群のコホモロジー

量子力学における対称性：射影表現

$$G \ni g \rightsquigarrow \rho(g) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$
$$|\psi\rangle \mapsto \rho(g)|\psi\rangle$$

$$|\psi\rangle \xrightarrow{g} \rho(g)|\psi\rangle \xrightarrow{h} \rho(h)\rho(g)|\psi\rangle$$
$$|\psi\rangle \xrightarrow{hg} \rho(gh)|\psi\rangle$$

同じはず…

普通には：　$\rho(h)\rho(g) = \rho(gh)$　：　ρ は G の表現.

しかし　$|\psi\rangle$ と $e^{i\theta}|\psi\rangle$ は区別できない.

そこで　$\rho(h)\rho(g) = \underbrace{c(h,g)}_{}\, \rho(hg)$　と緩める.

← 絶対値 1 の複素数 $\in U(1)$.

ρ：G の射影表現　と言う.
projective representation

例：$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$　$x^2 = y^2 = e$.
$\rho(x) = \sigma_x$, $\rho(y) = \sigma_y$, $\rho(xy) = \sigma_z$
$c(y,x) = -1 \rightsquigarrow c(x,y) = 1$

ここで
※ 勝手な $c(h,g)$ は許されない.

$$\rho(g)\rho(g')\rho(g'') = c(g,g')\rho(gg')\rho(g'') = c(g,g')\,c(gg',g'')\,\rho(gg'g'')$$
$$= c(g',g'')\rho(g)\rho(g'g'') = c(g',g'')\,c(g,g'g'')\,\rho(gg'g'').$$

同じ

$$\rightsquigarrow \quad c(g,g')\,c(gg',g'') = c(g',g'')\,c(g,g'g'').$$

※ どうせ $|\psi\rangle$ と $e^{i\theta}|\psi\rangle$ を区別しないのだから.

$|\psi\rangle \to \rho(g)|\psi\rangle$　と　$|\psi\rangle \to \rho'(g)|\psi\rangle$　で…

$\rho'(g) = \underbrace{b(g)}_{\text{絶対値1の複素数}}\rho(g)$ なものは同じ.

$$\rho'(g)\rho'(g') = \frac{b(g)b(g')}{b(gg')}\overbrace{\rho'(gg')}^{c(g,g')}$$

$$\therefore\quad c'(g,g') = \underbrace{\frac{b(g)b(g')}{b(gg')}}_{}\, c(g,g')$$

これだけ異なる c と c' は

同一視すべき.

特に $c(g,g') := \dfrac{b(g)b(g')}{b(gg')}$ は自動的に の式を満たす.

$\Rightarrow$ 本質的に異なる射影表現の phase は

$$\frac{\{c(g,g')\,c(gg',g'') = c(g',g'')\,c(g,g'g'')\}}{\left\{c(g,g') := \dfrac{b(g)b(g')}{b(gg')}\right\}}$$

で分類される. 　　　但し c, b は $U(1)$ に値を取る.

群の拡大

$$A \hookrightarrow \Gamma \twoheadrightarrow G$$

群 A, G が与えられたときに、A を正規部分群として含む Γ で…

$\Gamma/A = G$ であるようなものは どんなものがあるか?

$$\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \boxed{} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$$

?

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 　　　　　　　　　　$\mathbb{Z}_4$

$x \longmapsto (x, e)$ 　　　　　　　　$x \longmapsto 2x$

$(x, y) \twoheadrightarrow y$ 　　　　　　　$y \longmapsto y \bmod 2$

Γ は集合としては $A \times G$ と同じ.

Aは部分群なので $(a,e)\circ(b,e) = (ab,e)$

Gは ―― でない. $(e,g)\circ(e,h) = (c(g,h), gh)$

$$\begin{array}{ccccc} (e,g) & \circ & (e,h) & = & (c(g,h),gh) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ g & \circ & h & = & gh \end{array}$$

$$(e,g)\circ(e,h)\circ(e,k) = (c(g,h),gh)\circ(e,k) = (c(g,h)c(gh,k), ghk)$$

$$(e,g)\circ(c(h,k),hk) = (c(g,hk)c(h,k), ghk)$$

$$\rightsquigarrow \quad c(g,h)c(gh,k) = c(g,hk)c(h,k)$$

また $A\times G$ に $(e,g)\circ(e,g) = (c(g,h), gh)$ で群構造をいれたものを $A\times_c G$ と書く.

$$[e,g]\,\square\,[e,h] = [c'(g,h), gh]$$

は $A\times_{c'} G$.

ここで

$$\begin{array}{ccc} A\times_{c'} G & & A\times_c G \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [e,g] & \longleftrightarrow & (b(g),g) \end{array}$$

と対応させる.

すると $c'(g,h) = \dfrac{b(g)\,b(g')}{b(gg')}\,c(g,h)$ となる.

$A\times_{c'} G \simeq A\times_c G$ は同型.

⇒ 本質的に異なる群の拡大 $A \hookrightarrow \Gamma \twoheadrightarrow G$ は

$$\{c(g,h)c(gh,k) = c(g,hk)c(h,k)\} \Big/ \left\{c(g,h) := \frac{b(h)\,b(k)}{b(hk)}\right\}$$

で与えられる.

例

$$\mathbb{Z}_{10} \hookrightarrow \boxed{\quad} \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$$

集合としては $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$.

加法的に書くと

$$(a, 0) \boxplus (b, 0) = (a+b, 0)$$

$$(0, a) \boxplus (0, b) = (?, a+b)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$a \qquad\qquad b$$

一般に: $? = \begin{cases} 0 & \\ 1 & \end{cases}$ $a+b$ を mod 10 でなく足したとき 9以下 / 10以上.

$$(p, a) \boxplus (q, b) = (p+q+?(a,b), a+b)$$

$$(3, 2) \boxplus (1, 9) = (3+1+1, 1)$$

$$= (5, 1)$$

⇝ 繰り上がり足し算. $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10} \underset{?}{\cong} \mathbb{Z}_{100}$

小学生のときに群の拡大を習っていた!?

しかし

この変テコな関係式は何か?

群 G
可換群 A に対し $C^n(G, A)$ を $f(g_1, g_2, \cdots, g_n) \in A$ なる関数全体のなすアーベル群とする.

$$d : C^n(G, A) \longrightarrow C^{n+1}(G, A)$$

$$f \longmapsto df$$

を

$$\begin{aligned}(df)(g_1, \cdots, g_n, g_{n+1}) := {} & f(g_2, g_3, \cdots, g_{n+1}) \\ & - f(g_1 g_2, g_3, \cdots, g_{n+1}) \\ & + f(g_1, g_2 g_3, \cdots, g_{n+1}) \\ & \vdots \\ & + (-1)^n f(g_1, g_2, \cdots, g_n g_{n+1}) \\ & + (-1)^{n+1} f(g_1, \cdots, g_n)\end{aligned}$$

とする.

$$\begin{array}{ccc} C^2(G, U(1)) & \longrightarrow & C^3(G, U(1)) \\ \Psi & & \Psi \\ c & \longmapsto & dc \end{array}$$

$$(dc)(g,h,k) = \frac{c(h,k)\,c(g,hk)}{c(gh,k)\,c(g,h)}$$

$$\begin{array}{ccc} C^1(G, U(1)) & \longrightarrow & C^2(G, U(1)) \\ \Psi & & \\ b & \longmapsto & db \end{array}$$

$$(db)(g,h) = \frac{b(g)\,b(h)}{b(gh)}$$

一般に

$$\begin{array}{ccccc} C^n & \xrightarrow{d} & C^{n+1} & \xrightarrow{d} & C^{n+2} \\ \Psi & & & & \\ f & \longmapsto & df & \longmapsto & ddf = 0 \end{array}$$

自動的.

そこで

$$H^n(G,A) := \frac{\{ f \in C^n(G,A) \text{ で } df = 0 \}}{\{ f \in C^{n-1}(G,A) \text{ に対し } df \}}$$

を A に値を取る G の n 次のコホモロジー と言う.

[空間のコホモロジーを知っている人は：

G に対し BG (s.t. $\pi_1(BG) = G$, $\pi_{n\geq 2}(BG) = 0$) なる空間があることが知られている.

$$H^n(BG, A) = H^n(G, A)$$

空間のコホモロジー　　上記のように代数的にまとめたもの.]

さて：

G の射影表現のタイプ $\Longleftrightarrow$ $H^2(G, U(1))$

$A \hookrightarrow \Gamma \twoheadrightarrow G$ なる拡大 $\Longleftrightarrow$ $H^2(G, A)$

ということがわかった。

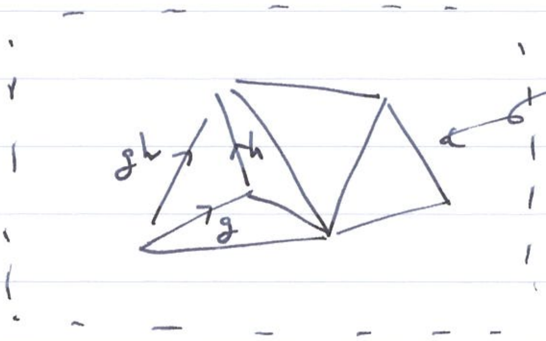
一般の $H^n(G,A)$ は物理に出てくるのか???

hepでは Dijkgraaf-Witten "Topological gauge th. and Group Cohomology" Comm. Math. Phys 129 (1990) 393

cond-matでは Chen-Gu-Liu-Wen "Symmetry-protected top. orders and the group coho. of their symmetry group" Phys. Rev. B 87 (2013) 155114 arXiv: 1106.4772

空間1次元、時間1次元 のりろんで G 対称性があったとする。

$Z :=$



三角形分割する。

$\prod c(g,h)$

cf. (イジング模型では 頂点に $\sigma=\pm 1$ があって $\prod_{\sigma\sigma'} e^{-J\sigma\sigma'}$)

三角形分割の仕方によらないことを要求 ("トポロジカル理論")

$$c(g,h)\,c(gh,k) \overset{要求}{=} c(g,hk)\,c(h,k)$$

"コホモロジー型 の G-保護 symmetry protected 相"

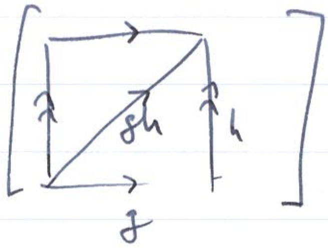
beyond cohomology 型というのもあり。

空間 d 次元，時間 1 次元で 単体分割して 同様の議論

〜 $H^{d+1}(G, U(1))$ で G-SPT が書ける.

空間が円周，まわると $g \in G$ で捻ってある

$\mathcal{H}_g$: 状態空間 … 1次元！　　ハミルトニアン = ゼロ！

$Z_{g,h} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_g}\, h = Z\Big[$  $\Big] = Z\Big[$  $\Big]$

$= c(g,h)/c(h,g)$.

例：$\underset{x}{\mathbb{Z}_2} \times \underset{y}{\mathbb{Z}_2}$　　$c(x,y) = -1$　　ほかはぜんぶ $+1$

$Z_{x,y} = -1$.

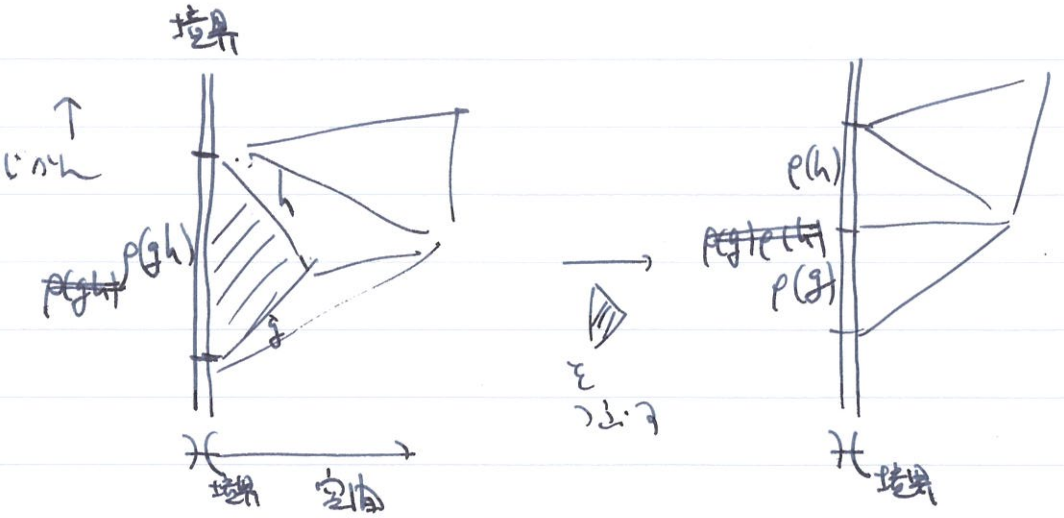
$Z_{g,e} = 1$

〜 H_g は一次元.

〜 $\mathcal{H}_x$ には y が -1 で作用
x は 1 で作用

$\mathcal{H}_y$ には x が -1 で作用
y が 1 で作用

etc.



$\rho(gh)\, c(g,h) = \rho(g)\, \rho(h)$　　ということになる.

$\Rightarrow$ 1+1 d G-SPT ($c \in H^2(G, U(1))$)

の境界には G が c で定まる射影表現で作用する.

c が非自明 ⇝ 射影表現は一次元でない

⇝ 境界には必ず何かがある.

トポロジカル相: 切ると境界に何かが起こる.

空間 じかん

d+1 次元 G-SPT ($c \in H^{d+1}(G, U(1))$)

の境界には G が $c \in H^{d+1}(G, U(1))$ で定まる

アノマリ (anomaly, 量子異常) を以て作用する.