場の量子論と数学

立川裕二

「現代物理学」第一回か第二回かのネタ

2020 年 4 月 10 日か 17 日

数学と理論物理は非常に近い...

と外からは見えるのではないでしょうか。

For a single target ($\mathcal{A}$) particle and many incident ($\mathcal{B}$) particles with different impact parameters $\mathbf{b}$, the number of scattering events is

$$N = \sum_{\substack{\text{all incident}\\ \text{particles } i}} \mathcal{P}_i = \int d^2b \; n_{\mathcal{B}} \, \mathcal{P}(\mathbf{b}),$$

where $n_{\mathcal{B}}$ is the number density (particles per unit area) of $\mathcal{B}$ particles. Since we are assuming that this number density is constant over the range of the interaction, $n_{\mathcal{B}}$ can be taken outside the integral. The cross section is then

$$\sigma = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} N_{\mathcal{A}}} = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} \cdot 1} = \int d^2b \; \mathcal{P}(\mathbf{b}). \tag{4.75}$$

Deriving a simple expression for σ in terms of $\mathcal{M}$ is now a fairly straightforward calculation. Combining (4.75), (4.74), and (4.68), we have (writing $d\sigma$ rather than σ since this is an infinitesimal quantity)

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f}\right) \int d^2b \left(\prod_{i=\mathcal{A},\mathcal{B}} \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3\bar{k}_i}{(2\pi)^3} \frac{\phi_i^*(\bar{\mathbf{k}}_i)}{\sqrt{2\bar{E}_i}} \right)$$
$$\times\, e^{i\mathbf{b}\cdot(\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}} - \mathbf{k}_{\mathcal{B}})} \left({}_{\text{out}}\langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\mathbf{k}_i\} \rangle_{\text{in}}\right) \left({}_{\text{out}}\langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\bar{\mathbf{k}}_i\} \rangle_{\text{in}}\right)^*, \tag{4.76}$$

where we have used $\bar{k}_{\mathcal{A}}$ and $\bar{k}_{\mathcal{B}}$ as dummy integration variables in the second half of the squared amplitude. The d^2b integral can be performed to give a factor of $(2\pi)^2 \delta^{(2)}(k_{\mathcal{B}}^{\perp} - \bar{k}_{\mathcal{B}}^{\perp})$. We get more delta functions by writing the final two factors of (4.76) in terms of $\mathcal{M}$. Assuming that we are not interested in the trivial case of forward scattering where no interaction takes place, we can drop the $\mathbf{1}$ in Eq. (4.72) and write these factors as

$$\left({}_{\text{out}}\langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\mathbf{k}_i\} \rangle_{\text{in}}\right) = i\mathcal{M}(\{k_i\} \to \{p_f\})\,(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\textstyle\sum k_i - \sum p_f);$$
$$\left({}_{\text{out}}\langle \{\mathbf{p}_f\} | \{\bar{\mathbf{k}}_i\} \rangle_{\text{in}}\right)^* = -i\mathcal{M}^*(\{\bar{k}_i\} \to \{p_f\})\,(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\textstyle\sum \bar{k}_i - \sum p_f).$$

We can use the second of these delta functions, together with the $\delta^{(2)}(k_{\mathcal{B}}^{\perp} - \bar{k}_{\mathcal{B}}^{\perp})$, to perform all six of the $\bar{k}$ integrals in (4.76). Of the six integrals, only those over $\bar{k}_{\mathcal{A}}^z$ and $\bar{k}_{\mathcal{B}}^z$ require some work:

$$\begin{aligned} &\int d\bar{k}_{\mathcal{A}}^z d\bar{k}_{\mathcal{B}}^z \, \delta(\bar{k}_{\mathcal{A}}^z + \bar{k}_{\mathcal{B}}^z - \textstyle\sum p_f^z)\, \delta(\bar{E}_{\mathcal{A}} + \bar{E}_{\mathcal{B}} - \textstyle\sum E_f) \\ &\quad = \int d\bar{k}_{\mathcal{A}}^z \, \delta\Big(\sqrt{\bar{k}_{\mathcal{A}}^2 + m_{\mathcal{A}}^2} + \sqrt{\bar{k}_{\mathcal{B}}^2 + m_{\mathcal{B}}^2} - \textstyle\sum E_f\Big)\Big|_{\bar{k}_{\mathcal{B}}^z = \sum p_f^z - \bar{k}_{\mathcal{A}}^z} \\ &\quad = \frac{1}{\left| \frac{\bar{k}_{\mathcal{A}}^z}{\bar{E}_{\mathcal{A}}} - \frac{\bar{k}_{\mathcal{B}}^z}{\bar{E}_{\mathcal{B}}} \right|} \equiv \frac{1}{|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|}. \end{aligned} \tag{4.77}$$

In the last line and in the rest of Eq. (4.76) it is understood that the constraints $\bar{k}_{\mathcal{A}}^z + \bar{k}_{\mathcal{B}}^z = \sum p_f^z$ and $\bar{E}_{\mathcal{A}} + \bar{E}_{\mathcal{B}} = \sum E_f$ now apply (in addition to the constraints $\bar{k}_{\mathcal{A}}^{\perp} = k_{\mathcal{A}}^{\perp}$ and $\bar{k}_{\mathcal{B}}^{\perp} = k_{\mathcal{B}}^{\perp}$ coming from the other four integrals).

By Exercise 14.26, δ is an antiderivation relative to this product. So just as in the case of de Rham cohomology this makes the Čech cohomology $H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ into a graded algebra. If $\mathfrak{V}$ is a refinement of $\mathfrak{U}$, then the restriction map $H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \to H^*(\mathfrak{V}, \mathbb{R})$ is a homomorphism of algebras. Hence the direct limit $H^*(M, \mathbb{R})$ is also a graded algebra. Note that (14.27) also makes sense for the Čech complex $C^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ on a topological space X; this gives a product structure on the Čech cohomology $H^*(X, \mathbb{R})$ of any topological space X.

With the product structures just defined, both inclusions

$$r : \Omega^*(M) \to C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$$

and

$$i : C^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \to C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$$

are *algebra homomorphisms.* Since as we saw in Proposition 8.8, for a good cover these homomorphisms induce bijective maps in cohomology

$$H^*_{DR}(M) \simeq H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\}$$
$$H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \simeq H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\},$$

the isomorphism between $H^*_{DR}(M)$ and $H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ is an algebra isomorphism. Because $H^*(M, \mathbb{R}) = H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ for a good cover $\mathfrak{U}$, we have the following.

Theorem 14.28. *The isomorphism between de Rham and Čech*

$$H^*_{DR}(M) \simeq H^*(M, \mathbb{R})$$

is an isomorphism of graded algebras.

If a double complex K has a product structure relative to which its differential D is an antiderivation, the same is true of all the groups E_r and their operators d_r, since E_r is the homology of E_{r-1} and d_r is induced from D. With product structures, Theorem 14.14 becomes

Theorem 14.29 *Let K be a double complex with a product structure relative to which D is an antiderivation. There exists a spectral sequence*

$$\{E_r, d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}\}$$

converging to $H_D(K)$ with the following properties:

1) The $E_2^{p,q}$ term is $H_\delta^{p,q} H_d(K)$.
2) Each E_r, being the homology of its predecessor E_{r-1}, inherits a product structure from E_{r-1}. Relative to this product, d_r is an antiderivation.

WARNING. Although both E_∞ and $H_D(K)$ inherit their ring structures from K, they are generally not isomorphic as rings.

4.5 Cross Sections and the S-Matrix 105

For a single target ($\mathcal{A}$) particle and many incident ($\mathcal{B}$) particles with different impact parameters $\mathbf{b}$, the number of scattering events is

$$N = \sum_{\substack{\text{all incident}\\ \text{particles } i}} \mathcal{P}_i = \int d^2b\, n_{\mathcal{B}}\, \mathcal{P}(\mathbf{b}),$$

where $n_{\mathcal{B}}$ is the number density (particles per unit area) of $\mathcal{B}$ particles. Since we are assuming that this number density is constant over the range of the interaction, $n_{\mathcal{B}}$ can be taken outside the integral. The cross section is then

$$\sigma = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} N_{\mathcal{A}}} = \frac{N}{n_{\mathcal{B}} \cdot 1} = \int d^2b\, \mathcal{P}(\mathbf{b}). \tag{4.75}$$

Deriving a simple expression for σ in terms of $\mathcal{M}$ is now a fairly straightforward calculation. Combining (4.75), (4.74), and (4.68), we have (writing $d\sigma$ rather than σ since this is an infinitesimal quantity)

$$\begin{aligned} d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_f}\right)\int d^2b \left(\prod_{i=\mathcal{A},\mathcal{B}} \int \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}\frac{\phi_i(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2E_i}} \int \frac{d^3\bar{k}_i}{(2\pi)^3}\frac{\phi_i^*(\bar{\mathbf{k}}_i)}{\sqrt{2\bar{E}_i}}\right) \\ \times e^{i\mathbf{b}\cdot(\bar{\mathbf{k}}_{\mathcal{B}}-\mathbf{k}_{\mathcal{B}})} \big({}_{\text{out}}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\mathbf{k}_i\}\rangle_{\text{in}}\big)\big({}_{\text{out}}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\bar{\mathbf{k}}_i\}\rangle_{\text{in}}\big)^*, \end{aligned} \tag{4.76}$$

where we have used $\bar{k}_{\mathcal{A}}$ and $\bar{k}_{\mathcal{B}}$ as dummy integration variables in the second half of the squared amplitude. The d^2b integral can be performed to give a factor of $(2\pi)^2\delta^{(2)}(k_{\mathcal{B}}^{\perp} - \bar{k}_{\mathcal{B}}^{\perp})$. We get more delta functions by writing the final two factors of (4.76) in terms of $\mathcal{M}$. Assuming that we are not interested in the trivial case of forward scattering where no interaction takes place, we can drop the $\mathbf{1}$ in Eq. (4.72) and write these factors as

$$\begin{aligned} \big({}_{\text{out}}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\mathbf{k}_i\}\rangle_{\text{in}}\big) &= i\mathcal{M}(\{k_i\}\to\{p_f\})\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(\textstyle\sum k_i - \sum p_f); \\ \big({}_{\text{out}}\langle\{\mathbf{p}_f\}|\{\bar{\mathbf{k}}_i\}\rangle_{\text{in}}\big)^* &= -i\mathcal{M}^*(\{\bar{k}_i\}\to\{p_f\})\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(\textstyle\sum \bar{k}_i - \sum p_f). \end{aligned}$$

We can use the second of these delta functions, together with the $\delta^{(2)}(k_{\mathcal{B}}^{\perp} - \bar{k}_{\mathcal{B}}^{\perp})$, to perform all six of the $\bar{k}$ integrals in (4.76). Of the six integrals, only those over $\bar{k}_{\mathcal{A}}^z$ and $\bar{k}_{\mathcal{B}}^z$ require some work:

$$\begin{aligned} &\int d\bar{k}_{\mathcal{A}}^z d\bar{k}_{\mathcal{B}}^z\, \delta(\bar{k}_{\mathcal{A}}^z + \bar{k}_{\mathcal{B}}^z - \textstyle\sum p_f^z)\, \delta(\bar{E}_{\mathcal{A}} + \bar{E}_{\mathcal{B}} - \sum E_f) \\ &\quad = \int d\bar{k}_{\mathcal{A}}^z\, \delta\Big(\sqrt{\bar{k}_{\mathcal{A}}^2 + m_{\mathcal{A}}^2} + \sqrt{\bar{k}_{\mathcal{B}}^2 + m_{\mathcal{B}}^2} - \textstyle\sum E_f\Big)\Big|_{\bar{k}_{\mathcal{B}}^z = \Sigma p_f^z - \bar{k}_{\mathcal{A}}^z} \\ &\quad = \frac{1}{\left|\frac{\bar{k}_{\mathcal{A}}^z}{\bar{E}_{\mathcal{A}}} - \frac{\bar{k}_{\mathcal{B}}^z}{\bar{E}_{\mathcal{B}}}\right|} \equiv \frac{1}{|v_{\mathcal{A}} - v_{\mathcal{B}}|}. \end{aligned} \tag{4.77}$$

In the last line and in the rest of Eq. (4.76) it is understood that the constraints $\bar{k}_{\mathcal{A}}^z + \bar{k}_{\mathcal{B}}^z = \sum p_f^z$ and $\bar{E}_{\mathcal{A}} + \bar{E}_{\mathcal{B}} = \sum E_f$ now apply (in addition to the constraints $\bar{k}_{\mathcal{A}}^{\perp} = k_{\mathcal{A}}^{\perp}$ and $\bar{k}_{\mathcal{B}}^{\perp} = k_{\mathcal{B}}^{\perp}$ coming from the other four integrals).

§14 The Spectral Sequence of a Filtered Complex 175

By Exercise 14.26, δ is an antiderivation relative to this product. So just as in the case of de Rham cohomology this makes the Čech cohomology $H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ into a graded algebra. If $\mathfrak{B}$ is a refinement of $\mathfrak{U}$, then the restriction map $H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \to H^*(\mathfrak{B}, \mathbb{R})$ is a homomorphism of algebras. Hence the direct limit $H^*(M, \mathbb{R})$ is also a graded algebra. Note that (14.27) also makes sense for the Čech complex $C^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ on a topological space X; this gives a product structure on the Čech cohomology $H^*(X, \mathbb{R})$ of any topological space X.

With the product structures just defined, both inclusions

$$r : \Omega^*(M) \to C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$$

and

$$i : C^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) \to C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)$$

are *algebra homomorphisms.* Since as we saw in Proposition 8.8, for a good cover these homomorphisms induce bijective maps in cohomology

$$\begin{aligned} H_{DR}^*(M) &\simeq H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\} \\ H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R}) &\simeq H_D\{C^*(\mathfrak{U}, \Omega^*)\}, \end{aligned}$$

the isomorphism between $H_{DR}^*(M)$ and $H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ is an algebra isomorphism. Because $H^*(M, \mathbb{R}) = H^*(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ for a good cover $\mathfrak{U}$, we have the following.

Theorem 14.28. *The isomorphism between de Rham and Čech*

$$H_{DR}^*(M) \simeq H^*(M, \mathbb{R})$$

is an isomorphism of graded algebras.

If a double complex K has a product structure relative to which its differential D is an antiderivation, the same is true of all the groups E_r and their operators d_r, since E_r is the homology of E_{r-1} and d_r is induced from D. With product structures, Theorem 14.14 becomes

Theorem 14.29 *Let K be a double complex with a product structure relative to which D is an antiderivation. There exists a spectral sequence*

$$\{E_r, d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}\}$$

converging to $H_D(K)$ with the following properties:

1) The $E_2^{p,q}$ term is $H_\delta^{p,q} H_d(K)$.
2) Each E_r, being the homology of its predecessor E_{r-1}, inherits a product structure from E_{r-1}. Relative to this product, d_r is an antiderivation.

WARNING. Although both E_∞ and $H_D(K)$ inherit their ring structures from K, they are generally not isomorphic as rings.

(左) Peskin & Schröder, “An introduction to Quantum Field Theory”
(右) Bott & Tu, “Differential Forms in Algebraic Topology”

分野横断というほどにも離れていないような気もしますが、

両側を一応体験した身からすると案外違うものです。

今日はそのような所をお話したいと思います。

このファイルは以前京大で学部後半〜院生むけにやったコロキウムの内容をすこし削ったものなので、わからなくても気にしないでください。わからなさを楽しむ。

聴衆の皆さんがどんな方か知りたいので、まずいくつか質問を:

一年生?

二年生?

それ以上?

次は:

物理が好き?

数学が好き?

どっちも好き?

どっちも嫌い?

僕はどうでしょう?

僕の専門は場の量子論/弦理論の数理的側面です。

現実と関係ないので物理でなく、

厳密でないから数学でもない。

数学でも物理でもない立場から、

場の量子論と物理と数学の話をしたいと思います。

場の量子論とは?

- 場の量子的振舞いを記述する。
- ただし、場とは時間と空間に広がっているものなら何でも,
  例えば、電磁場、電子の場、格子の揺らぎの場, …

最初の成功例は量子電磁力学で、

- 量子化された電磁場 = 光が電子などの粒子とどう相互作用するかを記述し、
- 1950 年ごろに枠組みが完成。
- それからも地道な発展がある。

量子電磁力学では、理論計算と実験結果は非常に良く合う。

電子の異常磁気モーメントという量では:

$$
\begin{aligned}
a_e^{\text{実験}} &= 0.01\,159\,652\,181\ldots \\
a_e^{\text{理論}} &= 0.01\,159\,652\,181\ldots
\end{aligned}
$$

量子電磁力学では、種々の量は
微細構造定数 $\alpha \sim 1/137$ の冪級数として摂動計算される:

$$a_e = c_1 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) + c_2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + c_3 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + \cdots$$

各係数 c_1, c_2, …はファインマン図というものを使って計算される。

c_i	値	ファインマン図	文献
c_1	$+1/2$	1 個	[Schwinger, 1948]
c_2	-0.3	7 個	[Sommerfield/Petermann, 1957-1958]
c_3	$+1.1$	72 個	[Laporta-Remiddi, hep-ph/9602417]
c_4	-1.9	891 個	[木下・仁尾, hep-ph/0507249]
c_5	$+9.2$	12672 個	[青山・早川・木下・仁尾, 1205.5368]

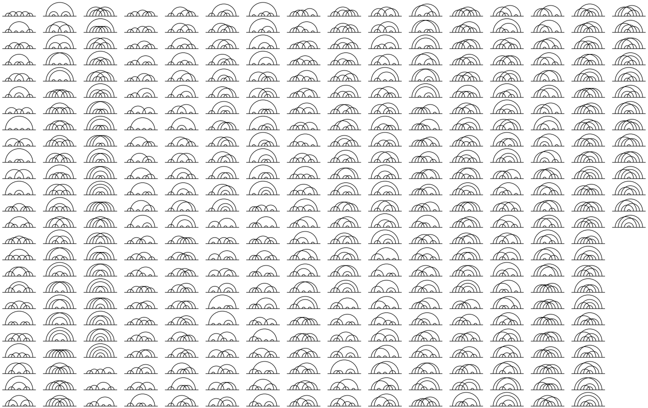


Figure: 389 self-energy diagrams representing 6354 vertex diagrams of Set V.

[http://www.riken.jp/lab-www/theory/colloquium/kinoshita.pdf]
(この木下先生のコロキウムは非常にお薦めです。)

クォーク三つを陽子や中性子に組み上げるのが量子色力学。

こちらは量子電磁力学とちがって、冪級数として計算できない。

仕方がないので、理論をまるごと
スーパーコンピュータの上に載せてシミュレーションする。

時空を格子で近似するので、格子量子色力学という。

実験と良く合うようになってきた。

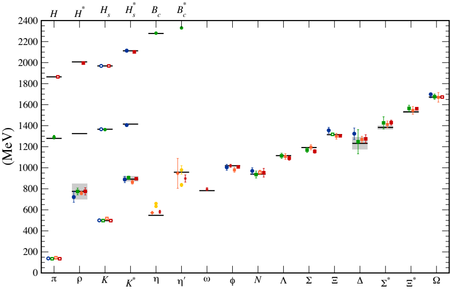


Figure 2: Hadron spectrum from lattice QCD. Comprehensive results for mesons and baryons are from MILC (27, 28), PACS-CS (29), BMW (30), and QCDSF (31). Results for η and η' are from RBC & UKQCD (32), Hadron Spectrum (33) (also the only ω mass), and UKQCD (34). Results for heavy-light hadrons from Fermilab-MILC (35), HPQCD (36), and Mohler & Woloshyn (37). Circles, squares, and diamonds stand for staggered, Wilson, and chiral sea quarks, respectively. Asterisks represent anisotropic lattices. Open symbols denote the masses used to fix parameters. Filled symbols (and asterisks) denote results. Red, orange, yellow, green, and blue stand for increasing numbers of ensembles (i.e., lattice spacing and sea quark mass). Horizontal bars (gray boxes) denote experimentally measured masses (widths). b-flavored meson masses are offset by -4000 MeV.

[Kronfeld 1203.1204]より。

これまで素粒子論の話ばかりだったが、
場の量子論は物性理論においても良く使われる。

相転移の臨界点を記述するのには共形場理論が有効で、
長い長い歴史がある。

最近流行りのトポロジカル物性においても場の量子論が多用される。

それ以外にもたくさん。

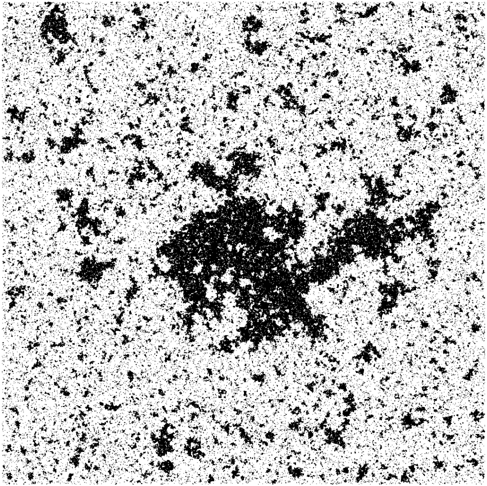
共形場理論というのは、
拡大しても同じようにみえる場の理論ということ。

磁石というのは微小な磁石である原子の向きが一方向に揃って全体として磁石になっている。そろわないと磁石にならない。

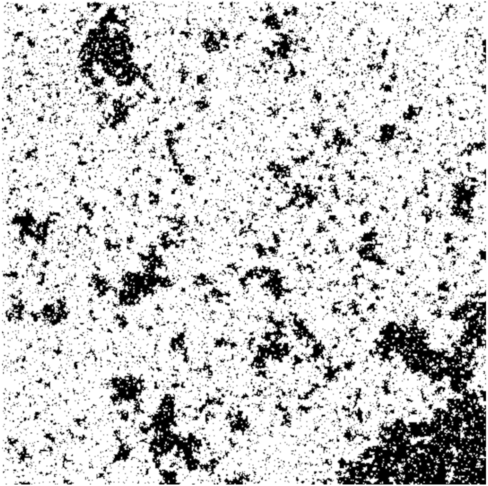
鉄とかだと、温度が低いと揃って磁石になるが、温度が高いと乱雑になって磁石でなくなる。

これを調べる簡略化したモデルがイジングモデルというもの。この講義でいずれやる予定。

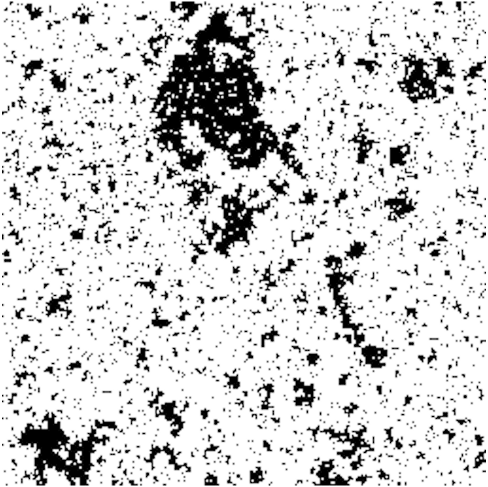
で、この 2 次元イジングモデルというのはを相転移点上でシミュレートしてみると、拡大してもだいたい同じ状況。共形場理論になることが知られている。



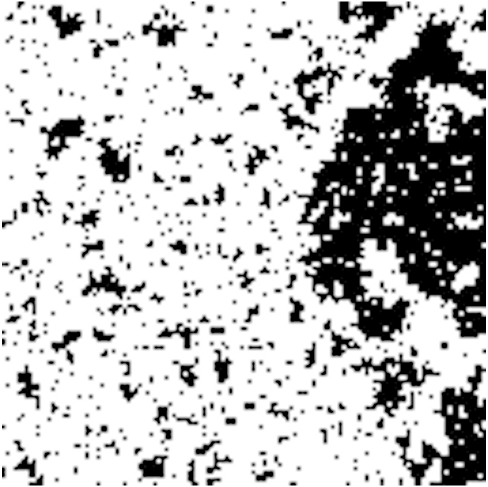
で、この 2 次元イジングモデルというのはを相転移点上でシミュレートしてみると、拡大してもだいたい同じ状況。共形場理論になることが知られている。



で、この 2 次元イジングモデルというのはを相転移点上でシミュレートしてみると、拡大してもだいたい同じ状況。共形場理論になることが知られている。



で、この 2 次元イジングモデルというのはを相転移点上でシミュレートしてみると、拡大してもだいたい同じ状況。共形場理論になることが知られている。



2 次元イジングモデルは [Onsager 1944]が厳密に解いた。

3 次元イジングモデルも厳密に解こうとがんばった人は沢山いるが、成功例なし。

もちろん、シミュレーションや実験結果はある。

2010 年ころから 3 次元イジングにも使える数値ブートストラップ法という新たな方法が開発された。

線形計画法/半正定値計画法という数学の分野を応用。

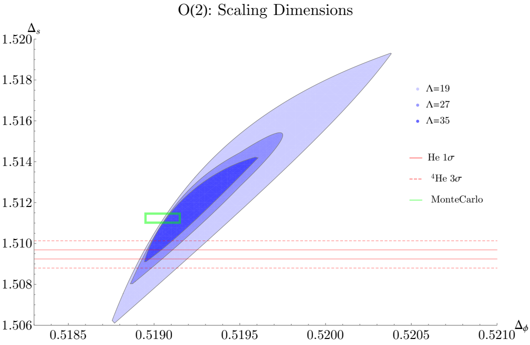


Figure 5: Allowed islands from the mixed correlator bootstrap for $N = 2$ after scanning over the OPE coefficient ratio $\lambda_{sss}/\lambda_{\phi\phi s}$ and projecting to the (Δ_ϕ, Δ_s) plane (blue regions). Here we assumed that ϕ and s are the only relevant operators in their $O(N)$ representations. These islands are computed at $\Lambda = 19, 27, 35$. The green rectangle shows the Monte Carlo determination from [17], while the horizontal lines show the 1σ (solid) and 3σ (dashed) confidence intervals from experiment [16].

[Kos,Poland,Simmons-Duffin,Vichi 1603.04436] より。

このように、場の量子論は

- よく研究されており、
- 実際の数値も精度良く計算でき、
- 実験とも良くあう。

しかし、数学的には不完全。どういうことかというと...

量子力学や、一般相対論だと、
数学者に一言で何をやっているかが説明出来る:

量子力学とは

ヒルベルト空間上のユニタリ演算子の研究。

一般相対論とは

ローレンツ型の計量をもった多様体上の
アインシュタイン方程式の研究。

場の量子論の場合は?

場の量子論とは

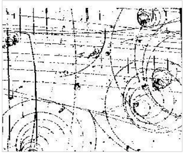
???

長らく場の量子論をやっていますから、
何なのか知っているような気はするけれども、
一言で言い表せない。

量子色力学を数学的に満足に定式化して、
閉じ込めを示せば、
賞金 1 億円。

ABOUT PROGRAMS MILLENNIUM PROBLEMS PEOPLE PUBLICATIONS

Yang–Mills and Mass Gap



The laws of quantum physics stand to the world of elementary particles in the way that Newton's laws of classical mechanics stand to the macroscopic world. Almost half a century ago, Yang and Mills introduced a remarkable new framework to describe elementary particles using structures that also occur in geometry. Quantum Yang-Mills theory is now the foundation of most of elementary particle theory, and its predictions have been tested at many experimental laboratories, but its mathematical foundation is still unclear. The successful use of Yang-Mills theory to describe the strong interactions of elementary particles depends on a subtle quantum mechanical property called the "mass gap": the quantum particles have positive masses, even though the classical waves travel at the speed of light. This property has been discovered by physicists from experiment and confirmed by computer simulations, but it still has not been understood from a theoretical point of view. Progress in establishing the existence of the Yang-Mills theory and a mass gap will require the introduction of fundamental new ideas both in physics and in mathematics.

This problem is: Unsolved

http://www.claymath.org/millennium-problems

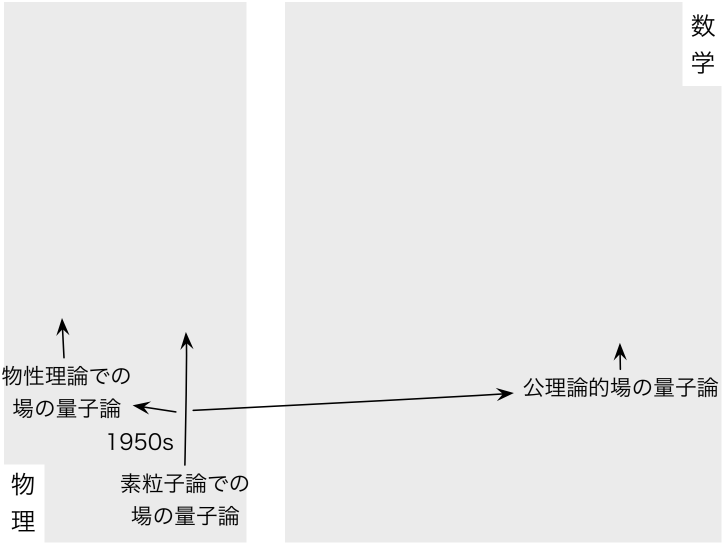
別に数学的に何をやっているかが一言で言い表せなくても、
構わないといえば構わない。

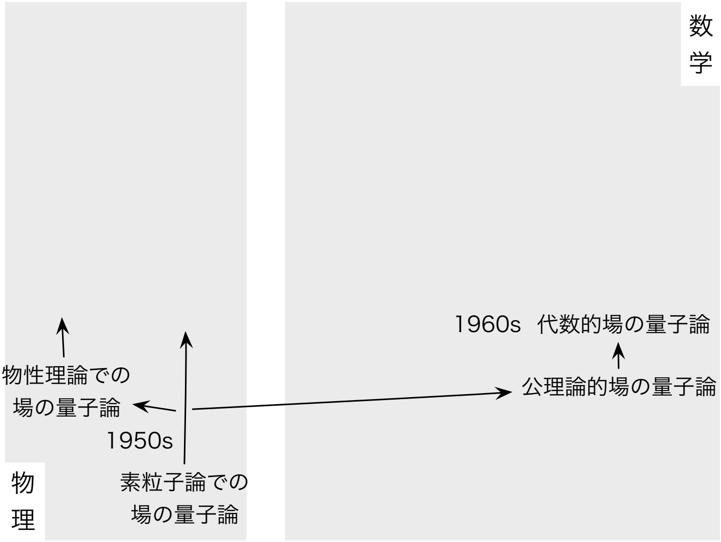
古代エジプト人は、数学的に定式化はしていなかったけれど、
ピラミッドをつくりました。

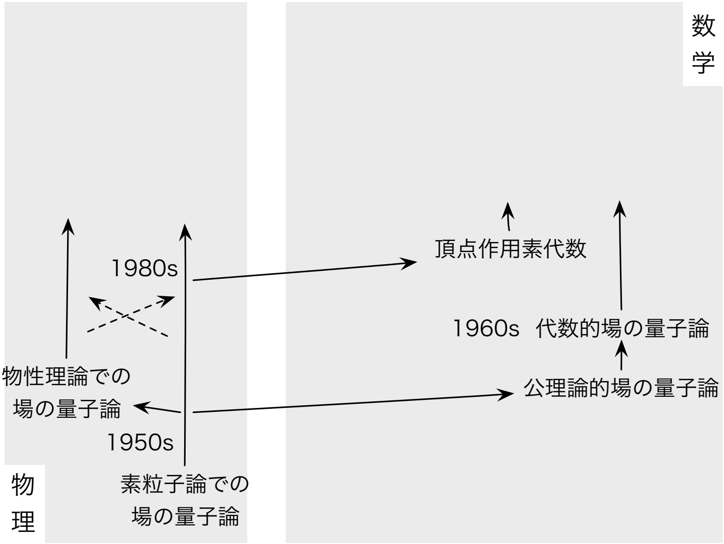
物理屋も、数学的に定式化は出来ていないけれど、計算出来て、
実験と合います。

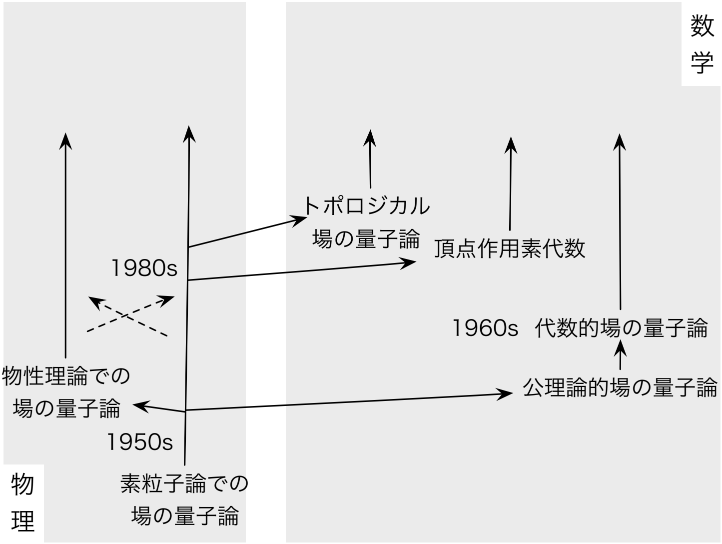
でもまあ、僕としては不満足に感じるわけです。

勿論、数学者がこれまで場の量子論を数学にしようと
頑張らなかったわけではありませんが…

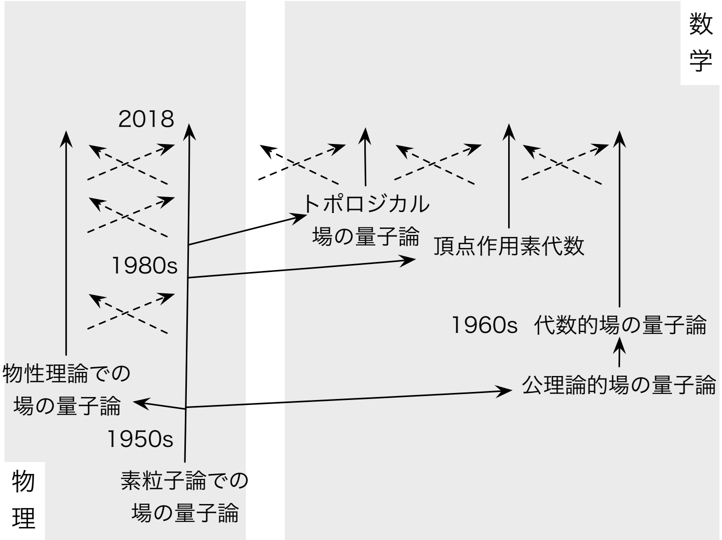

数学
物性理論での
場の量子論
1950s
公理論的場の量子論
物理
素粒子論での
場の量子論


数学
1960s 代数的場の量子論
公理論的場の量子論
物性理論での
場の量子論
1950s
物理
素粒子論での
場の量子論

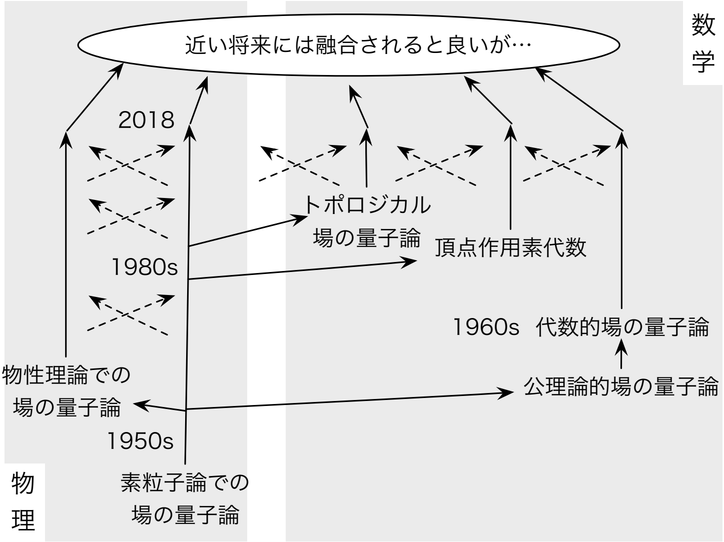

数
学
頂点作用素代数
1980s
1960s
代数的場の量子論
公理論的場の量子論
物性理論での
場の量子論
1950s
物
理
素粒子論での
場の量子論



数学
トポロジカル
場の量子論
頂点作用素代数
1980s
1960s
代数的場の量子論
物性理論での
場の量子論
公理論的場の量子論
1950s
物理
素粒子論での
場の量子論



数学
2018
トポロジカル
場の量子論
頂点作用素代数
1980s
1960s
代数的場の量子論
物性理論での
場の量子論
公理論的場の量子論
1950s
物理
素粒子論での
場の量子論


数学
近い将来には融合されると良いが…
2018
トポロジカル
場の量子論
頂点作用素代数
1980s
1960s
代数的場の量子論
物性理論での
場の量子論
公理論的場の量子論
1950s
物理
素粒子論での
場の量子論

場の量子論の数学

$\downarrow$

場の量子論における数学

$\downarrow$

場の量子論からの数学

場の量子論の数学

$\downarrow$

場の量子論における数学

$\downarrow$

場の量子論からの数学

場の量子論が数学的に不完全だといっても、

計算の途中には既存の数学は勿論使います。

場の量子論をやりたい、という学部学生さんに
ときどき聴かれる質問に

「数学は何を勉強しておけば良いですか?」というのがあります。

これは難しい質問。

素粒子論での場の量子論をするなら、当然

- ローレンツ群とその標準的な表現のいくつか、
- $SU(N)$ とその標準的な表現のいくつか

ぐらいはどうしても使うわけですが。

でも、数学の本はどうしても詳し過ぎるので、
必要な場になって必要なものを習うのがよいのではないかと思う。

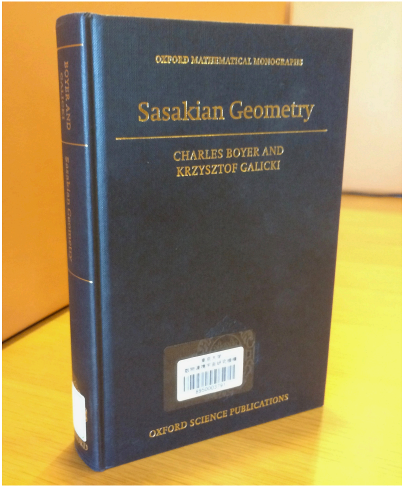
僕個人の経験では、やっている場の量子論の性質もあり、
常に何か新しい数学の分野を学んでいる気がします。例えば:

院生のおわりぐらい: 佐々木-Einstein 多様体の理論

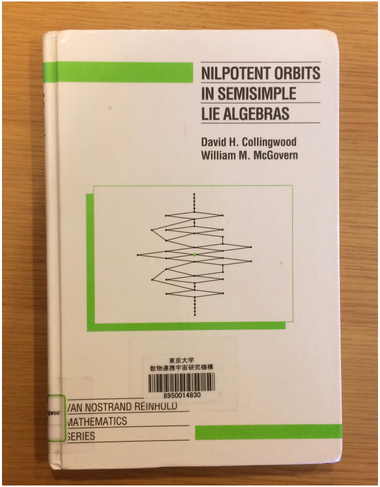
Shigeo SASAKI
1912–1987

[Tohoku Math. J. 39 (1987) i-viii]

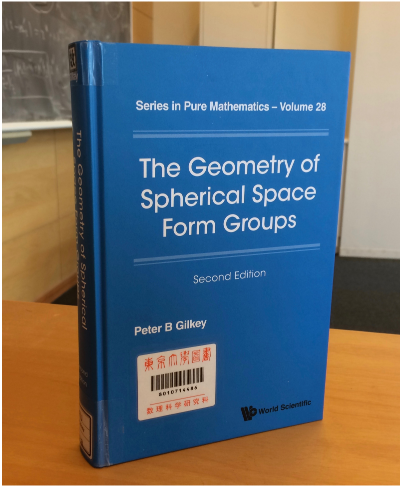
院生のおわりぐらい: 佐々木-Einstein 多様体の理論



ポスドクの間: 冪零軌道の理論



ここ数年: 代数トポロジー、特にコボルディズム群の話。



どの分野にしても、

- 僕の調べたい場の量子論の性質を調べる為に
  どうしても必要になった
- 事前に必要になりそうかは全くわからなかった
- 全ての場の理論屋が知る必要があるわけでは全然ない

やっぱり、その場で勉強するしか無いと思います。

何故コボルディズム群?

最近物性では、トポロジカル物性というのが熱いらしいです。

Symmetry protected topological phases
(SPT 相、対称性被保護位相的相)
と呼ばれるものが重要になってきた。

いろいろ研究があったのだけれど、決定版

[Kapustin-Turzillo-Thorngren-Wang 1406.7329],
[Freed-Hopkins 1604.06527],
[Yonekura 1803.10796] などによると、

答えは次元と対称性で定まるボルディズム群で与えられる。

例えば、空間三次元で、フェルミオンがあり、時間反転対称性 T が $T^2 = (-1)^F$ を満たすような symmetry protected topological phase はトポロジカル超伝導体としても知られているが、これは

$$\Omega^{\text{pin}+}_{3+1}$$

と書かれて、pin^+ ボルディズム群と呼ばれるもので分類される。

物理屋がここまで問題を還元すれば、あとは数学の文献を探すだけ。

1990 年の [Kirby-Taylor “Pin structures on low-dimensional manifolds”, London Math. Soc. LNS 151, pp.177-242]という文献を開くと…

$$p : \Omega_2^{Pin^-} \longrightarrow \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$$

gives the isomorphism in the following table.

$$
\begin{array}{llll}
\Omega_1^{Spin} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \Omega_2^{Spin} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \Omega_3^{Spin} = 0 & \Omega_4^{Spin} = \mathbf{Z} \\
\Omega_1^{Pin^-} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \Omega_2^{Pin^-} = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z} & \Omega_3^{Pin^-} = 0 & \Omega_4^{Pin^-} = 0 \\
\Omega_1^{Pin^+} = 0 & \Omega_2^{Pin^+} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \Omega_3^{Pin^+} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & \Omega_4^{Pin^+} = \mathbf{Z}/16\mathbf{Z}
\end{array}
$$

In §2 we calculate the 1 and 2 dimensional groups and show that the non-zero one dimensional groups are generated by the circle with its Lie group framing, $S^1_{\ldots}$

空間三次元の時間反転不変トポロジカル超伝導体は、
$\mathbb{Z}_{16}$ で分類される!

これは物性理論屋がもっと物理的直観に基づいて得た結果 [Metlitski,Fidkowski,Chen,Vishwanath 1406.3032] と合致している。

Kirby-Taylor が 1990 年に $\mathbf{\Omega_4^{\mathrm{pin}+}} = \mathbb{Z}_{\mathbf{16}}$ を計算したときは、
トポロジカル相との関係など全く考えていなかったと思う。

しかし、Kirby-Taylor が計算をやっておいて、
わかりやすくまとめてあるお陰で、
こちらは結果を使うだけで良い。

十五年強ぐらい場の量子論をやっていて感じるのは、
なんとか場の理論の問題を数学の問題に帰着すると、
かなりの割合で、数学者が既にそれを解決している。
だから、あとはその結果を使うだけで良い。

数学者のみなさん、どうもありがとう！

数学者の教科書/論文の (僕にとって) ありがたい点は、

定義と定理がきちんと書いてあるので、証明の詳細がわからなくても、
道具として使えることです。

スマホで何故タッチすると画面の中が動くのかわかっていなくても、
問題なく使えるのと同様です。

物理屋の教科書/論文はそうはいかない。
前提と結果が渾然一体としていて、結局全部読む羽目になる。

場の量子論の数学

$\downarrow$

場の量子論における数学

$\downarrow$

場の量子論からの数学

場の量子論の数学

$\downarrow$

場の量子論における数学

$\downarrow$

場の量子論からの数学

有限単純群の分類

- 交代群 $A_{n\geq 5}$

  無限に沢山ある。
- リー型の単純群 $\simeq$ リー群を有限体上で考えたもの

  無限に沢山ある。
- 散在型の単純群

  マチウ群 (1860 年代に発見),
  ヤンコ群, ..., モンスター群 (1965–1975 に発見)
  の 26 個。

モジュラー J 関数

$$J(q) = \frac{1}{q} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots$$

は、19 世紀から知られている古典的なもの。

1978 年に McKay は次のことに気が付いた:

当時みつかりそうだった新散在型有限群モンスターは
元の数が $\sim 8 \cdot 10^{53}$ あるが、その一番小さい非自明既約表現は

$$196883$$

次元である。

何か関係があるのではないか?

J 関数:　保形関数
モンスター群:　有限群

関連する観察もいろいろなされた [Ogg, Conway-Norton, ...]

あまりに突拍子もなかったので、
Monstrous Moonshine (とんでもなく馬鹿げた話) と言われた。

90 年代初頭には
[Frenkel-Lepowsky-Meurman], [Borcherds]
によって解決。

頂点作用素代数の理論が深く使われた。

ある特別な 24 次元トーラスを動く弦理論のスペクトルが
J 関数であることが関係する。

1989 年、僕の兄弟子の大栗さん (現 IPMU 所長) は博士論文で **K3** 曲面を動く弦理論のスペクトルを計算した:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned} F(\tau) &= 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\ &\quad + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \end{aligned} \tag{23}$$

この係数に意味はないのか?

当時、次のような文献もあった:

Invent. math. 94, 183–221 (1988)

Inventiones mathematicae

Finite groups of automorphisms of K3 surfaces and the Mathieu group

Dedicated to Professor Masayoshi Nagata on his 60th Birthday

Shigeru Mukai

Department of Mathematics, Nagoya University, Furō-chō Chikusa-ku, Nagoya 464 Japan

僕の師匠の江口さん曰く:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \tag{23}$$

この係数はマチウ群と関係あるのでは?

そして 20 年の時は流れ...

2009 年、アスペン。

江口さん、大栗さん、僕と三人研究会にいたので、
もう一度考えてみた。

僕: 岩波数学辞典の後ろの数表をみてみれば?

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = 90q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I

数 表 6

M_{24}	$(1)^{24}$	g	$1 \ 23 \ 7\cdot36 \ 23\cdot11 \ 23\cdot77 \ 55\cdot64 \ \overline{45} \ \overline{22\cdot45} \ \overline{23\cdot45} \ 23\cdot45 \ \overline{11\cdot21} \ \overline{770}$
	$(1)^{24}$	g	$23\cdot21 \ 23\cdot55 \ 23\cdot88 \ 23\cdot99 \ 23\cdot144 \ 23\cdot11\cdot21 \ 23\cdot7\cdot36 \ 77\cdot72 \ 11\cdot35\cdot27$

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = \boxed{90}q + 462q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I　　　　数　表　6

M_{24}	$(1)^{24}$	g	$1\ \ 23\ \ 7\cdot36\ \ 23\cdot11\ \ 23\cdot77\ \ 55\cdot64\ \ \boxed{\overline{45}}\ \ \overline{22\cdot45}\ \ \overline{23\cdot45}\ \ 23\cdot45\ \ \overline{11\cdot21}\ \ \overline{770}$
	$(1)^{24}$	g	$23\cdot21\ \ 23\cdot55\ \ 23\cdot88\ \ 23\cdot99\ \ 23\cdot144\ \ 23\cdot11\cdot21\ \ 23\cdot7\cdot36\ \ 77\cdot72\ \ 11\cdot35\cdot27$

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$\begin{aligned} F(\tau) = {} & \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + 1540q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 \\ & + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \end{aligned} \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I　　　　数　表　6

M_{24}	$(1)^{24}$	g	1 23 $7\cdot 36$ $23\cdot 11$ $23\cdot 77$ $55\cdot 64$ $\boxed{\overline{45}}$ $\overline{22\cdot 45}$ $\overline{23\cdot 45}$ $23\cdot 45$ $\boxed{\overline{11\cdot 21}}$ $\overline{770}$
	$(1)^{24}$	g	$23\cdot 21$ $23\cdot 55$ $23\cdot 88$ $23\cdot 99$ $23\cdot 144$ $23\cdot 11\cdot 21$ $23\cdot 7\cdot 36$ $77\cdot 72$ $11\cdot 35\cdot 27$

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + \boxed{1540}q^3 + 4554q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I　　数 表 6

M_{24}	$(1)^{24}$	g	$1\ \ 23\ \ 7\cdot36\ \ 23\cdot11\ \ 23\cdot77\ \ 55\cdot64\ \ \boxed{\overline{45}}\ \ \overline{22\cdot45}\ \ \overline{23\cdot45}\ \ 23\cdot45\ \ \boxed{\overline{11\cdot21}}\ \ \boxed{\overline{770}}$
	$(1)^{24}$	g	$23\cdot21\ \ 23\cdot55\ \ 23\cdot88\ \ 23\cdot99\ \ 23\cdot144\ \ 23\cdot11\cdot21\ \ 23\cdot7\cdot36\ \ 77\cdot72\ \ 11\cdot35\cdot27$

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + \boxed{1540}q^3 + \boxed{4554}q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I　　　数　表　6

M_{24}	$(1)^{24}$	g	$1\ \ 23\ \ 7\cdot36\ \ 23\cdot11\ \ 23\cdot77\ \ 55\cdot64\ \ \boxed{\overline{45}}\ \ \overline{22\cdot45}\ \ \overline{23\cdot45}\ \ 23\cdot45\ \ \boxed{\overline{11\cdot21}}\ \ \boxed{\overline{770}}$
	$(1)^{24}$	g	$23\cdot21\ \ 23\cdot55\ \ 23\cdot88\ \ \boxed{23\cdot99}\ \ 23\cdot144\ \ 23\cdot11\cdot21\ \ 23\cdot7\cdot36\ \ 77\cdot72\ \ 11\cdot35\cdot27$

大栗さんのD論:

so are the numbers $N_{h,1} - 2N_{h,0}$.

$$F(\tau) = \boxed{90}q + \boxed{462}q^2 + \boxed{1540}q^3 + \boxed{4554}q^4 + 11592q^5 + 27830q^6 + 61686q^7 + 131100q^8 + \cdots \tag{23}$$

岩波数学辞典第四版:

数 6 I　　　　数　表　6

M_{24}	$(1)^{24}$	g	1　23　7·36　23·11　23·77　55·64　$\boxed{\overline{45}}$　$\overline{22\cdot45}$　$\overline{23\cdot45}$　23·45　$\boxed{\overline{11\cdot21}}$　$\boxed{\overline{770}}$
	$(1)^{24}$	g	23·21　23·55　23·88　$\boxed{23\cdot99}$　23·144　23·11·21　23·7·36　77·72　11·35·27

対応がある！

「対応がある」とだけ書いた論文を書いた:

Notes on the K3 Surface and the Mathieu Group M_{24}

Tohru Eguchi, Hirosi Ooguri, and Yuji Tachikawa

Experimental Mathematics, 20(1):91–96, 2011

ISSN: 1058-6458 print
DOI: 10.1080/10586458.2011.544585

https://arxiv.org/abs/1004.0956

徐々に数学者によって証明されつつある:

arXiv.org > math > arXiv:1211.5531

Search or

Mathematics > Representation Theory

Much ado about Mathieu

Terry Gannon

(Submitted on 23 Nov 2012 (v1), last revised 15 Mar 2013 (this version, v2))

Eguchi, Ooguri and Tachikawa have observed that the elliptic genus of type II string theory on K3 surfaces appears to possess a Moonshine for the largest Mathieu group. Subsequent work by several people established a candidate for the elliptic genus twisted by each element of M24. In this paper we prove that the resulting sequence of class functions are true characters of M24, proving the Eguchi-Ooguri-Tachikawa conjecture. We prove the evenness property of the multiplicities, as conjectured by several authors. We also identify the role group cohomology plays in both K3-Mathieu Moonshine and Monstrous Moonshine; in particular this gives a cohomological interpretation for the non-Fricke elements in Norton's Generalised Monstrous Moonshine conjecture. We investigate the intriguing proposal of Gaberdiel-Hohenegger-Volpato that K3-Mathieu Moonshine lifts to the Conway group Co1.

https://arxiv.org/abs/1211.5531

同様に、場の量子論の考察から新たな数学が出て来たケースは沢山あります。

今回話したのは、かなり小さいケースで、
もっと数学に大きな影響をあたえたものとして

- ミラー対称性
- ザイバーグ = ウィッテン方程式

などがある。

これらは、場の理論自体を記述する数学がまだ不完全であるからこそ、

そのもやもやしたところの一部を先に凝縮させて
数学として取り出したようなものではないでしょうか?

皆さんのうちのどなたかが、
また新たな数学を取り出してくれることを期待して、
この話のしめくくりとします。