①

$SU(N)$, $SO(N)$ の表現

$$i\begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_n \end{pmatrix}$$

$SU(N)$ $\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$ カルタン

$$[h, E_{\alpha\beta}] = (h_\alpha - h_\beta) E_{\alpha\beta}$$
$$= i\langle h, \underbrace{e_\alpha - e_\beta}_{\text{root}} \rangle E_{\alpha\beta}.$$

traceless $\Leftrightarrow$ $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 0$

$$\begin{cases} \rho_{adj}(x)\, y = [x, y]. \\ \rho_{adj}([x, y])\, z = \rho_{adj}(x)\rho_{adj}(y)\, z - \rho_{adj}(y)\rho_{adj}(x)\, z. \end{cases}$$

$\rho_{fund}(x) = x \sim V = \mathbb{C}^n$ basis $v_1 \cdots v_n$

$\rho_f([x, y]) = \rho_f(x)\rho_f(y) - \rho_f(y)\rho_f(x)$

$$\rho(h) v_i = i h_a v_a = i\langle h, \underbrace{e_a}_{\text{weight}} \rangle v_i.$$

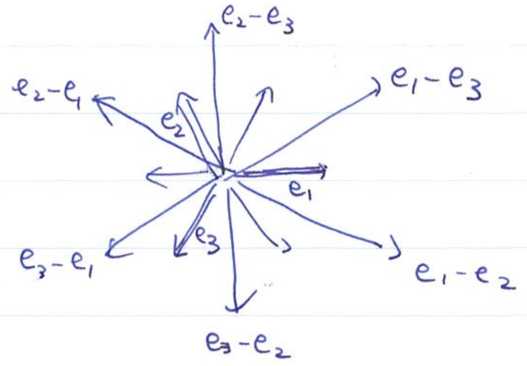
$\rho_{anti\text{-}fund}(x) = \bar{x}$. $\sim \bar{V} = \mathbb{C}^n$ basis $\bar{v}_1 \cdots \bar{v}_n$

$$\rho_f(h)\bar{v}_a = -i h_a \bar{v}_a = i\langle h, \underbrace{-e_a}_{\text{weight}} \rangle v_i$$

weightが違う ⇕ 表現が違う

adj 表現の weight ← {ルート} + 0 が $(N-1)$ 回.

例 $SU(3)$ $\quad 3 \quad \bar{3}$



$SU(3)$ 以上では $N \neq \bar{N}$.

$SU(2)$ は特殊 $\quad e_1 + e_2 = 0$

$e_1 = -e_2$ $\quad e_1 - e_2 = 2e_1$

$e_2 = -e_1$ $\quad e_2 - e_1 = -2e_1$

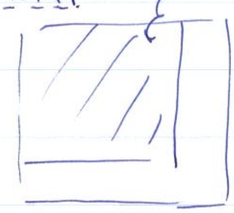
$\mathbf{2} = \bar{\mathbf{2}}$

$SU(2)$ のスピン j 表現 の weight :

$$\{ \vec{J}^2 \text{の固有値}\ m \} \longleftrightarrow \underbrace{-2j e_1,\ (-2j+2)e_1,\ \cdots,\ 2j e_1}_{2j+1\text{コ}}.$$

表現の分解

$SU(m)$



$SU(n)$ の表現は
$SU(m)$ の表現と思える.
どう分解するか？

例

$SU(4)$ の fundamental $\mathbb{C}^4$ weight: $e_1 \cdots e_4$.

$SU(3)$ のカルタンは
$SU(4)$ のカルタンに $h_4=0$ として うめこまれている.

$e_1+e_2+e_3+e_4=0$

$e_1+e_2+e_3=0,\ e_4=0$.

$\underbrace{e_1\ e_2\ e_3}_{SU(3)\text{ の fund.}},\ \underbrace{e_4=0}_{\text{自明な表現}}$.

15次元

$SU(4)$ の adjoint weight: e_a-e_b, $a\neq b$, $0,0,0$

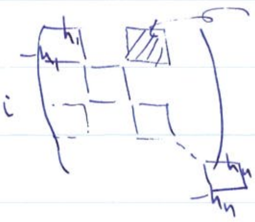
$0,0$ e_a-e_b, $a,b=1,2,3$, $e_a-\underbrace{e_4}_{ゼロ}$, $\underbrace{e_4}_{ゼロ}-e_a$, 0

$SU(3)$ adj. $SU(3)$ f. $SU(3)$ af. 自明.

14次元

G_2 の adj $\rightsquigarrow$ $SU(3)$ の adj $SU(3)$ f, $SU(3)$ af.
$\cup$
$SU(3)$

$SO(2N)$



4成分. てきとうな線形結合

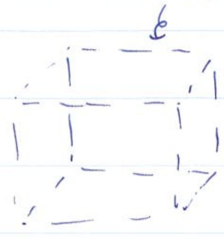
$$[h, E^{\pm\pm}_{a,b}] = i(\pm h_a \pm h_b)E^{\pm\pm}_{a,b}$$

$$= i\langle \underbrace{\pm e_a \pm e_b}_{ルート}, h\rangle E^{\pm\pm}_{a,b}$$

$a<b$

adj 表現の weight: {ルート} ∪ 0 が n コ.

$SO(6)$



SU_4 とおなじ

$\rho_{fund}(x)=x$

$$\begin{pmatrix} & 1\\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\\ -1\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & 1\\ -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\\ -1\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\quad h v_a^{\pm} = \pm i h_a v_a^{\pm} = i\langle \pm e_a, h\rangle E^{\pm}_{a,b}.$$

$\bar{x}=x$ なので 考えても 仕方がない.

系 $U(N) \subset SO(2N)$ $\qquad U(N) \curvearrowright \mathbb{C}^N = \mathbb{R}^{2N}$

Lie alg. では
$$\overbrace{N\text{-dim}}^{N}\left(\quad\right) = \overbrace{\quad}^{2N} \left(\quad \right)_{2N}$$

反エルミート

$$a+bi \iff \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$i\begin{pmatrix} h_1 & & \\ & \ddots & \\ & & h_n \end{pmatrix} \longrightarrow i\begin{pmatrix} \begin{matrix} & h_1 \\ -h_1 & \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} & h_n \\ -h_n & \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$SO(2N)$ の fund は? $\quad \pm e_a$ $\begin{cases} +e_a & : SU(n) \text{ の fund} \\ -e_a & : SU(n) \text{ の af.} \end{cases}$

adj は? $\quad \pm e_a \pm e_b \longrightarrow$ $e_a - e_b \quad a \neq b$, 0 が n → $SU(n)$ の adj.

0 が n コ

$\{ e_a + e_b \quad a<b \}$
$\{ -e_a - e_b \quad a<b \}$ まだ知らない表現.

$SU(n)$ の反対称テンソル表現.

一般に群の表現 (V, ρ_V) があったとき $\quad \rho(x)v$ ~~$= \rho(x)_{ij} v$~~

$(V\otimes V ; \rho_{V\otimes V})$ を $\rho_{V\otimes V}(x)\, v\otimes w = \rho_V(x)(v)\otimes w + v\otimes \rho(x) w$
と定めると表現になる. テンソル積表現

cf. $\quad J_{tot}(|v\rangle |w\rangle) = (J|v\rangle)|w\rangle + |v\rangle (J|w\rangle)$

$v\otimes w = -w\otimes v$
$v\otimes w = +w\otimes v$ を要求しても表現である. 反対称 / 対称 2階テンソル表現 Alt^2 / Sym^2

(一般相対論で計量は $SO(3,1)$ の対称2階テンソル.)

成分なら:

$$\rho_{Alt^2 fund}(h)\, v_a\otimes v_b = i(h_a+h_b)\, v_a\otimes v_b = i\langle e_a+e_b, h\rangle\, v_a\otimes v_b$$

$v_a\otimes v_a = 0. \quad \rightsquigarrow \{ e_a+e_b,\ a<b \}$

Alt^2 antifund $\quad \rightsquigarrow \{ -e_a-e_b,\ a<b \}$.

SO(偶n) のスピノル表現

SO(n) ↷ $\mathbb{R}^n$: fund 表現. $\pm e_a$ 等

$\wedge^2$ fund : $\pm e_a \pm e_b$: adj 表現.

0 が n 個

ぜんぜん違う形の表現がある.

so(n) の Lie 代数 : n×n 反対称. $X_{ij} = -X_{ji}$ 　　E_{ij} を $e_{ij} - e_{ji}$ とする.

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk}E_{il} - \delta_{ik}E_{jl} - \delta_{jl}E_{ik} + \delta_{il}E_{jk}.$$

これの表現を次のようにつくる:

$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ を行列で

$\gamma_i\gamma_i = 1$ 　　$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0$ $(i \neq j)$ 　をみたすものとする.

そこで 　$S_{ij} := \frac{1}{2}\gamma_i\gamma_j$ 　とする.

~~これは~~ 　$[S_{ij}, S_{kl}] = \cdots$ 　をみたす.

∴ 　$\rho(E_{ij}) = S_{ij}$ は表現. 　　Dirac spinor

n=3 　$\gamma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\gamma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$, $\gamma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ と選べばよい.

$S_{12} = \frac{i}{2}\sigma_3$, $S_{23} = \frac{i}{2}\sigma_1$, $S_{31} = \frac{i}{2}\sigma_2$. 　　2次元. 　n=3

$|\pm \pm \cdots \pm\rangle$

n=4
$\gamma_1 = \sigma_x \otimes \mathbb{1} \otimes 1$
$\gamma_2 = \sigma_y \otimes \mathbb{1} \otimes 1$
$\gamma_3 = \sigma_z \otimes \sigma_x \otimes 1$ 　とすればよい.
$\gamma_4 = \sigma_z \otimes \sigma_y \otimes 1$

n=5 　$\gamma_5 = \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_x \otimes 1$ 　とする.

n=6 　$\gamma_6 = \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_y \otimes 1$

n=7 　$\gamma_7 = \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_z \otimes \sigma_x$

n=8 　$\gamma_8 = \cdots\cdots \sigma_z \otimes \sigma_y$

4次元 　n=4
2 ↙ ↓ 2 　± 1 に分解 ∈ 　γ_5 は $\gamma_1 \cdots \gamma_4$ と反可換, S_{ij} と可換
Weyl spinor
even d
4次元 　n=5
8次元 　n=6
4 ↙ ↓ 4
8次元 　n=7
16次元 　n=8
8 ↙ ↓ 8

weight は?

SO(6) のばあい
$S_{12} = \frac{i}{2}\sigma_z \otimes 1$
$S_{34} = \frac{i}{2} 1 \otimes \sigma_z$
$S_{56} = \quad \otimes \sigma_z$

よって 　$(h_1 S_{12} + h_2 S_{34} + h_3 S_{56})|\pm\pm\pm\rangle$
$= i\,\frac{1}{2}(\pm h_1 \pm h_2 \pm h_3)|\pm\pm\pm\rangle$

の weight は $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3)$. γ_7 の固有値 $+1$ ＋が even つ, -1 odd つ

一般には

$so(2n)$ の dirac spinor $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \cdots \pm e_n)$ 2^n

γ_{2n+1} $+1$ ＋が even つ 2^{n-1}, -1 odd つ 2^{n-1}

$so(6) \simeq su(4)$

$\frac{6\times 3}{2}=15$ 　 $4^2-1=15$

より 自明.

$so(6)$ のばあい, これで $so(6) \longrightarrow su(4)$ がつくれた。

$so(3) \simeq su(2)$

$so(5) \simeq sp(2)$

これ以上はない.

応用? 標準模型の spectrum.

$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$

つよい力 　 弱い力 　 ハイパーチャージ

$J^{weak}_{x,y,z}$ 　 Y

Higgs をこう

$J_z + Y =: Q_{maxwell}$

Q_L $\mathbf{3}$	$\otimes$	$\mathbf{2}$ $\begin{matrix} u_L \\ d_L \end{matrix}$	$Y = 1/6$	$Q = \begin{matrix} 1/2 + 1/6 = 2/3 \\ -1/2 + 1/6 = -1/3 \end{matrix}$	proton uud, neutron udd
$\bar{\mathbf{3}}$	$\otimes$	$\mathbb{1}$ $\bar{u}_R$	$Y = -2/3$	$-2/3$	
$\bar{\mathbf{3}}$	$\otimes$	$\mathbb{1}$ $\bar{d}_R$	$Y = 1/3$	$+1/3$	
1	$\otimes$	$\mathbf{2}$ $\begin{matrix} \nu_L \\ e_L \end{matrix}$	$Y = -1/2$	$Q = \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}$	
1	$\otimes$	1 $\bar{e}_R$	$Y = 1$	$+1$	
1	$\otimes$	1 $\bar{\nu}_R$	$Y = 0$	0	

one generation.

$u \quad c \quad t$

$d \quad s \quad b$

$e \quad \mu \quad \tau$

$\nu_e \quad \nu_\mu \quad \nu_\tau$.

three gen.

$$SO(10) \supset U(5) \supset SU(5) \supset SU(3)\times SU(2)\times U(1)$$

$$i\begin{pmatrix} & -h_1 \\ h_1 & \end{pmatrix} \ddots \qquad i\begin{pmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_5 \end{pmatrix}$$

$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$:

$$\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & +3 & \\ & & & & +3 \end{pmatrix} \Big/ 12$$

take negative chi. sp.

$\overline{\nu_R}$	$- - -$	$- -$	$Y=0$
$\overline{e_R}$	$- - -$	$+ +$	$Y=1$
ν_L, e_L	$+ + +$	$+ -$, $- +$	$Y=-1/2$
$\overline{d_R}$	$+ + -$, $+ - +$, $- + +$	$+ +$	$Y=\frac{-2+6}{12}=1/3$
$\overline{u_R}$	$+ + -$, $+ - +$, $- + +$	$- -$	$Y=\frac{-2-6}{12}=-2/3$
u_L, d_L	$+ - -$, $- + -$, $- - +$	$+ -$, $- +$	$Y=\frac{2}{12}=+1/6$

$$\frac{1}{2}(e_1-e_2-e_3+e_4-e_5)$$

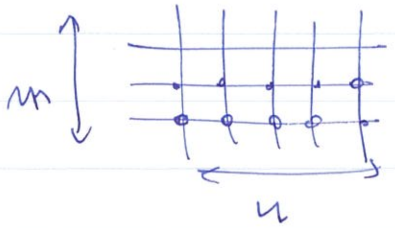
$e_1+e_2+e_3=0$ をつかった.

as $SU(3)$: $e_4=e_5=0$ とおく. $=\frac{1}{2}(e_1-e_2-e_3) = e_1$

as $SU(2)$: $e_1=e_2=e_3=0$ とおく. $=\frac{1}{2}(e_4-e_5) = e_4$.

でも実験的にはダメっぽい.

spin 表現の応用 その2: 2d イジング もけい.



$$Z = \sum_{\{\pm 1\}} e^{t\sum (S_I S_I \text{よことなり} + S_I S_I \text{たてとなり})}$$

$t>0$ とする.

t 大: そろいやすい. t 小: 乱雑.

$$\frac{P(\uparrow\uparrow)}{P(\uparrow\downarrow)} = e^{2t}.$$

Kramers-Wannier 1941
Onsager 1944
Kaufman 1949 ← この方法.

$\boxed{\sinh 2t \cdot \sinh 2t' = 1}$

よこ並び を $\underbrace{|\pm\pm \cdots \pm\rangle}_{n\text{コ}}$ という qubit 列だと思う.

固有状態.

$$e^{t\sum S_I S_{I+1}} = e^{t\sum \sigma^z_I \sigma^z_{I+1}}.$$

$e^{-2t} = \tanh t'$

$e^{t\sum S_I S_I \text{たてとなり}}$ はどうするか?

$$\begin{pmatrix} \langle +|\,|+\rangle & \langle -|\,|+\rangle \\ \langle +|\,|-\rangle & \langle -|\,|-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^{-t} & e^t \end{pmatrix} = \sqrt{\sinh 2t}\begin{pmatrix} \cosh t' & \sinh t' \\ \sinh t' & \cosh t' \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{\sinh 2t}\; e^{t'\sigma^x_I}.$$

$$\therefore\ e^{t\sum S_I S_I \text{となり}} = \langle \pm\pm\cdots| e^{t'\sum \sigma^x_I} |\pm\pm\cdots\pm\rangle \times (\sinh 2t)^{n/2}.$$

$$\therefore\ Z = \mathrm{tr}_{|\pm\cdots\pm\rangle}\left(e^{t'\sum\sigma^x_I}\, e^{t\sum \sigma^z_I \sigma^z_{I+1}}\right)^m \times (\sinh 2t)^{\frac{mn}{2}}.$$

この $2^n \times 2^n$ 行列を対角化すればよい.

$\gamma_1 = \sigma_z$
$\gamma_2 = \sigma_y$ $\qquad \gamma_1\gamma_2 = i\sigma^x$
$\gamma_3 = \sigma_x \otimes \sigma_z$ $\qquad \gamma_2\gamma_3 = i\,\sigma_z \otimes \sigma_z$
$\gamma_4 = \sigma_x \otimes \sigma_y$ $\qquad \gamma_3\gamma_4 = i\sigma^x$
$\gamma_5 = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_z$ $\qquad \gamma_4\gamma_5 = \sigma_z \otimes \sigma_z$ など.

⋮ ⋮

⑧

$$Z = (\sinh 2t)^{\frac{MN}{2}} \, \mathrm{tr}_{|\pm \cdots \pm\rangle} \Big(\overbrace{e^{t'(i\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3\gamma_4 + \cdots)} \times e^{t(i\gamma_2\gamma_3 + \gamma_4\gamma_5 + \cdots)}}^{Y} \Big)^M$$

$t \leftrightarrow t'$ で対称.

$\sinh 2t \cdot \sinh 2t' = 1$

$\sinh 2t = 1$ で相転移. (Kr. Wa)

$\frac{1}{2}\gamma_i\gamma_j \leftrightarrow E_{ij}$ から

$$X := \overbrace{e^{2t' i (E_{12} + E_{34} + \cdots)}}^{A} \, \overbrace{e^{2ti(E_{23} + E_{45} + \cdots)}}^{B}$$

$2n\times 2n$ 行列. の固有値を $e^{\pm\alpha_i}$ $i = 1 \cdots n$ とすると

Y の固有値は $e^{\frac{1}{2}(\pm\alpha_1 \pm \alpha_2 \cdots \pm \alpha_n)}$

$$\therefore \; Z = (\sinh 2t)^{\frac{MN}{2}} \sum e^{\frac{1}{2}(\pm\alpha_1 \cdots \pm\alpha_n) m}$$

$$= (\sinh 2t)^{\frac{MN}{2}} \prod_i \left(e^{\frac{m\alpha_i}{2}} + e^{-\frac{m\alpha_i}{2}} \right), \quad \to \frac{1}{MN} \log Z = \frac{1}{2}\log \sinh 2t + \frac{1}{n}\sum_i \frac{\alpha_i}{2}$$

α_i を求めよう!

$$A = \begin{pmatrix} \cosh 2t' & \sinh 2t' & & \\ \sinh 2t' & \cosh 2t' & & \\ & & \square & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (2n \times 2n)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \square & & \\ & & \square & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

periodic bndry cnd. とすると, eigenvec は

a
b
$a e^{ik}$
$b e^{ik}$
$a e^{i2k}$
$\vdots$

と仮定してよい.

$k_I = \frac{2\pi I}{N}$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ には

$$\begin{pmatrix} \cosh 2t' & \sinh 2t' \\ \sinh 2t' & \cosh 2t' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & e^{-ik} \\ 1 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh 2t & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & 1 \\ e^{ik} & \end{pmatrix}$$

で作用.

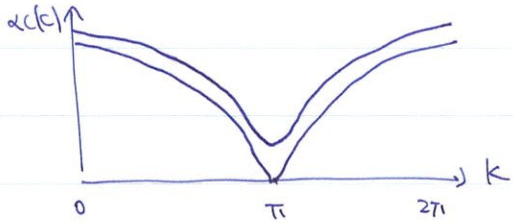
$$\rightsquigarrow \; e^{\alpha_I} + e^{-\alpha_I} = 2(\cosh 2t)(\cosh 2t') + 2\cos k \,(\sinh 2t)(\sinh 2t')$$

$$= 2\cosh(2(t-t')) + \left(\cos\frac{k}{2}\right)^2 \sinh 2t \, \sinh 2t'$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{M N} \log Z = \frac{1}{2}\left(\log \sinh 2t + \int_0^{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \alpha(k)\right)$$

$$\underbrace{e^{\alpha(k)} + e^{-\alpha(k)}}_{\substack{\vee\!\!\!/ \\ 2}} = \underbrace{2\cosh\left(2(t-t')\right)}_{\substack{\vee\!\!\!/ \\ 2}} + \underbrace{\left(\cos\frac{k}{2}\right)^2}_{\sim 0 \text{ when } k=\pi}.$$

$t=t'$ のとき, $k\sim\pi$ で $\alpha(k) \propto |k-\pi|$



$t\sim t'$ のときに

自由エネルギーに

非解析性が出る!!