# 量子力学の基本法則

I. 系の状態は複素線形空間 $\mathcal{H}$ のベクトル $|\psi\rangle$ であらわされる。

II. (観測以外の)操作は $\mathcal{H}$ のユニタリ変換 $U$

III. 観測量は $\mathcal{H}$ のエルミート行列 $A$

かんけい

IV. $|\psi\rangle$ で $A$ を測定すると…

$A$ の固有値 $a_i$
(ベクトル) $|i\rangle$ ⇐ 互いに直交 長さ1 とする

$$A|i\rangle = a_i|i\rangle$$

のとき

$a_i$ が観測される確率は

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle$$

としたときの

$|c_i|^2$ に比例。

$$\frac{|\langle i|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

で与えられる。

V: 系A が $\mathcal{H}_A$
系B が $\mathcal{H}_B$
のとき
合成系は….

一番かんたんな系？

$\mathcal{H}$ : 一次元ベクトル空間.

$\ni$

$(v)$ ← ひとつだけ数字.

観測量: エルミート行列. A

1×1

$A^\dagger = A$.

$A = (a)$ 1

1

状態 $(v)$ は Aの固有状態！

$A(v) = a(v)$.

Aの固有ベクトル: $(1) = |1\rangle$

$|\psi\rangle = (v) = v(1)$

$\langle\psi|\psi\rangle = |v|^2$ $\langle 1|\psi\rangle = v$

⇝ a が観測される

確率は

$$\frac{|\langle 1|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{|v|^2}{|v|^2} = 1.$$

⇒ どんな状態で

何をはかっても

100%でその実数(a)

が出るだけ.

二番目にかんたんな系.

の前に…

$\mathcal{H} \ni |\psi\rangle$

$A$ : かんそく量

$\begin{cases} a_i \\ |i\rangle \end{cases}$ ← 互いに直交
長さ1.

$a_i$ がでる確率 : $\dfrac{|\langle i|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}$ だった。 ← $\dfrac{|(|i\rangle, |\psi\rangle)|^2}{(|\psi\rangle, |\psi\rangle)}$ のこと

もうひとつ

複素数

$\mathcal{H} \ni |\psi'\rangle = z|\psi\rangle$

$a_i$ がでる確率 :

$$\frac{|(|i\rangle, |\psi'\rangle)|^2}{(|\psi'\rangle, |\psi'\rangle)} = \frac{|(|i\rangle, z|\psi\rangle)|^2}{(z|\psi\rangle, z|\psi\rangle)} = \frac{|\cancel{z}(|i\rangle, |\psi\rangle)|^2}{\cancel{\bar{z} z}(|\psi\rangle, |\psi\rangle)} = \frac{|(|i\rangle, |\psi\rangle)|^2}{(|\psi\rangle, |\psi\rangle)}$$

$|\psi\rangle$ と $z|\psi\rangle$ はどんな量を測定しても同じふるまいをする。

⇕

$|\psi\rangle$ と $z|\psi\rangle$ は「物理的に同じ」状態だと言うことにする.

$\mathcal{H}$ : 一次元ベクトル空間.

$\psi$

$(v) = v(1)$

⇒ 勝手な状態は

状態 (1) と「物理的に

同じ」

⇒ 何もおもしろくない！

では 物理的に異なる状態は？

$|\psi\rangle \qquad z|\psi\rangle$

$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) \qquad (z|\psi\rangle, z|\psi\rangle)$

$\overset{\vee}{0} \qquad\qquad \bar{z}z(|\psi\rangle, |\psi\rangle)$

$\qquad\qquad \overset{\vee}{0}$ の実数.

⇝ $z$ をうまくえらんで「物理的に同じ」中から

$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) = 1$ になるようにできる。

∵ $z := \sqrt{(|\psi\rangle, |\psi\rangle)}^{\,-1}$

とすると

$|\psi'\rangle := z|\psi\rangle$

は $(|\psi'\rangle, |\psi'\rangle) = |z|^2 (|\psi\rangle, |\psi\rangle)$

$= 1.$

この $|\psi'\rangle$ を新たな $|\psi\rangle$ とすればよい。

---

考えるには，長さ1のベクトルに

考察を限ってよい.

$c$ : $|c| = 1$ なる

複素数.

$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) = 1.$

$(c|\psi\rangle, c|\psi\rangle) = |c|^2 (|\psi\rangle, |\psi\rangle)$

$= 1.$

物理的に同じ「状態」を同一視したもの

$=$ $\boxed{\begin{array}{l} \{ \text{長さ1のベクトル } |\psi\rangle \} \\ \text{を、} |\psi\rangle \sim \underset{\substack{\uparrow \\ |c|=1 \text{ なる} \\ \text{複素数}}}{c}|\psi\rangle \\ \text{で同一視したもの.} \end{array}}$

二番目にかんたんな量子力学

$\mathcal{H} = 2$次元ベクトル空間.

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{C}$.

長さの2乗 $= |a|^2 + |b|^2$.

二状態系, qubit という.

どんな観測量があるか?

$2 \times 2$ $A = A^\dagger$ なるエルミート行列.

$$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{r} \\ \bar{q} & \bar{s} \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ $\begin{cases} p \text{ と } s \text{ は実数.} \\ q = \bar{r} \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} a & z \\ \bar{z} & b \end{pmatrix}$$

$a, b \in \mathbb{R}$ ← 2つ実数

$z \in \mathbb{C}$ ← 2つ実数.

⇑ 4つ実数.

$$A = c\mathbb{1} + s\sigma_x + t\sigma_y + u\sigma_z$$

と書いてもよい. 但し ...

$$A = c\mathbb{1} + s\sigma_x + t\sigma_y + u\sigma_z = \begin{pmatrix} c+u & s-ti \\ s+ti & c-u \end{pmatrix}$$

と書いてもよい。但し…

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftarrow \text{標準!}$$

$$\boxed{\sigma_y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

パウリ行列。

例 $A = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

を状態 $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ で観測すると

どうなるか?

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

〜 $+1$ が $\dfrac{|c_1|^2}{|c_1|^2+|c_2|^2}$ で

$-1$ が $\dfrac{|c_2|^2}{|c_1|^2+|c_2|^2}$ で

得られる。

かくりつ。

和 = 1.

ふつうはこの調子でつづける…

この講義では $\boxed{\text{変な方法}}$ をつかって調べてみる。

四元数！

$\mathcal{H}$
$\psi$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow c_2 + c_1 k =: \psi$$

$$c_1 = p + qi \qquad r + si + pk + qik$$
$$c_2 = r + si$$

$\Uparrow$

$p, q, r, s$ と 4つ実数。

$$|\psi\rangle + |\phi\rangle \longleftrightarrow \psi + \phi$$

$$z|\psi\rangle \longleftrightarrow z\psi$$
$z \in \mathbb{C}$ $\quad z \in \mathbb{C}$

（注意：$\psi z$ ではない。）

$$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) \longleftrightarrow |\psi|^2.$$
$$= p^2 + q^2 + r^2 + s^2$$

$\boxed{\text{ユニタリ行列}}$
$\boxed{\text{エルミート行列}}$ は

どうみえるだろうか？

そもそも行列って？

複素線形変換
$L$

$$\psi \longmapsto L(\psi)$$
四元数 $\quad$ 四元数

であって

$$L(\psi + \phi) = L(\psi) + L(\phi)$$

$$L(z\psi) = zL(\psi)$$

であるようなもの。

例

$$\psi \longmapsto w\psi \qquad w \in \mathbb{C}$$

は 複素線形.

$\because$

$$w(\psi + \varphi) = w\varphi + w\psi$$

$$\boxed{w(z\psi) = z(w\psi)}.$$

一方で $\psi \longmapsto q\psi \qquad q$: 四元数

これは 必ずしも 複素線形で ない

$$q(z\psi) \underset{?}{\neq} z(q\psi)$$

じゃあ $\psi \longmapsto \psi q \qquad q$: 四元数.

これは 複素線形

$$(z\psi)q \underset{?}{=} z(\psi q)$$

四元数 結合則

あわせて

$$\psi \longmapsto w\psi q =: U(\psi)$$

も 複素線形.

特に $\boxed{\begin{array}{l} |w| = 1 \\ |q| = 1 \end{array} \text{ のとき}}$

$$|w\psi q| = |w|\,|\psi|\,|q|$$

$$= |\psi|$$

長さを保つ.

すなわち ユニタリ変換!

実は かってな $2\times2$の ユニタリ変換は

とかける.

三次元の回転 は ← 観測じゃない操作
$\mathcal{H}$ : qubit 系 に
どう はたらく だろうか？ ↑ ユニタリ変換
$\psi$ : 四元数.

$v = xi + yj + zk$ : $\bar{v} = -v$ なる純虚四元数

に対して
$$v \mapsto q v \bar{q}$$
とかける. ( $|q|=1$ なる 四元数 ).

かってな ユニタリ へんかん は
$$\psi \mapsto w \psi \bar{q}$$ という形.
$w \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{H}$, $|w| = |q| = 1$.

そこで

回転 $v \mapsto q v \bar{q}$

は

$\psi \in \mathcal{H}$ に

$$\psi \mapsto \psi \bar{q}$$

と作用する

ことになる.

このように回転が作用するものを

スピノル

spinor

という.

x. y. z 軸のかわりに
i. j. k 軸とよぶ.

i軸まわりの θ回転.

$$v \mapsto q v \bar{q}$$

$$q = e^{i\theta/2}$$

$$\bar{q} = e^{-i\theta/2}.$$

これは $\mathcal{H}$ : qubit の元には

$$\psi \mapsto \psi \bar{q} = \psi \underline{e^{-i\theta/2}}$$

とはたらく.

$\theta = 2\pi$ : 360° のとき

$$\psi \mapsto \psi e^{-i\pi} = -\psi$$

$\theta = 4\pi$ : 720° のとき

$$\psi \mapsto \psi e^{-2\pi i} = +\psi$$

qubit は
360° 回転しても
完全には もとに戻らない.
720° 回転して
ようやく もとに戻る.

一般に θ回転の固有値を

$e^{i\theta L}$ と書いたとき

角運動量は $\hbar L =: l$ だった。

$\psi = 1$

$$1 \mapsto 1 e^{-i\theta/2} = e^{-i\theta/2} \cdot 1.$$

$L = -1/2$

$\psi = k$

$$k \mapsto k e^{-i\theta/2} = e^{+i\theta/2} \cdot k$$

$L = +1/2$

$L = \pm \frac{\hbar}{2}.$

ユニタリ変換 ⟷ エルミート行列

$$\underset{\uparrow \text{ユニタリ}}{U(\theta)} = e^{i\theta \underset{\text{エルミート}}{\underline{L}}}$$

$$U(\psi) = \psi e^{-i\theta/2}$$

これに対応する

$$\underline{L}(\psi) = ?$$

$$e^{i\theta \underline{L}}\psi = \psi e^{-i\theta/2}$$

θでビブン, $\theta = 0$ とすると

$$i\underline{L}(\psi) = \psi \frac{-i}{2}$$

$\rightsquigarrow$ $\underline{L}(\psi) = i\psi \frac{i}{2}$ となる.

同様に

j軸, k軸 まわりの

角運動量えんざんしは

$$\psi \mapsto \psi e^{-j\theta/2}$$

$$\psi \mapsto \psi e^{-k\theta/2}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{L}(\psi) = \begin{cases} i\psi \frac{j}{2} \\ i\psi \frac{k}{2} \end{cases}$$

に対応.

もっと一般に.

軸を $(s, t, u)$

$s^2 + t^2 + u^2 = 1$

で指定すると

回転の

$$v \longmapsto q v \bar{q}$$

$$q = e^{c\theta/2}$$

$$\bar{q} = e^{-c\theta/2}$$

$c = si + tj + uk$ だった.

$$\psi \longmapsto \psi \bar{q} = \psi e^{-c\theta/2}$$

$$\wr$$

$$\underline{L}(\psi) = i\psi \cdot \frac{c}{2}$$

となる.

$$= \underline{i\psi \cdot \frac{1}{2}(si + tj + uk)}.$$

$$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \longleftrightarrow \psi = \psi_2 + \psi_1 k.$$

$$\underline{L}(\psi) = i\psi \frac{i}{2}$$

$$i\psi i = i(\psi_2 + \psi_1 k)\, i = -\psi_2 + \psi_1 k.$$

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \psi \arrow[d, "\underline{L}"] \\ \begin{pmatrix}\psi_1\\ -\psi_2\end{pmatrix} \arrow[r, leftrightarrow] & i\psi i \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \sigma_z$$

$$= \frac{1}{2}(s\, i\psi i + t\, i\psi j + u\, i\psi k) \longleftrightarrow \frac{1}{2}(s\sigma_z + t\sigma_x + u\sigma_y).$$

$$L = \hbar \underline{L} = \underline{\underline{\frac{\hbar}{2}(s\sigma_z + t\sigma_x + u\sigma_y)}}.$$

## 練習もんだい

エルミートえんざんし

$$s\sigma_z + t\sigma_x + u\sigma_y$$

$(s^2+t^2+u^2=1)$

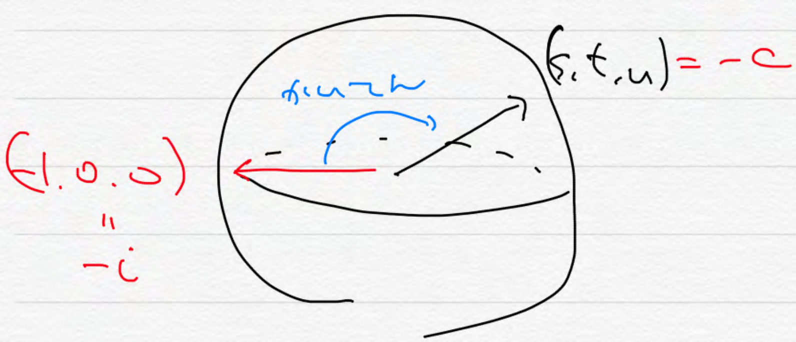
の固有値，固有ベクトルは？

四元数でかくと

$$\psi \longmapsto i\psi\overbrace{\boxed{(si+tj+uk)}}^{c}$$

の固有（値／ベクトル）は？

| | |
|---|---|
| $+1$ | $q$ |
| $-1$ | $kq$ |




$$c = \bar{q}(-i)q$$

となるような長さ1の四元数 $q$ がある。

すると

$\psi := q$ を考えると

$$q \longmapsto i\psi c$$
$$= i\underbrace{q\bar{q}}_{1}(-i)q$$
$$= +q$$

：固有値1の固有ベクトル。

$\psi := kq$ を考える。

$$kq \longmapsto i\psi c$$
$$= ik\underbrace{q\bar{q}}_{1}(-i)q$$
$$= -kq$$

：固有値 $-1$ の固有ベクトル

ここまでやった上で、

$\mathcal{H}$ : qubit 系 で

「物理的に同等」な状態を
分類してみる。

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{長さ}1 \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H} \\ \text{の状態} \end{array} \right\}$$

をさらに $|z|=1$ なる
複素数について
$|\psi\rangle$ と $z|\psi\rangle$ を
同一視しなさい。

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad \left\{ |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \right\}$$

を $(c_1, c_2)$
と $(zc_1, zc_2)$
同一視する。

$c_1 = p + qi$

$c_2 = r + si$

$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 1$

$S^3$

四次元空間の
単位球面

四元数でかくと

$$\boxed{\begin{array}{l} \{ |q| = 1 \} \\ \text{で} \quad q \text{ と } zq \\ \text{を同一視したもの。} \end{array}}$$

を考えるということ。

実はこの間の
答えて
さっきやった!

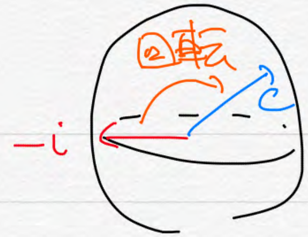
$\{|q|=1\}$

$\rotatebox{90}{$\in$}$

$q \longmapsto \bar{q}(-i)q = c.$

↑ 回転を表す.

↑ 純虚四元数.




$|c| = 1.$

$q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2=1 \longrightarrow c = si+tj+uk$ とかいたときの

四次元空間の球面

$s^2+t^2+u^2=1$

の空間

すなわち

三次元空間内の球面.

$S^2$

異なるベクトルに $S^3$

ただが…

「物理的に同じ」

$q$

$zq$

$$\bar{q}(-i)q$$
$$\|$$
$$\overline{zq}(-i)zq = \bar{q}\boxed{\bar{z}(-i)z}q = \bar{q}(-i)q.$$

ぜんぶ複素数.

行った先では

文字通り

同じベクトルに.

逆に

$c = \bar{q}(-i)q = \bar{q}'(-i)q'$

ならば　$q' = zq$　である.

☺ さっきのりくつで

$q$ と $q'$ は 両方 $\psi \mapsto i\psi c$

というエルミート行列は固有値

$+1$ の固有状態.

固有状態は z倍り.

//.

まとめ

$\mathcal{H}$ : qubit.

物理的に異なる状態の空間

$S^1$

$\left\{ q \in \mathcal{H} \text{ で } |q| = 1 \right\} = S^3 \longrightarrow S^2$

で　$q \sim zq$ を同一視したもの。

$q \longleftrightarrow c = \overline{q}(-i)q$

Hopf fibration.

物理的に同じ状態を同一視する

$\Downarrow$

という操作.

ブロッホ Bloch 球

$q \mapsto \overline{q}(-i)q = \overline{zq}(-i)zq = c$

$zq \mapsto$

qubit の勝手な状態 $q$ は、$c=(s,t,u)$ 方向の角運動量演算子

$\frac{\hbar}{2}(s\sigma_z + t\sigma_x + u\sigma_y)$

の $+\frac{\hbar}{2}$ の固有ベクトル。

固有値

100% で $c$ の向きをむいている.