量子力学 の 基本法則.

I　状態 は 複素ベクトル空間 $\mathcal{H}$ の非ゼロ元 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ であらわされる.

II　系の操作(観測以外.
・時間をtだけすすめる
・θだけ回転する　)
は $\mathcal{H}$ 上の (反)ユニタリ変換.

III　測定できる量(observable) は $\mathcal{H}$ 上の エルミート行列 A

IV　A を 状態 $|\psi\rangle$ で 観測したとき どうなるか.

(V　系1 が $\mathcal{H}_1$, 系2 が $\mathcal{H}_2$ のとき 複合系を どうあらわすか?)

(I)

$\mathcal{H}$

$\in$

$|\psi\rangle, |\phi\rangle, |1\rangle, \dots$

↑

ket 表記

($\langle\psi|$: bra
内積 $\langle\psi|\phi\rangle$ bracket)

$z \in \mathbb{C}$ として

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ⟿ $z|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

$|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ ⟿ $|\psi\rangle + |\phi\rangle \in \mathcal{H}$

さらに 内積
エルミート

$(|\psi\rangle, |\phi\rangle) \in \mathbb{C}$

$(|\psi\rangle, z|\phi\rangle) = z(|\psi\rangle, |\phi\rangle)$

$(|\psi\rangle, |\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle) = (|\psi\rangle, |\phi_1\rangle) + (|\psi\rangle, |\phi_2\rangle)$.

$\overline{(|\psi\rangle, |\phi\rangle)} = (|\phi\rangle, |\psi\rangle)$

($\bar{z}$ ← 数学　z^* 物理 : ふくそ共役 ← 軛 くびき)

complex conjugation ← yoke : 英語で軛.

$(z|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \bar{z}(|\psi\rangle, |\phi\rangle)$

$(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\psi_i}\, \phi_i$

$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) \in \mathbb{R}$

≥ 0

$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle = 0$

正定値エルミート内積

$\mathcal{H}$: 有限次元
無限次元 …
"C"でもよい.

$\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n$

$|\psi\rangle \leftrightarrow (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)^T$

$|\psi\rangle \leftrightarrow \psi(x)$

$(|\psi\rangle, |\phi\rangle) := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \overline{\psi(x)}\, \phi(x)$

Unitary

II 操作は ユニタリ変換である.

(反) ??

conjugate　anti　linear

反 線形 変換 とは?

共役

$|\psi\rangle \mapsto A|\psi\rangle$ で

$A(|\psi\rangle + |\phi\rangle) \mapsto A|\psi\rangle + A|\phi\rangle$

$A(z|\psi\rangle) \mapsto z(A|\psi\rangle)$

$\mapsto \bar{z}(A|\psi\rangle)$

ユニタリ: 長さを保つ

$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) \leftarrow |\text{長さ}|^2$

$|\psi\rangle \mapsto U|\psi\rangle$

で

$(U|\psi\rangle, U|\psi\rangle) = (|\psi\rangle, |\psi\rangle)$.

III observable は エルミート演算子である.

?? Hermite

行列　matrix

物理 → 演算子 } operator

数学 → 作用素

変換　transformation

写像　map

A の エルミート共役 $A^\dagger$ とは

$(A|\psi\rangle, |\phi\rangle) = (|\psi\rangle, A^\dagger|\phi\rangle)$

をみたすもの.

A が エルミート

$\Leftrightarrow \quad A = A^\dagger$

$\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n$

$|\psi\rangle \leftrightarrow (\psi_1, \cdots, \psi_n)^T$

$A|\psi\rangle$
$\parallel$
$|\psi'\rangle \leftrightarrow (\psi'_1 \cdots \psi'_n)^T$

$$\psi_i' = \sum_{j=1}^{n} (A_{ij}) \psi_j$$

$n \times n$ 行列

$$(A|\psi\rangle, |\phi\rangle) = (|\psi\rangle, A^\dagger|\phi\rangle)$$

から $(A^\dagger)_{ij} = \overline{A_{ji}}$

が従う。

Ⓘ 観測したらどうなるか？

エルミート（行列 / 演算子）の固有値分解

無限次元だと

自己共役 $\subsetneq$ 対称 $\subsetneq$ エルミート

self-adjoint

有限次元（n次元）のエルミートな A は
固有ベクトル
$|1\rangle, \cdots, |n\rangle$
で長さ1，互いに直交
するものがとれる。

固有値は実

$$A|\psi\rangle = a|\psi\rangle$$

↑ 行列　↑ 複素数　のとき

$|\psi\rangle$: 固有ベクトル eigenvector

a : その固有値 eigenvalue

証明　n にかんする帰納法

n=1 のとき.　$\mathcal{H} \simeq \mathbb{C} \ni (1)$

A : 行列といっても 1×1.

$A = (a)$

$A^\dagger = A \iff \bar{a} = a$.

(1) は 固有ベクトル

固有値 a.

一般の n のばあい.

$\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n \ni |\psi\rangle$

$(\psi_1 \cdots \psi_n)$　長さ1のものを考える.

$|\psi_1|^2 + \cdots + |\psi_n|^2 = 1$.

$\psi_i = p_i + q_i i$

実数.

実 2n 次元空間の球面 S^{2n-1}

ここで $(|\psi\rangle, A|\psi\rangle)$ を考える.

$$\overline{(|\psi\rangle, A|\psi\rangle)} = (A|\psi\rangle, |\psi\rangle) = (|\psi\rangle, A^\dagger|\psi\rangle) = (|\psi\rangle, A|\psi\rangle) \in \mathbb{R}.$$

いっしょ.

$$S^{2n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$|\psi\rangle \longmapsto (|\psi\rangle, A|\psi\rangle).$$

最小値がどこかにある.

それを $|1\rangle$ で 値 a とする.

補題

このとき

$A|1\rangle = a|1\rangle$ で

固有ベクトルになる.

$\Longrightarrow$

これを示すため

$B := A - a\mathbb{1}$ を考えると

示したいこと:

$(A-a)|1\rangle = 0$

すなわち

$B|1\rangle = 0$

仮定

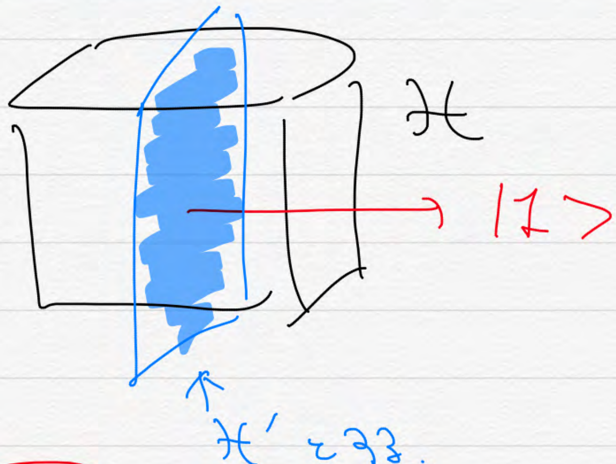
$(|\psi\rangle, A|\psi\rangle) \geq a$

$(|\psi\rangle, B|\psi\rangle) = (|\psi\rangle, A|\psi\rangle - a|\psi\rangle)$

$= (|\psi\rangle, A|\psi\rangle) - a\underbrace{(|\psi\rangle, |\psi\rangle)}_{=1}$

≥ 0

いま



$|\psi\rangle \in \mathcal{H}' \iff (|1\rangle, |\psi\rangle) = 0$

A は $\mathcal{H}'$ を $\mathcal{H}'$ にうつす. $\Longrightarrow$ A は $\mathcal{H}'$ 上のエルミート行列と思えるので

$n-1$ 次元だから帰納法の仮定より

証明おわり. //

なぜ?

$A|\psi\rangle \overset{?}{\in} \mathcal{H}'$

$(|1\rangle, A|\psi\rangle)$

$= (A^\dagger|1\rangle, |\psi\rangle) = (A|1\rangle, |\psi\rangle)$

$= (a|1\rangle, |\psi\rangle) = a(|1\rangle, |\psi\rangle) = 0.$

やること:

$$(|\psi\rangle, B|\psi\rangle) \geq 0$$

$$(|1\rangle, B|1\rangle) = 0$$

のとき $B|1\rangle = 0$ を示せ!

いま $|\psi\rangle = \underset{\sim}{c^{-1}}(|1\rangle + \underset{\sim}{\varepsilon} B|1\rangle)$

c: $|\psi\rangle$ の長さを1にするための複素数

ε: あとできめる複素数

c をきめる

$$(|1\rangle + \varepsilon B|1\rangle, |1\rangle + \varepsilon B|1\rangle)$$

$$= 1 + |\varepsilon|^2 (B|1\rangle, B|1\rangle).$$

$$= c^2$$

$$(|\psi\rangle, B|\psi\rangle) \quad \text{非負}$$

$$= c^{-2}(|1\rangle + \varepsilon B|1\rangle, B(|1\rangle + \varepsilon B|1\rangle))$$

$$= (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \frac{(B|1\rangle, B|1\rangle) + \cancel{|\varepsilon|^2 (|1\rangle, B^3|1\rangle)}}{1 + \cancel{|\varepsilon|^2 (B|1\rangle, B|1\rangle)}}$$

$\downarrow$ $|\varepsilon| \ll 1$ とする

$$(\varepsilon + \bar{\varepsilon})(B|1\rangle, B|1\rangle).$$

ε の実部の2倍.

正負どちらにもなりうる.

$\Downarrow$

$$(B|1\rangle, B|1\rangle) = 0 \Rightarrow B|1\rangle = 0$$

状態 $|\psi\rangle$ で

observable = Hermite 行列 A を

測定すると どうなるか？

長さ1で互いに直交

ルール　A の 固有ベクトル $|i\rangle$

固有値 a_i

$i=1 \cdots n$

（a_i は全て異なるとする。）

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i |i\rangle$$ と展開.

- a_i が測定値である

確率 $\propto |c_i|^2$.

確率解釈 $\gg$ $\dfrac{|(|i\rangle, |\psi\rangle)|^2}{(|\psi\rangle, |\psi\rangle)}$

$$(|i\rangle, |\psi\rangle)$$
$$= \left(|i\rangle, \sum_{j=1}^{n} c_j |j\rangle\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} c_j (|i\rangle, |j\rangle)$$

$i \neq j \rightsquigarrow 0$
$i = j \rightsquigarrow 1$.

$$= c_i$$

$\sum |c_i|^2$ である必要がある.

$$(|\psi\rangle, |\psi\rangle)$$
$$= \left(\sum_i c_i |i\rangle, \sum_j c_j |j\rangle\right)$$
$$= \sum_{i,j} \overline{c_i} c_j (|i\rangle, |j\rangle)$$

$i \neq j \rightsquigarrow 0$
$i = j \rightsquigarrow 1$

$$= \sum |c_i|^2.$$

法則(II)：操作（回転、時間発展）

ユニタリ行列 U

(III)：観測量

エルミート行列、A

いっぱんに行列 A に対し

$$e^{A} = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$$

で定義。 $AB \neq BA$ のとき

$$e^{A+B} \neq e^{A}e^{B}$$ だけど

$$e^{sA+tA} = e^{sA}e^{tA}$$

交換

さて 特に

$$e^{isA}$$

エルミート

実数

を考える。

これはユニタリ。

$$\left(e^{isA}|\psi\rangle, e^{isA}|\psi\rangle\right)$$
$$= \left(|\psi\rangle, e^{-isA^\dagger}e^{isA}|\psi\rangle\right)$$
$$= \left(|\psi\rangle, e^{-isA}e^{isA}|\psi\rangle\right)$$
$$= \left(|\psi\rangle, e^{(-is+is)A}|\psi\rangle\right)$$
$$= \left(|\psi\rangle, |\psi\rangle\right).$$

逆にユニタリ行列

U は e^{iA} とかける。

エルミート.

$$U = e^{i\hat{A}}$$ ← 観測量

⇑

操作

↑

角度 θ の回転を考える

無次元＝単位をもたない

$$U(\theta) = e^{i\theta\underline{L}}$$ ← エルミート

無次元

$\underline{L}$ も無次元

⇓ 古典極限をとる

$\underline{L}$ は実質角運動量になる

↑

kg・m²/s という単位をもつ

$$L = \hbar \underline{L}$$

↑ ふつうのいみでの角運動量

⇑ 単位をあたえるもの

これが プランク定数

$h = 2\pi\hbar = 6.62607015 \times 10^{-34}$ kg・m²/s

定義値!!!

$\theta = 720° = 4\pi$ 回転すると

世の中もとに戻る

⇓

$$e^{4\pi i \underline{L}} = 1$$

$\underline{L}$ = 整数 0, ±1, ±2, …

か

整数の半分 $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots$

⇓

角運動量は量子化されている

$L = 0, \pm\hbar, \pm 2\hbar, \dots$

$\pm\frac{1}{2}\hbar, \pm\frac{3}{2}\hbar, \dots$

$U(t)$: t だけ系を時間発展させる.

$\parallel$

e^{itH} ← s^{-1} の単位をもつ.

単位 s をもつ.

$H := \hbar H$ ときめる

単位は $kg \cdot m^2/s \cdot 1/s$

$= kg\,(m/s)^2$

エネルギー.

系のエネルギーを与える観測量.

ハミルトニアンと呼ぶ.

そうさ　　　かんそく量.

回転 ⟷ 角運動量

時間発展 ⟷ エネルギー.

秒の定義は

アル量子系の H の固有状態

$|1\rangle$, $|2\rangle$

ω_1　　ω_2

$[s^{-1}]$　　$[s^{-1}]$

$\omega_1 - \omega_2 = 2\pi \cdot 9192631770\ s^{-1}$

になるように定める.

余談

m/s の定義は

光速 $c = 299792458\ m/s$

とする.