2018年度物理数学 III レポート問題

諸連絡:

1. 以下に沢山ある課題のうち、少なくとも三つを選んで解答してください。

2. 成績評価は次の通りです。三つきちんと解いていれば、少なくとも良とします。優、優上が欲しい人は、いくつか追加で問題を解いてください。もしくは、「暇な人は〜をやってみよ」をやってみる、問題を拡張する、等してください。それらの出来を総合的に評価して、点数にします。(勿論、皆さんで結託して、皆最低限のみ解答することにすると、全ての人に優を付けざるを得なくなりますが...)

3. 講義ノート以外につかった参考文献を明示してくださると、僕がいろいろと文献を知ることができて有り難いので、可能ならお願いします。

4. 特に良く出来た面白い内容に関しては、将来私のホームページ等で(勿論やってくれた人の名前を明記して)紹介する可能性があります。といって、これまでもとても面白いのがいくつかあったのですが、ずぼらで、何もやっていないのですが...

5. また、講義ノートの誤植を見つけた人は教えてください。Bitbucket の pull request を送ってくださるとさらに有り難いです。

6. レポートは UTAS から提出してください。リンクはいずれホームページに貼る予定です。

7. PDF ファイルか、 Word ファイルか、紙に書いたのを携帯/デジカメで読めるように撮るかスキャナを使うかして画像で送るかしてください。画像ファイルは一頁一ファイルでなく、ひとつのファイルにまとめてください。やりかたが分からない人は、Google で “jpg を pdf に変換” で調べてみてください。

8. 手書きの人は、書き殴るのでなくて、採点する TA の方を哀れんで、なるべく綺麗な字で書いてください。

9. 締切は 2019/2/8(金)、日本時間23時59分までとします。2/22(金)には追レポートが必要な番号のリストを講義のウェブページに公開します。その場合は3/1(金)日本時間23時59分までに再度レポートを提出してください。

10. 問題文の意味をなさないところ、おかしいと思うところがあったら、適宜正しいと思うように修正して解答してください。僕にメールで連絡してくれたら、この問題も修正します。

課題 1

1. 位数が 10 までの有限群を全部列挙せよ。
2. (余裕のある人は) 自分が満足出来るどんどん大きな位数まで、有限群の列挙を続けよ。

課題 2

自分の選んだ身の回りの二次元の周期的な模様(最低三種類)について、写真をとって、それがどの二次元の結晶群に属するか説明せよ。

課題 3

実際の時空は $3+1$ 次元だが、$1+1$ 次元の時空のローレンツ変換について考える。かんたんのため光速 $c=1$ とする。するとローレンツ変換は t^2-x^2 を保つような線形変換である。

1. $L_\beta := \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta \\ \sinh\beta & \cosh\beta \end{pmatrix}$ はローレンツ変換であることを確認せよ。
2. $L_\beta L_{\beta'}$ を考えることにより、ローレンツ変換のなす群は実数が足し算のもとでなす群 $\mathbb{R}$ に同型な部分群を含むことを説明せよ。
3. (余裕のある人は)時間や空間を反転する変換も含めた場合のローレンツ群の構造について述べよ。

課題 4

1. $\mathbb{Z}_n$ から $\mathbb{Z}_m$ への準同型にはどんなものがあるか。
2. $\mathbb{Z}_n$ から自分自身 $\mathbb{Z}_n$ への準同型にはどんなものがあるか。また、同型にはどんなものがあるか。
3. $\mathbb{Z}_n$ から自分自身 $\mathbb{Z}_n$ への同型達は、同型の合成によって、群になることを説明せよ。この群は可換だろうか、非可換になりうるだろうか。
4. (余裕のある人は) $\mathbb{Z}_n$ の自分自身への同型のなす群がどういうものであるか、調べて記述せよ。

課題 5

S_3 を三つのもの $\{1,2,3\}$ の置換群とする。

1. 元を列挙し、共役類に分類せよ。
2. 一次元表現が二種類ある。二種類を具体的に記述せよ。

3. 二次元表現が次のように得られる: 二次元平面に正三角形が中心が原点に入るように埋め込まれているとして、 S_3 をその三つの頂点の入れ替えとして作用させる。すると、その作用は 2×2 行列としてあらわせる。これを具体的にあらわせ。また、これが既約であることを示せ。

4. 既約表現が上記三種類で尽きていることはどのようにわかるか。

課題 6

一般の S_n の共役類と既約表現について、調べて説明せよ。

課題 7

二面体群 D_{2n} は三次元空間に埋め込まれた正 n 角形をそれ自身にうつす回転のなす群だった。 a は $1/n$ 回転を生成し、x は正 n 角形を裏返す特定の元とする。それらは

$$a^n = e, \quad x^2 = e, \quad xax^{-1} = a^{-1}$$

という関係式をみたした。

1. $2n$ 個の元を具体的に a, x であらわせ。

2. 共役類へ分類せよ。(ヒント: n の偶奇によって異なる。共役類の個数は n が偶の時は $(n+6)/2$、n が奇の時は $(n+3)/2$。)

3. 既約表現は一次元であるか二次元であるかが知られている。これから、既約一次元表現および既約二次元表現がいくつずつあるか導け。

4. 一次元表現をすべて決定せよ。

5. (余裕のある人は)二次元表現もすべて決定せよ。

課題 8

- SU(3), SU(4) のルート系を、もとめる過程を説明しつつ、記述せよ。
- SO(4), SO(6) についても同様にせよ。
- (余裕のある人は) SO(5), SO(7) についても同様にせよ。

課題 9

- SO($2n$) のルート系を、もとめる過程を説明しつつ、記述せよ。
- SO($2n+1$) のルート系を、もとめる過程を説明しつつ、記述せよ。

課題 10

Sp(n) のルート系を、もとめる過程を説明しつつ、記述せよ。

課題 11

$\mathfrak{so}(7)$ のスピノル表現を (S,ρ) とする。S の最高ウェイトベクトルを v とする。

$$\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{so}(7) \mid \rho(x)v = 0\}$$

という $\mathfrak{so}(7)$ の部分代数を考える。$\mathfrak{g}$ のルート系をしらべて、これが G_2 になることを確認せよ。

課題 12

あなたの好きな非可換群をひとつ選んで、それについて(少なくとも A4 一頁ぐらいは)述べよ。数学的性質や、物理への応用を説明してくれるのを想定しているが、どうしても詩をつくりたいというならそれでもよい。

課題 13

近年大学のレポート問題といえば Wikipedia からコピペをするのが問題になっているようであるが、 Wikipedia に情報を付加するのであれば文句はないだろう。というわけで、日本語もしくは英語もしくはあなたの好きな言語の Wikipedia の、群論に関係しそうな項目について、既存記事を改良するなり、新規記事を書くなりせよ。Wikipedia は特定の編集に関してのリンクを表示することが出来るので、自分の編集がどれかを明記すること。

課題 14

その他、なんでも講義の内容に多少関係ありそうなことなら数ページ程度にまとめてレポートにしてくれても結構です。