU}(2)$ に対し

$$(\rho(U)P)((a, b)) = P((a, b)U) \quad (3.4.48)$$

と定めると、 (\mathcal{P}, ρ) は $\text{SU}(2)$ の表現になる。具体的には、

$$\rho(U)a = za + wb, \quad \rho(U)b = -\bar{w}a + \bar{z}b \quad (3.4.49)$$

となる。 $\rho(U)$ による作用は多項式の次数を保つので、 (a, b) の d 次式のなす線形空間を \mathcal{P}_d と書くと

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{P}_1 \oplus \cdots \quad (3.4.50)$$

と分解されて、それぞれの \mathcal{P}_d が $\text{SU}(2)$ の表現になる。具体的には、基底は

$$a^d, a^{d-1}b, \dots, b^d \quad (3.4.51)$$

の $(d+1)$ 個で、 \mathcal{P}_d は $(d+1)$ 次元である。

さて、特に

$$U = e^{it\ell_z} = \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix} \quad (3.4.52)$$

は

$$\rho(U)a = e^{it/2}a, \quad \rho(U)b = e^{-it/2}b \quad (3.4.53)$$

と作用するので、

$$\rho(U)a^m b^n = e^{it(m-n)/2} a^m b^n \quad (3.4.54)$$

である。よって、 \mathcal{P}_d の基底での ℓ_z の固有値は

$$\frac{d}{2}, \frac{d}{2} - 1, \dots, -\frac{d}{2} \quad (3.4.55)$$

の $d+1$ 個である。これはちょうどスピン $j = d/2$ の表現だった、すなわち $\mathcal{P}_d \simeq V_j$ 。 d は勝手な非負整数なので、 j は勝手な非負(半)整数である。

これで、リー代数 $\mathfrak{su}(2)$ の勝手な既約表現 V_j が群 $\text{SU}(2)$ の表現になっていることがわかった。

SU(2) の表現と S^3 の球面調和関数: 有限群 G に関しては、勝手な既約表現 (V_α, ρ_α) に対して、その行列要素 $f_{ij}^\alpha(g) = \langle e_i | \rho_\alpha(g) | e_j \rangle$ を G 上の関数とおもうと、 f_{ij}^α 達が自然に G 上の関数の直交基底を与えるのだった。

よく証明を読み返すと、その議論は G がコンパクト連続群の場合でも、群上の和 $|G|^{-1} \sum_{g \in G}$ を群上の積分 $\int_G \cdots dg$ に置き換えればそのまま使えることがわかる。特に、 $G = \text{SU}(2)$ の場合は、群の空間は $|z|^2 + |w|^2 = 1$ すなわち S^3 であった。よって、 $\text{SU}(2)$ の既約表現 $\mathcal{P}_d \simeq V_j$ に対して、その行列要素を $\text{SU}(2) \simeq S^3$ 上の関数だと思えば、それらは $\text{SU}(2) \simeq S^3$ の直交関数系になるはずである。すなわち、それらは S^3 の球面調和関数を与えるはずである。

これを確認しよう。そのためには行列要素を計算しないといけない。 \mathcal{P}_d の基底は (3.4.51) に与えた。 $e_i = a^{d-i}b^i$, $(i = 0, \dots, d)$ とすると、

$$\rho(U)e_i = (za + wb)^{d-i}(-\bar{w}a + \bar{z}b)^i \quad (3.4.56)$$

であるので、 (i, j) -行列成分は (3.4.56) を展開した際の $a^{d-j}b^j$ の係数である。

いま式 (3.4.56) で $|z|^2 + |w|^2 = 1$ という条件を課さないことにしよう。 $z = x_1 + ix_2$, $w = x_3 + ix_4$ とかいた際、 $x_{1,2,3,4}$ のラプラシアンは

$$\Delta = \partial_z \partial_{\bar{z}} + \partial_w \partial_{\bar{w}} \quad (3.4.57)$$

であるから、そもそも勝手な関数 $f(a, b)$ に対して

$$\Delta f(za + wb, -\bar{w}a + \bar{z}b) = 0 \quad (3.4.58)$$

なので、 (3.4.56) は Δ をするとゼロである。であるから、 $a^{d-j}b^j$ の係数をとっても、 Δ をするとゼロである。

よって、 \mathcal{P}_d への表現の行列成分は、 z, w, \bar{z}, \bar{w} の d 次多項式、すなわち $x_{1,2,3,4}$ の d 次多項式で、ラプラシアンを掛けるとゼロであるようなものを、 $|z|^2 + |w|^2 = 1$ のところに制限したものであることがわかった。

これはまさに上で S^{n-1} の球面調和関数の一般論をやったときにみたことである。 S^3 のときに、 d 次でラプラシアンで消える式が $(d+1)^2$ と丁度平方数になっていたのは、 $(d+1)$ 次元表現の行列要素の数 $(d+1)^2$ であったからである。

3.4.5 $\mathfrak{u}(N)$ のおおまかな構造

次に一般論の前の肩慣らしとして、 $U(N)$ のリー代数の構造をしらべよう。

$$U(n) = \{\mathbb{C} \text{ 値 } n \times n \text{ 行列 } U \text{ で } \mathbb{C}^n \text{ の長さをたもち、 } \det = 1 \text{ であるもの}\} \quad (3.4.59)$$

だったから、 $U = 1 + \epsilon X + \dots$ とかけば、

$$\mathfrak{u}(n) = \{\mathbb{C} \text{ 値 } n \times n \text{ 行列 } X \text{ で } X + X^\dagger = 0 \text{ なもの}\} \quad (3.4.60)$$

である。 E_{ab} を (a, b) 成分のみ 1 で他が全部ゼロであるような行列とすると、 $\mathfrak{u}(n)$ の基底は $a < b$ に対して

$$i(E_{ab} + E_{ba}), \quad E_{ab} - E_{ba}, \quad (3.4.61)$$

および勝手な a に対する

$$iE_{aa} \quad (3.4.62)$$

からなっている。非対角なものが $n^2 - n$ 個あり、対角なものが n 個ある。特に、 $a < b$ を固定して、

$$-\frac{i}{2}(E_{ab} + E_{ba}), \quad \frac{1}{2}(E_{ab} - E_{ba}), \quad -\frac{i}{2}(E_{aa} - E_{bb}) \quad (3.4.63)$$

を考えると、行列として書くと

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (3.4.64)$$

となる。ただし、行、列が a, b でないものはどうせ全部ゼロなので書かなかった。これは (3.4.9) でやった $\mathfrak{su}(2)$ の基底とまったく同じである。

いいかえれば、 $1 \leq a < b \leq n$ を選ぶ毎に、 $\mathfrak{su}(2)_{a,b} \subset \mathfrak{su}(n)$ という埋め込みがある。勝手な非対角項は適切な $a < b$ に対してかならず一度だけ含まれる。対角項には n 個の基底 E_{11}, \dots, E_{nn} の $(n^2 - n)/2$ 個の線形結合があらわれる。

このように、 $\mathfrak{su}(n)$ は、沢山の $\mathfrak{su}(2)$ を、矛盾が無いよう、つじつまがあうように貼り合わせて出来ている。これからやるリー代数の分類は、(ある良いクラスの)リー代数は、 $\mathfrak{su}(n)$ のように、沢山の $\mathfrak{su}(2)$ の貼り合わせで出来ていること、を示して、つぎに、どのような貼り合わせ方が出来るか、ということ調べ尽くす、というものである。

3.4.6 コンパクトリー代数とそのルート系

まず、コンパクト群に対するリー代数を特徴づける性質をみる。 $\mathfrak{u}(n)$ の場合、 $X + X^\dagger = 0$ は反エルミートである。そこで、

$$\langle X, Y \rangle := -\operatorname{tr} XY \quad (3.4.65)$$

というものを考える。これは X, Y について対称で、実線形で、かつ $X = Y$ のときは X が反エルミートだから非負である。これによって、 $\mathfrak{u}(n)$ は内積付き実ベクトル空間になる。また、これは

$$\begin{aligned} \langle X, [Y, Z] \rangle &= -\operatorname{tr} X[Y, Z] = -(\operatorname{tr} XYZ - \operatorname{tr} XZY) \\ &= -(\operatorname{tr} XYZ - \operatorname{tr} YXZ) = \operatorname{tr}[X, Y]Z = \langle [X, Y], Z \rangle \end{aligned} \quad (3.4.66)$$

を満たす。これは、内積が群の作用で不変であるというものの、リー代数版の式である。

定義 3.4.9 実リー代数 \mathfrak{g} に、実正定値内積 $\langle x, y \rangle$ が定まっています

$$\langle x, [y, z] \rangle = \langle [x, y], z \rangle$$

をみたすとき、 \mathfrak{g} をコンパクトなリー代数という。

コンパクトな連続群とコンパクトなリー代数は対応することが知られている。以下、コンパクトなリー代数を分類しよう。

定義 3.4.10 リー代数 \mathfrak{g} のカルタン部分代数 (Cartan subalgebra) とは、その部分リー代数 \mathfrak{h} で、かつてな $h_1, h_2 \in \mathfrak{h}$ に対して $[h_1, h_2] = 0$ がなりたつようなもので、もっとも次元の大きなものである。

量子力学では交換する演算子になるべく沢山とってくるのが第一歩であるが、それをリー代数でやっているだけである。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ に関しては、対角成分は互いに交換する。そこで、 \mathfrak{h} としては、

$$\mathfrak{h} = \{\text{対角行列}\} = \{E_{11}, \dots, E_{nn} \text{ で張られる部分空間}\} \quad (3.4.67)$$

ととる。これが最大であることは知られている。

量子力学では、交換する演算子が与えられればまずはそれを対角化すべきである。しかし、 \mathfrak{g} は実ベクトル空間だから、行列は必ずしも対角化出来ない。そこでまず \mathfrak{g} を複素化しないといけない。

定義 3.4.11 コンパクト実リー代数 \mathfrak{g} に対して、その複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ を、 $x \oplus iy$ ($x, y \in \mathfrak{g}$) という元のなす複素リー代数として定義する。また、そこでのエルミート共役を

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \ni z = x \oplus iy \mapsto z^{\dagger} = (-x) \oplus iy \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$$

と定義する。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ のばあい、 \mathfrak{g} は反エルミートの元だったから、上の式での \oplus を $+$ と書いてやれば、 $z = x + iy$ は単に勝手な行列 z を反エルミート部分 x とエルミート部分 iy に分解しただけである。すなわち、 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は単に $n \times n$ 行列全体である。 z^{\dagger} の定義で i がついたほうにマイナスがつかなくて、 i がつかないほうにマイナスがついてあるのは、 \mathfrak{g} 自体がアンチエルミートだからである。

事実 3.4.12 コンパクト実リー代数 \mathfrak{g} の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ において、内積は

$$\langle [x, y], z \rangle = \langle y, [x^{\dagger}, z] \rangle$$

を満たす。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ の場合は、 $\langle x, y \rangle = -\operatorname{tr} x^{\dagger} y$ なので、直接確かめられる。

さて、 \mathfrak{h} の元 h に対して、

$$\operatorname{adj}(h) : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \quad (3.4.68)$$

を

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \ni x \mapsto \operatorname{adj}(h) := [h, x] \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \quad (3.4.69)$$

で定める。これは定義をおいかければ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の反エルミート写像になる。よって、 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ はこの作用の同時固有状態に分解できる。 x をそのような同時固有状態とすると、

$$[h, x] = i\alpha(h)x \quad (3.4.70)$$

を満たす。ただし、 $\alpha(h)$ は実数。 $\alpha(h)$ は h に対して線形だから、 $\alpha \in \mathfrak{h}$ をとって $\alpha(h) = \langle \alpha, h \rangle$ とかける。

定義 3.4.13 コンパクトリー代数 \mathfrak{g} に対して、そのカルタン部分代数 \mathfrak{h} の同時固有値をあらわす α を \mathfrak{g} のルートという。同時固有値が $\langle \alpha, h \rangle$ であるような $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の部分空間を \mathfrak{g}_{α} と書く。ルートの集合 Δ を \mathfrak{g} のルート系という。

$[h, h'] = 0 = i\langle 0, h \rangle h'$ だから、 0 は必ずルートである。

実例に進む前に、もうひとつ一般論をやっておく：

事実 3.4.14 勝手なコンパクトリー代数 \mathfrak{g} に対し、勝手な元と交換するような元全体を \mathfrak{z} と書く。その直交補空間を \mathfrak{g}' とすると、 \mathfrak{g}' もコンパクトリー代数になる。

$a, b \in \mathfrak{g}'$ ならば $[a, b] \in \mathfrak{g}'$ を示せば良いが、それを示すには $z \in \mathfrak{z}$ に対し $\langle [a, b], z \rangle = 0$ を示せばよい。しかしそれは $\langle [a, b], z \rangle = \langle b, [a^{\dagger}, z] \rangle = 0$ から従う。

例としては、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ ならば、 \mathfrak{z} は単位行列の定数倍からなり、 $\mathfrak{g}' = \mathfrak{su}(n)$ である。 \mathfrak{g} と \mathfrak{g}' のルート系は同じである。

定義 3.4.15 \mathfrak{g} が 0 であるようなコンパクトリー代数 \mathfrak{g} を半単純 (semisimple) という。

3.4.7 $\mathfrak{su}(N)$, $\mathfrak{so}(N)$, $\mathfrak{sp}(N)$ のルート系

さて、以上の準備のもとに、既に存在を知っているコンパクト連続群 $\mathrm{SO}(N)$, $\mathrm{SU}(N)$, $\mathrm{Sp}(N)$ についてそのルート系を調べよう。まず、定義を繰り返しておこう：

定義 3.4.16

$$\mathrm{SO}(n) := \{\mathbb{R} \text{ 値 } n \times n \text{ 行列 } U \text{ で } \mathbb{R}^n \text{ の長さをたもち、} \det = 1 \text{ なるもの}\}, \quad (3.4.71)$$

$$\mathrm{SU}(n) := \{\mathbb{C} \text{ 値 } n \times n \text{ 行列 } U \text{ で } \mathbb{C}^n \text{ の長さをたもち、} \det = 1 \text{ なるもの}\}, \quad (3.4.72)$$

$$\mathrm{Sp}(n) := \{\mathbb{H} \text{ 値 } n \times n \text{ 行列 } U \text{ で } \mathbb{H}^n \text{ の長さをたもつもの}\} \quad (3.4.73)$$

このリー代数は、 ϵ を小さい実数として $U = 1 + \epsilon X + \dots$ とかけば、

定義 3.4.17

$$\mathfrak{so}(n) := \{\mathbb{R} \text{ 値 } n \times n \text{ 行列 } X \text{ で } X + X^t = 0 \text{ なもの}\}, \quad (3.4.74)$$

$$\mathfrak{su}(n) := \{\mathbb{C} \text{ 値 } n \times n \text{ 行列 } X \text{ で } X + X^\dagger = 0 \text{ で } \mathrm{tr} X = 0 \text{ なもの}\}, \quad (3.4.75)$$

$$\mathfrak{sp}(n) := \{\mathbb{H} \text{ 値 } n \times n \text{ 行列 } X \text{ で } X + X^\dagger = 0 \text{ なもの}\} \quad (3.4.76)$$

となる。これらについて具体的にルートの構造をしらべよう。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ の場合： まず $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ の場合を考えよう。すこしまえに $\mathfrak{u}(n)$ の場合をかんがえたが、いま $\mathrm{tr} X = 0$ という条件が加わった。 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は $n \times n$ 行列でトレースレスなもの全体、 \mathfrak{h} は純虚の対角行列でトレースレスなもの全体である。 \mathfrak{h} の元は

$$h = i(h_1 E_{11} + h_2 E_{22} + \dots + h_n E_{nn}), \quad \sum_a h_a = 0 \quad (3.4.77)$$

とかけて、 $n-1$ 次元である。成分の和がゼロという条件はややこしいので、 $e_a := iE_{aa}$ を基底としてすこし大きいベクトル空間を考える。(これは $\mathfrak{su}(n)$ でなくて $\mathfrak{u}(n)$ のカルタン部分代数になっている。) $\langle e_a, e_b \rangle = \delta_{ab}$ となって正規直交基底である。

さて、 $a \neq b$ に対し、

$$[h, E_{ab}] = i(h_a - h_b)E_{ab} = i\langle e_a - e_b, h \rangle E_{ab} \quad (3.4.78)$$

なので、 $e_a - e_b$ はルートである。また、そのルートに属する元は E_{ab} の定数倍のみである。これより、次のことがわかった：

事実 3.4.18 $\mathfrak{su}(n)$ のルート系は $\Delta = \{0\} \sqcup \{e_a - e_b \mid 1 \leq a < b \leq n\}$ である。このルート系を A_{n-1} 型のルート系という。

添え字が n でなくて $n-1$ なのは次の理由による： ルート $e_a - e_b$ はいま n 次元空間内のベクトルとしてつくったが、成分の和がいつもゼロである。よって、 α 達は $n-1$ 次元部分空間の中に住んでいる。

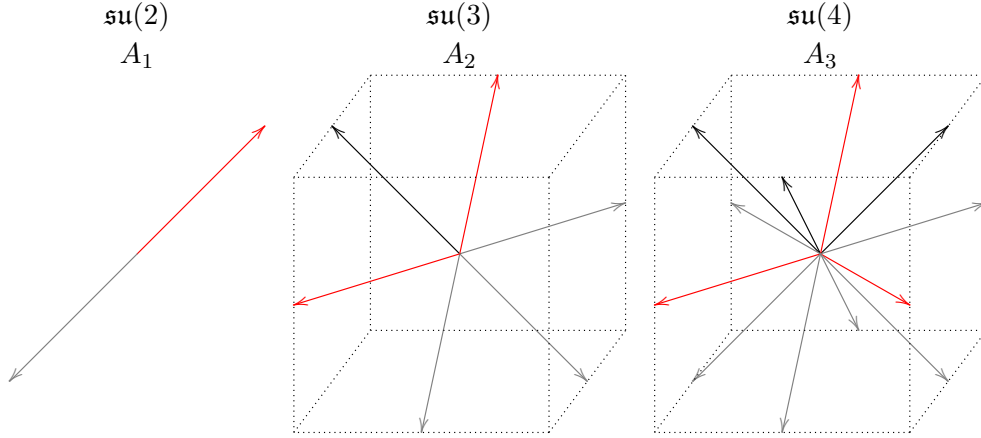


Figure 3.1: A型のルート系。 A_3 は \mathbb{R}^4 内に図示すべきだが、難しいので投影した。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(N)$ の場合: $\mathfrak{so}(N)$ は $N \times N$ 実反対称行列の集合である。 $\mathfrak{so}(N)_{\mathbb{C}}$ はだから $N \times N$ 複素反対称行列の集合になる。次元は $N(N-1)/2$ である。その基底としては、 $E_{ab} - E_{ba}$ を取れる。互いに交換する元としては、

$$e_1 = E_{12} - E_{21}, \quad e_2 = E_{34} - E_{43}, \quad \dots, e_a = E_{2a-1, 2a} - E_{2a, 2a-1}, \dots, \quad (3.4.79)$$

を取ることが出来る。これより、 N の偶奇で場合わけをしないとイケない。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$ の場合: まず $N = 2n$ が偶のばあい、

$$\mathfrak{h} = \{e_1 = E_{12} - E_{21}, \dots, e_n = E_{2n-1, 2n} - E_{2n, 2n-1} \text{ の線形結合} \} \quad (3.4.80)$$

をカルタン部分代数ととる。 $\langle e_a, e_b \rangle = 2\delta_{ab}$ であってこれらは直交基底である。さて、 $a \neq b$ と符号 $s, t \in \{+, -\}$ に対し

$$X_{a,b}^{s,t} = (E_{2a-1, 2b-1} + sE_{2a-1, 2b} + tE_{2a, 2b-1} + stE_{2a, 2b}) \\ - (E_{2b-1, 2a-1} + sE_{2b, 2a-1} + tE_{2b-1, 2a} + stE_{2b, 2a}) \quad (3.4.81)$$

と定める。頑張って計算すると $h = h_1e_1 + \dots + h_ne_n$ に対し、

$$[h, X_{a,b}^{s,t}] = 2(sh_a + th_b)X_{a,b}^{st} = \langle se_a + te_b, h \rangle X_{a,b}^{s,t} \quad (3.4.82)$$

となって同時固有状態であることがわかる。これより次のことがわかった:

事実 3.4.19 $\mathfrak{so}(2n)$ のルート系は $\Delta = \{0\} \sqcup \{\pm e_a \pm e_b \mid 1 \leq a < b \leq n\}$ である。このルート系を D_n 型のルート系という。

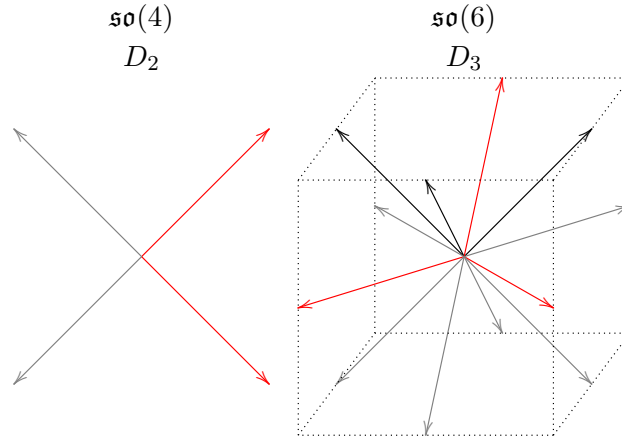


Figure 3.2: D 型のルート系。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$ の場合: つぎに $N = 2n+1$ が奇の場合、カルタン部分代数は上記と同様

$$\mathfrak{h} = \{e_1 = E_{12} - E_{21}, \dots, e_n = E_{2n-1, 2n} - E_{2n, 2n-1} \text{ の線形結合} \} \quad (3.4.83)$$

と取る。上記 $X_{a,b}^{s,t}$ はあいかわらず同時固有状態である。しかし、まだすこし同時固有状態が残っていて、

$$Y_a^s = (E_{2a-1, 2n+1} + sE_{2a, 2n+1}) - (E_{2n+1, 2a-1} - E_{2n+1, 2a}) \quad (3.4.84)$$

が

$$[h, Y_a^s] = 2sh_a Y_a^s = \langle se_a, h \rangle Y_a^s \quad (3.4.85)$$

を満たす固有状態である。これより次のことがわかった:

事実 3.4.20 $\mathfrak{so}(2n+1)$ のルート系は $\Delta = \{0\} \sqcup \{\pm e_a \pm e_b \mid 1 \leq a < b \leq n\} \sqcup \{\pm e_a \mid 1 \leq a \leq n\}$ である。このルート系を B_n 型のルート系という。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n)$ の場合: 書くのが面倒になったので省略するが、がんばってやってみると練習になる。結論は:

事実 3.4.21 $\mathfrak{sp}(n)$ のルート系は $\Delta = \{0\} \sqcup \{\pm e_a \pm e_b \mid 1 \leq a < b \leq n\} \sqcup \{\pm 2e_a \mid 1 \leq a \leq n\}$ である。このルート系を C_n 型のルート系という。

以上の図をみると次のことがわかる:

- $\mathfrak{so}(4) = D_2$ のルート系は $\mathfrak{su}(2) = A_1$ のルート系をふたつあわせたものである。
- $\mathfrak{su}(4) = A_3$ のルート系と $\mathfrak{so}(6) = D_3$ のルート系は同じものである。
- $\mathfrak{so}(5) = B_2$ のルート系と $\mathfrak{sp}(2) = C_2$ のルート系は同じものである。

これは以下の事実と対応している:

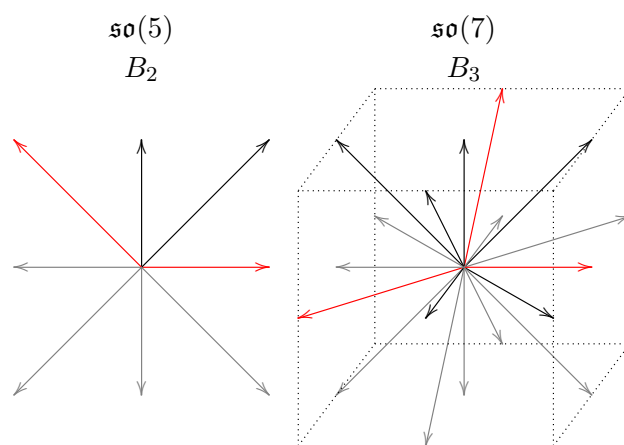


Figure 3.3: B 型のルート系。

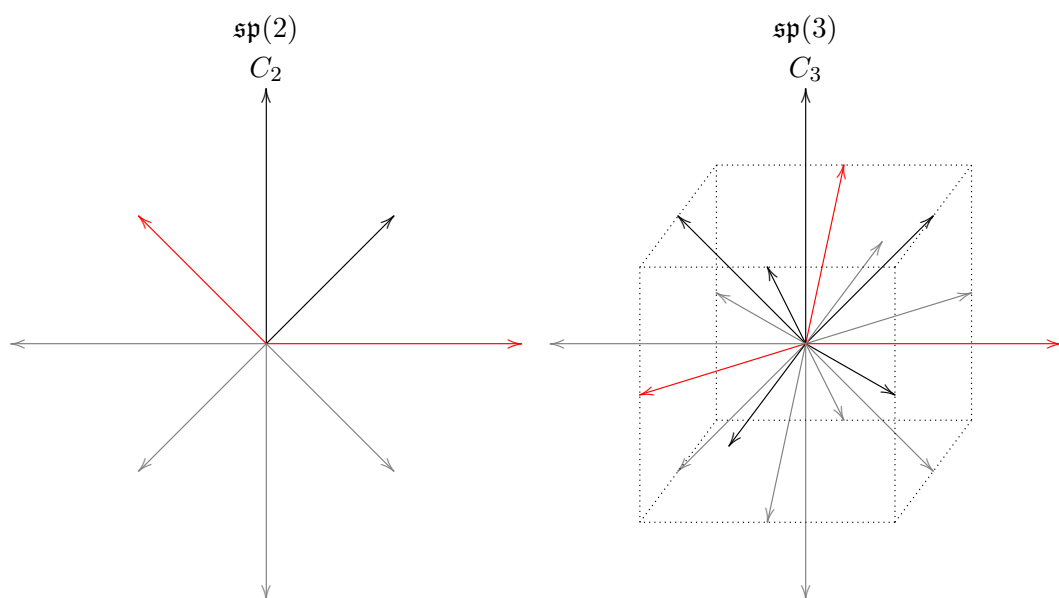


Figure 3.4: C 型のルート系。

- $SO(4) = (SU(2) \times SU(2))/\mathbb{Z}_2$ から $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(2)$ が従う。
- $SU(4)/\mathbb{Z}_2 = SO(6)$ から $\mathfrak{su}(4) = \mathfrak{so}(6)$ が従う。
- $Sp(2)/\mathbb{Z}_2 = SO(5)$ から $\mathfrak{so}(5) = \mathfrak{sp}(2)$ が従う。

一般に、ルート系が同じならリー代数は同じであることが知られているからである。

3.4.8 ルート系の性質

さて、実例をいろいろみたので、ルート系の性質についてもうすこし一般的に調べよう。以下の性質を示す。

事実 3.4.22 • ルート 0 に属する固有空間 \mathfrak{g}_0 は $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ そのものである。

- $a \in \mathfrak{g}_{\alpha}, b \in \mathfrak{g}_{\beta}$ なら $[a, b] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ である。
- $a \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ なら $a^{\dagger} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ である。
- $a \in \mathfrak{g}_{\alpha}, b \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ なら $[a, b] \in \mathbb{C}\alpha$ である。

ひとつめの証明。固有空間 \mathfrak{g}_0 は \mathfrak{h} を含む。 \mathfrak{g}_0 が \mathfrak{h} より真に広いとすると、 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus V$ と書いて V は一次元以上のベクトル空間になる。 V の要素 x をとってくると、 $x \in \mathfrak{g}_0$ だから $[h, x] = 0$ だし、 $[x, x] = 0$ なので、 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{C}x$ は互いに交換することになって、最大性に反する。

ふたつめの証明。 $[h, a] = i\langle\alpha, h\rangle a$, $[h, b] = i\langle\beta, h\rangle b$ から

$$[h, [a, b]] = [[h, a], b] + [a, [h, b]] = i\langle\alpha + \beta, h\rangle [a, b]. \quad (3.4.86)$$

みつつめの証明。 $[h, a] = i\langle\alpha, h\rangle a$ ならば、全体の \dagger をとって $[h^{\dagger}, a^{\dagger}] = i\langle-\alpha, h^{\dagger}\rangle a^{\dagger}$. h^{\dagger} は勝手な \mathfrak{h} の元なので、 $a^{\dagger} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

よつつめの証明。ふたつめより $[a, b] \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ である。 $[a, b]$ が α に比例することを示すには、 $[a, b]$ は α に直交する勝手な $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の元と直交することをしめせばよい。すなわち、 $\langle\alpha, h\rangle = 0$ なら $\langle[a, b], h\rangle = 0$ を示せば良い。そしてこれは $\langle[a, b], h\rangle = \langle b, [a^{\dagger}, h]\rangle = -\langle\alpha, h\rangle\langle b, a^{\dagger}\rangle = 0$ より従う。

次はこれを示そう:

事実 3.4.23 $a \in \mathfrak{g}_{\alpha}$ を $\langle a, a \rangle = 2/\langle\alpha, \alpha\rangle$ と規格化すると、

$$a, \quad \frac{\alpha}{\langle\alpha, \alpha\rangle}, \quad a^{\dagger} \quad (3.4.87)$$

は $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ の標準的な基底

$$\ell_+ = \ell_x + i\ell_y, \quad i\ell_z, \quad \ell_- = \ell_x - i\ell_y \quad (3.4.88)$$

と同じ交換関係を満たす。

多少非自明なのは $[a, a^{\dagger}]$ の計算であるが、これは $[a, a^{\dagger}] = c\alpha$ がわかっているので、

$$c\langle\alpha, \alpha\rangle = \langle[a, a^{\dagger}], \alpha\rangle = \langle a, [\alpha, a] \rangle = i\langle\alpha, \alpha\rangle\langle a, a \rangle \quad (3.4.89)$$

から従う。

そうすると $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ は $a, \alpha/\langle\alpha, \alpha\rangle, a^{\dagger}$ の作用によって $\mathfrak{su}(2)$ の表現になる。これをつかってさらに詳細な構造がわかる。まず、

事実 3.4.24 $\alpha \neq 0$ に対して \mathfrak{g}_α は一次元である: $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}a$.

これを示そう。 $\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{C}a \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ は $a \in \mathfrak{g}_\alpha$ を選ぶと $a, i\ell_z = \alpha/\langle\alpha, \alpha\rangle, a^\dagger$ のなす $\mathfrak{su}(2)_\mathbb{C}$ の表現になる。 ℓ_z の固有値は \mathfrak{g}_α で $+1$, $\mathbb{C}a$ で 0 , $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ で -1 である。 よって $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}$ はそれぞれ 1 次元である。

以下、 $a, i\ell_z = \alpha/\langle\alpha, \alpha\rangle, a^\dagger$ のなす $\mathfrak{su}(2)_\mathbb{C}$ を $\mathfrak{su}(2)_\alpha$ と書こう。 この作用を考えるとさらに次のことがわかる:

事実 3.4.25 • 比例するノンゼロのルート α, β は $\alpha = \pm\beta$ を満たす。

• α, β をルートとし、 α に直交する平面で β を反転したベクトル

$$r_\alpha\beta := \beta - \frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}\alpha$$

を考えると、この $r_\alpha\beta$ もルートである。

ひとつめを示す。 ノンゼロルート α を一つ選んで、

$$\mathbb{C}a \oplus \bigoplus_{\beta=c\alpha, c \neq 0} \mathfrak{g}_\beta \quad (3.4.90)$$

を考える。 上の部分空間の $\mathfrak{su}(2)_\alpha$ のもとでの表現を考えるが、 ℓ_z の固有値は $\mathbb{C}a$ で 0 , $\mathfrak{g}_{c\alpha}$ で c である。 一般論より c は半整数である。 α と β を取り換えてもよいので、 $1/c$ も半整数である。 よって $c = \pm 1, c = \pm 2, c = \pm 1/2$ しか許されない。 そこで $\beta = 2\alpha$ として、

$$\mathfrak{g}_{-2\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}a \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} \quad (3.4.91)$$

を考えて、この $\mathfrak{su}(2)_\alpha$ での表現を考える。 ℓ_z の固有値は

$$-2, -1, 0, 1, 2 \quad (3.4.92)$$

であるから、スピン2の既約表現でないといけないが、 $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}a$ で、 $\ell_+ = a$ だから、 $\mathfrak{g}_{2\alpha}$ は $[a, a] = 0$ で生成されていることになって、 2α がルートであることに矛盾する。

ふたつめを示す。 部分空間

$$\bigoplus_{\gamma=\beta+c\alpha} \mathfrak{g}_\gamma \quad (3.4.93)$$

は $\mathfrak{su}(2)_\alpha$ の表現である。 $\mathfrak{g}_{\beta+c\alpha}$ における ℓ_z の固有値は

$$\frac{\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} + c \quad (3.4.94)$$

である。 一般に ℓ_z の固有値は正負のペアで出る。 $\frac{\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$ が固有値であるから $-\frac{\langle\alpha, \beta\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$ も固有値である。

3.4.9 ルート系とその分類: 可能なルート系

以上の議論から、コンパクトリー代数 \mathfrak{g} から、次の性質を満たすベクトルの集合 Δ が取り出せることがわかった:

定義 3.4.26 実ベクトル空間のノンゼロベクトルの部分集合 Δ が次の三条件を満たす時、「ルート系」という:

- $\alpha, c\alpha \in \Delta$ なら $c = \pm 1$

- $\alpha, \beta \in \Delta$ なら

$$r_\alpha \beta := \beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha \in \Delta.$$

ここで、この定義の段階ではリー代数との関係はわからないので、括弧付きの「ルート系」とした。

この講義では示す時間が無いが、次の定理がある:

事実 3.4.27 勝手な「ルート系」 Δ に対し、それがルート系になるようなコンパクト半単純リー代数 \mathfrak{g} が存在し唯一である。

だから、「ルート系」とルート系の区別をする必要は無い。以下かぎ括弧は落とす。

また、半単純の定義を思い出しておく。以前 $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}'$ (ただし \mathfrak{z} は \mathfrak{g} の勝手な元と交換する元の集合) と分解出来ることをしめた。 \mathfrak{g}' の部分を半単純リー代数と呼ぶのだった。 \mathfrak{g} と \mathfrak{g}' のルート系は同じだから、ルート系は半単純部分の情報をもっているわけである。

兎に角、コンパクトリー代数を分類するには、ルート系を分類すればよい。 n_1 次元空間のなかのルート系 Δ_1 と n_2 次元空間のなかのルート系 Δ_2 があつたばあい、 $n_1 + n_2$ 次元空間の中で $\Delta_1 \sqcup \Delta_2$ を考えるとこれは自動的にルート系になる。 Δ_1 が \mathfrak{g}_1 , Δ_2 が \mathfrak{g}_2 からくるならば $\Delta_1 \sqcup \Delta_2$ は $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ のルート系である。

そこで、このように直交分解しないルート系を調べればよい。既に A_{n-1}, B_n, C_n, D_n というルート系を調べた。実は直交分解しないルート系は、この四つの無限系列を除いてはあと五つ $E_{6,7,8}, G_2, F_4$ しかないことが知られている。

添え字が n なら n 次元空間に埋め込まれている。具体的にあたえておこう。

G_2 : 例外型ルート系 G_2 はダビデの星型である。図 3.5 をみよ。

F_4 : これはルート系 $\mathfrak{so}(9) \simeq B_4$ にさらに点を加えてえられる。すなわち、

- $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$ とその順番を変えたもの、
- $(\pm 1, 0, 0, 0)$ とその順番を変えたもの、が B_4 をなし、さらに
- $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$ を追加する。

$E_{6,7,8}$: E_8 は $\mathfrak{so}(16) \simeq D_8$ にさらに点を加えてえられる。すなわち、

- $\underbrace{(\pm 1, \pm 1, 0, \dots, 0)}_{8\text{成分}}$ とその順番を変えたもの、が $\mathfrak{so}(16)$ をなし、さらに
- $\underbrace{(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2})}_{8\text{成分}}$ で負号は八つのうち偶数個であるもの、を追加する。

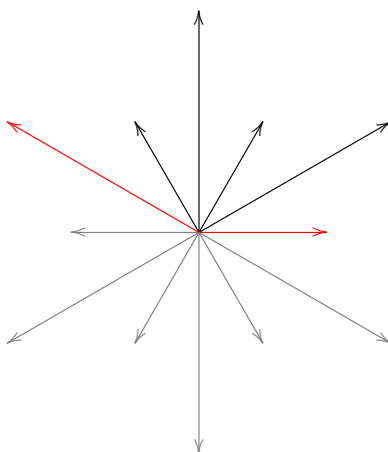


Figure 3.5: G_2 型ルート系。

E_{8-n} を、 E_8 の元ではじめの $n+1$ 成分がすべて同じもののなす部分集合として定義する。そうすると E_{8-n} はルート系になる。 E_7, E_6 は新たなルート系になるが、

$$E_5 = D_5 = \mathfrak{so}(10), \quad E_4 = A_4 = \mathfrak{su}(5), \quad E_3 = A_2 \times A_1 = \mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{su}(2) \quad (3.4.95)$$

は知られたものになる。

3.4.10 ルート系とその分類: 証明

ルート系がこれまでかいたもので尽きることを示そう。そのためには、ルート系全体をみると情報量がおおいので、さらに情報を蒸留した単純ルートとディンキン図というものを導入する⁶⁴。

ルート系 Δ は実ベクトル空間 \mathbb{R}^n に埋め込まれているとする。 \mathbb{R}^n の元 v に対し、 $v = (v_1, \dots, v_n)$ と成分表示した際に v_1, v_2, \dots とみていってはじめて出て来た非ゼロ成分が正か負かによって $v > 0, v < 0$ と定めることにする。つぎに、二つの元 v, w に対し $v > w, v < w$ を $v - w$ の正負によって定める。

Δ の正の元を正ルートといい、 Δ_+ とかく。 Δ の単純ルート達を次のように再帰的に定める。

- Δ_+ の最小元を α_1 とし、それを一つ目の単純ルートとする。
- Δ_+ の中で、 α_1 の線形結合でない元を考え、その中の最小元 α_2 を二つ目の単純ルートとする。
- Δ_+ の中で、 $\alpha_{1,2}$ の線形結合でない元を考え、その中の最小元 α_3 を三つ目の単純ルートとする。
- これを繰り返す。

⁶⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Eugene_Dynkin によると、ディンキンは学生のととき、指導教員のゲルファントのゼミでルート系の分類を紹介するように言われたが、Weyl と van der Waerden による既存の論文の証明が見通しが悪かったのでこの方法を編み出したらしい。

構成から、勝手な正ルートは単純ルートの正係数線形結合で書け、
これまでの図では単純ルートを赤で示していた。具体的には:

- A_{n-1} の単純ルートは $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n$
- B_n の単純ルートは $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n$
- C_n の単純ルートは $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, 2e_n$
- D_n の単純ルートは $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n$
- G_2 の単純ルートは図 3.5 に図示した通り

である。 $F_4, E_{6,7,8}$ は練習としてやってみよう。

さて、 α, β がルートとすると、 $\mathfrak{su}(2)_\alpha$ の ℓ_z での \mathfrak{g}_β の固有値は $\langle \alpha, \beta \rangle \alpha, \alpha$ で、これは半整数だから、

$$c_{\alpha\beta} := 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \quad (3.4.96)$$

は整数である。内積の性質から $c_{\alpha\beta}c_{\beta\alpha} \geq 4$ なので、 $c_{\alpha\beta} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ であり、 ± 4 のばあいには $\alpha = \pm\beta$ となる。

異なる単純ルート α, β に対しては $c_{\alpha\beta} = 0, -1, -2, -3$ のどれかである。何故なら、 $c_{\alpha\beta} > 0$ ならば $\beta' = \beta - c_{\alpha\beta}\alpha$ もルートであるが、これは勝手なルートが単純ルートの正係数もしくは負係数線形結合で書けることに反する。

以上の準備のもと、各単純ルートを \circ であらわし、二つのルート α, β の間を $\max(|c_{\alpha\beta}|, |c_{\beta\alpha}|)$ 本の線で結び、 $c_{\alpha\beta} > 1$ ならば β 側に向く矢印の頭を書くことにする。可能性は順序を除いて以下の通り:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} (c_{\alpha\beta}, c_{\beta\alpha}) & (0, 0) & (-1, -1) & (-2, -1) & (-3, -1) \\ \hline & \circ \circ & \circ - \circ & \circ \Rightarrow \circ & \circ \Rightarrow \circ \end{array} \quad (3.4.97)$$

既知のルート系のディンキン図をこのルールに従って書くと図 3.6 のようになる。

さて、これで繋がっているディンキン図が尽きていることを示そう。ディンキン図が与えられれば、そこから $c_{\alpha\beta}, c_{\beta\alpha}$ が読みとれるため、 $\langle \alpha, \alpha \rangle, \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \alpha, \alpha \rangle$ の比が再現できる。すると、ディンキン図が与えられれば、 $n \times n$ 行列 $M := (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)$ が定数倍を除いて再現できる。これは内積をならべたものだから、正定値である、すなわち勝手な $v \neq 0$ に対し $(v, Mv) > 0$ 。

さて、図 3.7 にあがっている図を考える。これらは拡大型ディンキン図と呼ばれるが、コンパクトリー代数のルート系としてはあらわれないことが知られている。なぜなら、上記のルールにしたがって行列 $M := (\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)$ をよみとり、ベクトル $v = (v_i)$ をその図の頂点に添えてある整数とすると、 $Mv = 0$ であることが確認できる。よって $(v, Mv) = 0$ となり、矛盾する。これは、拡大ディンキン図のどれかを部分グラフとして含むような図についても同様である。(ただし、二重矢印を一重線で置き換えたもの、等も部分グラフとして許すこととする。) なぜなら、その部分グラフのところに同じように拡大ディンキン図からくる整数をならべ、他の頂点にはゼロをならべたものを v とすると、 $(v, Mv) \leq 0$ となるからである。

これを使うと、許されるディンキン図は既知のもののみであることがわかる。これを示そう。

- まず、ディンキン図はループを含まない。なぜなら $A_n^{(1)}$ 図を含めないから。

$$\begin{aligned}
\mathfrak{su}(n+1) &= A_n & \circ - \circ - \cdots - \circ - \circ \\
\mathfrak{so}(2n+1) &= B_n & \circ - \circ - \cdots - \circ \Rightarrow \circ \\
\mathfrak{sp}(2n) &= C_n & \circ - \circ - \cdots - \circ \Leftarrow \circ \\
\mathfrak{so}(2n) &= D_n & \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \cdots - \circ - \circ \end{array} \\
E_6 & & \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array} \\
E_7 & & \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array} \\
E_8 & & \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \end{array} \\
F_4 & & \circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ \\
G_2 & & \circ \Rightarrow \circ
\end{aligned}$$

Figure 3.6: 既知のルート系のデインキン図。

$$\begin{aligned}
A_n^{(1)} & \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \circ - \circ - \cdots - \circ \\ | \quad | \quad | \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \\
B_n^{(1)} & \begin{array}{c} \circ \quad 1 \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \cdots - \circ \Rightarrow \circ \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \\
C_n^{(1)} & \begin{array}{c} \circ \Rightarrow \circ - \cdots - \circ \Leftarrow \circ \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array} \\
D_n^{(1)} & \begin{array}{c} \circ \quad 1 \quad \quad \quad \circ \quad 1 \\ | \quad \quad \quad | \\ \circ - \circ - \circ - \cdots - \circ - \circ \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array} \\
E_6^{(1)} & \begin{array}{c} \circ \quad 1 \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array} \\
E_7^{(1)} & \begin{array}{c} \circ \quad 2 \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array} \\
E_8^{(1)} & \begin{array}{c} \circ \quad 3 \\ | \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 4 \quad 2 \end{array} \\
F_4^{(1)} & \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \end{array} \\
G_2^{(1)} & \begin{array}{c} \circ - \circ \Rightarrow \circ \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \\
A_{2\ell}^{(2)} & \begin{array}{c} \circ \Leftarrow \circ - \cdots - \circ \Leftarrow \circ \\ | \quad | \quad | \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array} \\
A_{2\ell-1}^{(2)} & \begin{array}{c} \circ \quad 1 \\ | \\ \circ - \circ - \cdots - \circ \Leftarrow \circ \\ | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array} \\
D_{\ell+1}^{(2)} & \begin{array}{c} \circ \Leftarrow \circ - \cdots - \circ \Rightarrow \circ \\ | \quad | \quad | \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \\
E_6^{(2)} & \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ \Leftarrow \circ - \circ \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array} \\
D_4^{(3)} & \begin{array}{c} \circ - \circ \Leftarrow \circ \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 1 \end{array}
\end{aligned}$$

Figure 3.7: 拡大デインキン図

- 次に、ディンキン図が \Rightarrow を含むと、 G_2 のみである。なぜなら、さらに隣に頂点が繋がっていると、 $G_2^{(1)}$ か $D_4^{(3)}$ を含むから。
- 次に、ディンキン図は \Rightarrow を二つ含めない。なぜなら $D_{\ell+1}^{(2)}$ と $A_{2\ell}^{(2)}$ を含んでしまうから。
- 次に、ディンキン図が \Rightarrow を一つ含み、両側に頂点が追加されているとすると、 F_4 しかあり得ない。なぜなら、それ以上長いと、 $F_4^{(1)}$ および $E_6^{(2)}$ を含んでしまうから。
- ディンキン図が \Rightarrow を一つ含み、片側にのみ頂点が追加されているものが B_n と C_n である。
- あとは二重線、三重線を含まない場合である。ループがないから、木である。
 - 四つ足以上はありえない、なぜなら $D_n^{(1)}$ を含むから。
 - 三つ足で、各足の長さが全て二以上あることはありえない、なぜなら $E_6^{(1)}$ を含むから。
 - 三つ足で、長さ1の足、長さ3の足、長さ3以上の足はありえない、 $E_7^{(1)}$ を含むから。
 - 三つ足で、長さ1の足、長さ2の足、とすると三本目の足は高々長さ4である。 $E_8^{(1)}$ を含むから。
 - これより、長さ1の足、長さ2の足をもつと、許されるのは $E_{6,7,8}$ のみである。
 - あとは、長さ1の足をふたつもつ D_n と、そもそも一直線である A_n のみである。

これで分類が完了した。