Hopf fibrationの図示法

二状態系 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$

ψ

$|\psi\rangle \sim z|\psi\rangle$

「物理的に同じ」

$|\psi\rangle \longleftrightarrow q \in \mathbb{H}$

四元数

$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) \longleftrightarrow \boxed{|q| = 1}$

$\quad \shortparallel$

$\quad 1$

$|\psi\rangle \sim z|\psi\rangle \longleftrightarrow q \sim zq$

$q \longmapsto \boxed{\bar{q}(-i)q} =: c$ 　　$|c| = 1$

$\uparrow$

$a + bi + cj + dk$

$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1}$

四次元の中の単一球

$\bar{c} = -\bar{c}$

$\uparrow$

$si + tj + uk$の形

$s^2 + t^2 + u^2 = 1.$

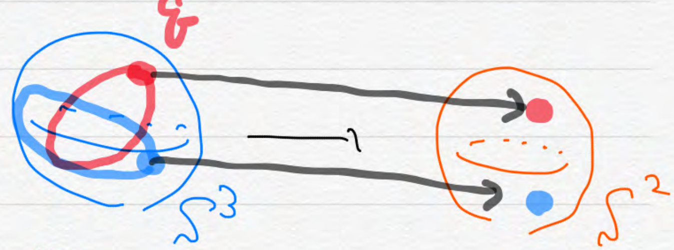
三次元の中の単位球

$$S^3 \longrightarrow S^2$$

$$q \longmapsto \bar{q}(-i)q$$

$$\wr$$

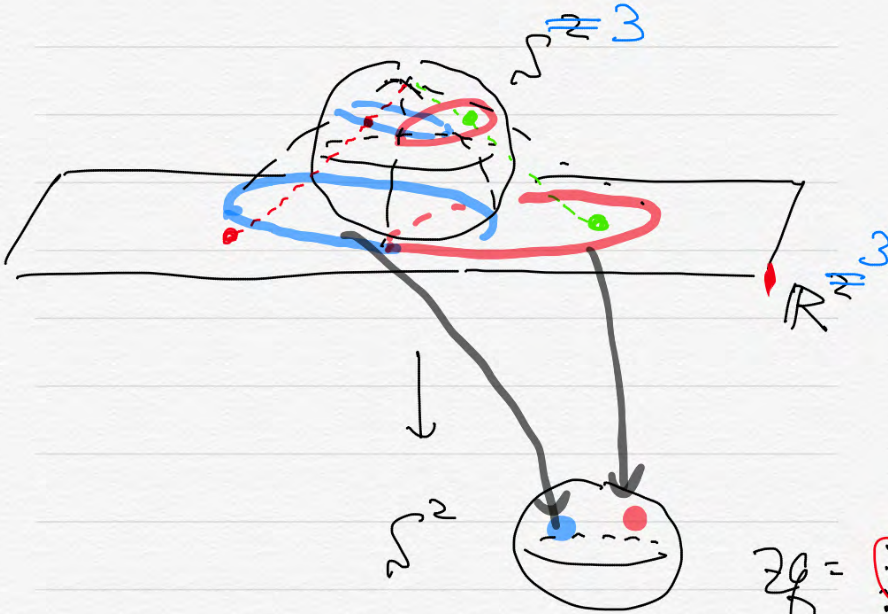
$$zq \longmapsto \bar{q}\underbrace{\bar{z}(-i)z}_{\shortparallel \atop (-i)}q$$



zq で z を $e^{i\theta}$ で

θ=0から2πまで動かす。

描けていません……



$$\underbrace{a^2+b^2}_{\cos^2 s}+\underbrace{c^2+d^2}_{\sin^2 s}=1$$

$$a+bi = e^{ir'}\cos s$$
$$c+di = e^{ir}\sin s$$

z を $e^{-ir'}$ とすると…

$$zq = z(a+bi)+z(c+di)j$$

$$\boxed{zq = \cos s + 0i + e^{i(r-r')}\sin s\ j}$$

r と よびなおす.

$0\le s\le \frac{\pi}{2}$

$0\le r\le 2\pi$

下手ですいません….

$$q = a+bi+cj+dk = (a+bi)+(c+di)j$$

$$\downarrow$$

$$\bar{q}(-i)q = ui+vj+wk \quad \begin{cases} u = -a^2-b^2+c^2+d^2 \\ v = 2(ad-bc) \\ w = -2(ac+bd) \end{cases}$$

S^2 の uvw で表示 →

$$\boxed{\begin{aligned} u &= -\cos(2s) \\ v &= \sin(r)\sin(2s) \\ w &= \cos(r)\sin(2s) \end{aligned}}$$

本題に戻る。

$\mathcal{H}$: 状態空間

A : 観測量

$|i\rangle$: 長さ1. 互いに直交

$$A|i\rangle = \underbrace{a_i}_{\text{固有値}}|i\rangle$$

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i|i\rangle$$

A を $|\psi\rangle$ で測ると

$|c_i|^2$ に比例した確率で

a_i がえられる。

$$\boxed{\text{えられた後は状態は } |i\rangle \text{ になる。}}$$

$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) = 1$ のとき

$c_i = (|i\rangle, |\psi\rangle)$ で

$\sum_i |c_i|^2 = 1$.

a_i がえられる確率は $|(|i\rangle, |\psi\rangle)|^2$.

とくに $|\psi\rangle = |i\rangle$ のとき 1 になる。

もともと固有状態なら

100%のかくりつで

その固有値がえられる。

$|\psi\rangle$: いっぱんの状態

$\downarrow$ A を測定

$|c_1|^2$　　　$|c_4|^2$　　　$|c_5|^2$

a_1　a_2　a_3　a_4　a_5　$\cdots$

$|1\rangle$　$|2\rangle$　$|3\rangle$　$|4\rangle$　$|5\rangle$　$\cdots$

$A\downarrow$　$A\downarrow$　$A\downarrow$　$A\downarrow$　$A\downarrow$

100%で a_1　100%で a_2　100%で a_4　$\cdots$

例　qubit　$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

観測して得られた値を S_x, S_y, S_z と書く.

状態 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は

σ_z の　$+1$　-1　の固有ベクトル.

状態 $\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$　$\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ は

σ_x の　$+1$　-1　の固有ベクトル.

$$\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{はかる}]{\sigma_z}$ 100%で $+1$ $= S_z$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のまま $\xrightarrow[\text{はかる}]{\sigma_x}$ 50% $S_x = +1$ / 50% $S_x = -1$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{はかる}]{\sigma_x}$ 50% $S_x = +1$　$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

50% $S_x = -1$

σ_zをはかる → 50% $S_z = +1$ / 50% $S_z = -1$

σ_zをはかる → 50% $S_z = +1$ / 50% $S_z = -1$

一般には観測の順序によって結果は違ってくる.

原因：固有ベクトルが違うから。

$\sigma_x \sigma_z \neq \sigma_z \sigma_x$　：　交換しないから。

一方

A と B の固有ベクトル達が

両方 $|i\rangle$ $i=1\cdots n$ で同じなら ⟷

$A|i\rangle = a_i|i\rangle$

$B|i\rangle = b_i|i\rangle$

$AB|\psi\rangle$

$= \sum c_i a_i b_i |i\rangle$

$= BA|\psi\rangle$

⇕

$AB = BA$

互いに交換する

commute する

$|\psi\rangle = \sum c_i |i\rangle$

↓ A をはかる

$|c_i|^2$ のかくりつで a_i

$|i\rangle$

↓ B をはかる

100% のかくりつで b_i

↘ B をはかる

$|c_i|^2$ のかくりつで b_i

↓ A をはかる

100% のかくりつで a_i

A と B を同時にはかる といってもよい

⇝ $|c_i|^2$ のかくりつで (a_i, b_i)

が測定結果になる.

物理的に異なる状態は
何パラメタあるか？

合成系

基底

系1　$\mathcal{H}^{(1)}$　← $|i\rangle^{(1)}$,　$i=1,\cdots,n^{(1)}$

系2　$\mathcal{H}^{(2)}$　← $|a\rangle^{(2)}$,　$a=1\cdots n^{(2)}$

$c_1\cdots c_{n^{(1)}}$まで複素 $n^{(1)}$ パラメタあるが
$|\psi\rangle \sim z|\psi\rangle$ を同一視
⇒ $n^{(1)}-1$ パラメタ.

$n^{(2)}-1$ パラメタ

全系　$\mathcal{H} \overset{?}{=} \mathcal{H}^{(1)}\otimes\mathcal{H}^{(2)}$

テンソル積 とは

$$|i\rangle^{(1)}\otimes|a\rangle^{(2)} =: |ia\rangle$$

← 基底は $n^{(1)}n^{(2)}$ つある.

← $\underline{n^{(1)}n^{(2)}-1}$ パラメタある.

を基底とするベクトル空間.

$|\psi\rangle^{(1)}\in\mathcal{H}^{(1)}$　　$|\psi\rangle^{(1)}=\sum c_i|i\rangle^{(1)}$

$|\phi\rangle^{(2)}\in\mathcal{H}^{(2)}$　　$|\phi\rangle^{(2)}=\sum d_a|a\rangle^{(2)}$

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle^{(1)}\otimes|\phi\rangle^{(2)} &= \left(\sum c_i|i\rangle^{(1)}\right)\otimes\left(\sum d_a|a\rangle^{(2)}\right)\\
&= \sum c_i d_a\, |i\rangle^{(1)}\otimes|a\rangle^{(2)}\\
&= \sum_{i,a} c_i d_a\, |ia\rangle
\end{aligned}$$

となる.

$\mathcal{H}$ ↑ $\underline{(n^{(1)}-1)+(n^{(2)}-1)}$ パラメタ.

$$\boxed{\begin{aligned}&n^{(1)}n^{(2)}-1\\&-(n^{(1)}-1)\\&-(n^{(2)}-1)\\&=(n^{(1)}-1)(n^{(2)}-1)\end{aligned}}$$
パラメタ足りない.

$|\psi\rangle^{(1)}\otimes|\phi\rangle^{(2)}$ でないような状態を
エンタングル している という.

entangle
もつれ

量子もつれ状態

例　系1　$\mathcal{H}^{(1)} \simeq \mathbb{C}^2$　qubit　$n^{(1)}=2$

系2　$\mathcal{H}^{(2)} \simeq \mathbb{C}^2$　qubit　$n^{(2)}=2$

全系　$\mathcal{H}^{(1)}\otimes\mathcal{H}^{(2)}$　$n^{(1)}n^{(2)}=4$

1 qubit の状態　$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \ \, \| \quad\quad\quad\ \ \|$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad |\uparrow\rangle \quad\quad |\downarrow\rangle$

σ_z の固有値　$+1$　-1

$|+\rangle$　$|-\rangle$　とも書く.

これが　系1
系2　にある.

$$|\uparrow\rangle^{(1)}\otimes|\uparrow\rangle^{(2)} = |\uparrow\uparrow\rangle$$
$$|\uparrow\rangle^{(1)}\otimes|\downarrow\rangle^{(2)} = |\uparrow\downarrow\rangle$$
$$|\downarrow\rangle^{(1)}\otimes|\uparrow\rangle^{(2)} = |\downarrow\uparrow\rangle$$
$$|\downarrow\rangle^{(1)}\otimes|\downarrow\rangle^{(2)} = |\downarrow\downarrow\rangle$$

$$|\Psi\rangle = \Psi_{\uparrow\uparrow}|\uparrow\uparrow\rangle + \Psi_{\uparrow\downarrow}|\uparrow\downarrow\rangle + \Psi_{\downarrow\uparrow}|\downarrow\uparrow\rangle + \Psi_{\downarrow\downarrow}|\downarrow\downarrow\rangle$$

とかける.

いつこれが
$|\psi\rangle^{(1)}\otimes|\phi\rangle^{(2)}$ でかけるか?

$$|\psi\rangle^{(1)} = c_\uparrow |\uparrow\rangle^{(1)} + c_\downarrow |\downarrow\rangle^{(1)}$$

$$|\phi\rangle^{(2)} = d_\uparrow |\uparrow\rangle^{(2)} + d_\downarrow |\downarrow\rangle^{(2)}$$

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle^{(1)} \otimes |\phi\rangle^{(2)} = \; & c_\uparrow d_\uparrow |\uparrow\uparrow\rangle \\
& + c_\uparrow d_\downarrow |\uparrow\downarrow\rangle \\
& + c_\downarrow d_\uparrow |\downarrow\uparrow\rangle \\
& + c_\downarrow d_\downarrow |\downarrow\downarrow\rangle
\end{aligned}$$

$$\Psi := \begin{pmatrix} \Psi_{\uparrow\uparrow} & \Psi_{\uparrow\downarrow} \\ \Psi_{\downarrow\uparrow} & \Psi_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\uparrow d_\uparrow & c_\uparrow d_\downarrow \\ c_\downarrow d_\uparrow & c_\downarrow d_\downarrow \end{pmatrix} \quad \Longleftarrow$$

となる。

$$\det \Psi = (c_\uparrow d_\uparrow)(c_\downarrow d_\downarrow) - (c_\uparrow d_\downarrow)(c_\downarrow d_\downarrow) = 0.$$

逆にこれが 0 だと

$$\Psi_{\uparrow\uparrow}\Psi_{\downarrow\downarrow} = \Psi_{\uparrow\downarrow}\Psi_{\downarrow\uparrow}$$

$$\frac{\Psi_{\uparrow\uparrow}}{\Psi_{\downarrow\uparrow}} = \frac{\Psi_{\uparrow\downarrow}}{\Psi_{\downarrow\downarrow}} =: \frac{c_\uparrow}{c_\downarrow}$$ とさだめる。

$$\frac{\Psi_{\uparrow\uparrow}}{\Psi_{\uparrow\downarrow}} = \frac{\Psi_{\downarrow\uparrow}}{\Psi_{\downarrow\downarrow}} =: \frac{d_\uparrow}{d_\downarrow}$$ と定める。

うまく比だけでなく値を調整すると

が成立。

$\det\Psi$ が 0

$\Longleftrightarrow$ 状態の積。

$\det\Psi \neq 0$

$\Longleftrightarrow$ エンタングルしている。

$|\Psi\rangle$ が長さ1.としておく.

$$|\Psi_{\uparrow\uparrow}|^2 + |\Psi_{\uparrow\downarrow}|^2 + |\Psi_{\downarrow\uparrow}|^2 + |\Psi_{\downarrow\downarrow}|^2 = 1.$$

このとき $|\det \Psi|^2$: エンタングル具合

は どれくらい大きくできるか?

$$\det \Psi^\dagger \det \Psi = \det(\Psi^\dagger \Psi).$$

いま $\Psi^\dagger \Psi$ は エルミート.

$$\left((\Psi^\dagger\Psi)^\dagger = \Psi^\dagger \Psi^{\dagger\dagger} = \Psi^\dagger \Psi \right)$$

$|1\rangle$, $|2\rangle$ という固有ベクトル

p_1 p_2 固有値.

≥ 0 ≥ 0.

∵ $p_i = p_i(|i\rangle, |i\rangle)$

$= (|i\rangle, p_i|i\rangle)$

$= (|i\rangle, \Psi^\dagger\Psi |i\rangle)$

$= (\Psi|i\rangle, \Psi|i\rangle) \geq 0$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{\uparrow\uparrow} & \Psi_{\uparrow\downarrow} \\ \Psi_{\downarrow\uparrow} & \Psi_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}$$

← $\mathrm{tr}\, \Psi^\dagger \Psi = 1$.

とかける.

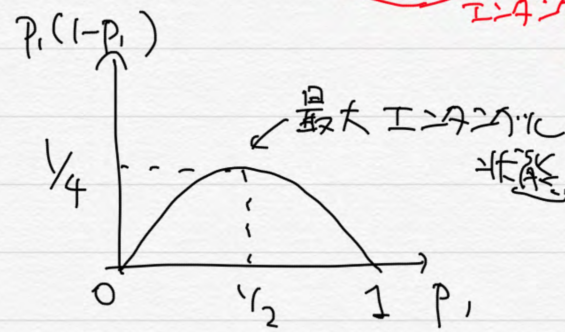
$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$$

⇒ 基底へんかんすると

$$\Psi^\dagger \Psi \sim \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}\, \Psi^\dagger\Psi = p_1 + p_2 = 1$

$\det \Psi^\dagger \Psi = p_1 p_2$ エンタングル具合



$\{p_1, p_2\}$ エンタングルメント・スペクトラム

p_1, p_2 のかわりに

$$S := p_1 \log p_1 + p_2 \log p_2$$

エンタングルメント・エントロピー

これも $p_1 = p_2 = 1/2$ で最大.

例 EPR 状態

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi^\dagger \Psi = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{H}^{(1)}$ で $A^{(1)}|i\rangle = \sum_j (A^{(1)})_{ij}|j\rangle$

$\mathcal{H}^{(2)}$ で $B^{(2)}|a\rangle = \sum_b (B^{(2)})_{ab}|b\rangle$

と作用するとする.

$A^{(1)}, B^{(2)}$ は $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ にも作用.

$$A^{(1)}|ia\rangle := \sum_j (A^{(1)})_{ij}|ja\rangle$$

$$B^{(2)}|ia\rangle := \sum_b (B^{(2)})_{ab}|ib\rangle$$

$$A^{(1)}B^{(2)}|ia\rangle := \sum_{j,b} (A^{(1)})_{ij}(B^{(2)})_{ab}|jb\rangle$$

$$= B^{(2)}A^{(1)}|ia\rangle.$$

$\downarrow$

系1の観測量と系2の観測量は

いつでも交換

いつでも同時観測可能.

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_x|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$

$\sigma_x|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\sigma_z|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$

$\sigma_z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$

$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\underline{\sigma_y|\uparrow\rangle = i|\downarrow\rangle}$

$\sigma_y|\downarrow\rangle = -i|\uparrow\rangle$.

$\sigma_y^{(2)}|\downarrow\uparrow\rangle = i|\downarrow\downarrow\rangle$

$\sigma_x^{(1)}|\uparrow\downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$

EPR 状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$\sigma_z^{(1)}$ $\sigma_z^{(2)}$ を測定してみる.

値を $S_z^{(1)}$ $S_z^{(2)}$ と書く.

$|\uparrow\downarrow\rangle$ $\sigma_z^{(1)}$ の $+1$ の固有状態

$\sigma_z^{(2)}$ の -1 の固有状態.

$\rightsquigarrow (S_z^{(1)}, S_z^{(2)}) = (+1, -1)$

$|\downarrow\uparrow\rangle$ $\sigma_z^{(1)}$ の -1 の固有状態

$\sigma_z^{(2)}$ の $+1$ の固有状態.

$\rightsquigarrow (S_z^{(1)}, S_z^{(2)}) = (-1, +1)$

上記の二つが

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$ で重なっている.

50%のかくりつで

$(S_z^{(1)}, S_z^{(2)}) = (+1, -1)$

50%のかくりつで

$(S_z^{(1)}, S_z^{(2)}) = (-1, +1)$.

GHZ 状態

qubit 3つ $\mathcal{H}^{(1)}$ $\mathcal{H}^{(2)}$ $\mathcal{H}^{(3)}$

$|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$

$8 = 2 \times 2 \times 2$

$|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, \cdots$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\right)$$

$$\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_x^{(3)}|\Psi\rangle \overset{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle - |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle\right) = -|\Psi\rangle$$

$$\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_x^{(3)}|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$$

$\sigma_x|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$

$\sigma_x|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$

$$\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_x^{(3)}|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$$

$\Rightarrow$ 系1,2,3で σ_x を測定した値を $s_x^{(1)}$ $s_x^{(2)}$ $s_x^{(3)}$

$= \pm 1$ $= \pm 1$ $= \pm 1$

とすると

$$s_x^{(1)} s_x^{(2)} s_x^{(3)} = -1$$

$$\underline{\sigma_x^{(1)}}\ \underline{\sigma_y^{(2)}}\ \underline{\sigma_y^{(3)}}\ |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle\right) = +|\Psi\rangle$$

$s = \pm 1$

$\sigma_y|\uparrow\rangle = i|\downarrow\rangle$

$\sigma_y|\downarrow\rangle = -i|\uparrow\rangle$

$$\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3\ |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = -|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$$

i i

$$\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_y^3\ |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle = -|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$$

どこでずるを操作をしたか？

$\sigma_x^{(1)}$ と $\sigma_y^{(1)}$ は
交換しないので
同時に測定できない。

$\sigma_x^{(1)}$ と $\sigma_y^{(2)}$ は 交換するので
同時に測定できる。

$$\boxed{S_x^{(1)} S_y^{(2)} S_y^{(3)} = +1}$$

同様に

$$S_y^{(1)} S_x^{(2)} S_y^{(3)} = +1$$

$$S_y^{(1)} S_y^{(2)} S_x^{(3)} = +1$$

$$\boxed{S_x^{(1)} S_x^{(2)} S_x^{(3)} = -1} \Leftarrow \text{前頁から}$$

この3つの式をかける。 $\left(S_y^{(1)}\right)^2 = 1$ から

$$S_x^{(1)} S_x^{(2)} S_x^{(3)} = +1.$$

が得られる。

状態

$|\psi\rangle \sim z|\psi\rangle$

「物理的に同じ」

$|\phi\rangle \sim w|\phi\rangle$

「物理的に同じ」

重ね合せの原理

$|\psi\rangle + |\phi\rangle \quad z|\psi\rangle + w|\phi\rangle$

一般には 物理的に同じ ではない

EPR $\quad |\uparrow\downarrow\rangle \quad + |\downarrow\uparrow\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$

$-|\downarrow\uparrow\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$

物理的に異なる状態!

$|\uparrow\rangle^{(1)} \quad \mathcal{H}^{(1)} \quad\quad \mathcal{H}^{(2)} \quad\quad |\uparrow\rangle^{(2)}$

$|\downarrow\rangle^{(1)} \quad \ni \quad\quad \ni \quad\quad |\downarrow\rangle^{(2)}$

$\underbrace{|i\rangle^{(1)}}_{\text{記号}} \quad \underbrace{|a\rangle^{(2)}}_{\text{記号}}$

$\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$

$\ni$

$\underbrace{|i\rangle^{(1)} \otimes |a\rangle^{(2)}}_{\text{新たな記号}}$

いま記号 あ

と 記号 ♡ を考える.

これを基底とするベクトル空間を考える.

aあ$+b$♡ と表せる.

これは 2次元ベクトル空間である.

cあ$+d$♡

+

$(a+c)$あ$+(b+d)$♡

$\mathcal{H}^{(1)}$ … $|\uparrow\rangle^{(1)}$ $|\downarrow\rangle^{(1)}$

$\mathcal{H}^{(2)}$ … $|\uparrow\rangle^{(2)}$ $|\downarrow\rangle^{(2)}$

記号として

$$\left.\begin{array}{l} |\uparrow\rangle^{(1)}\otimes|\uparrow\rangle^{(2)} \\ |\uparrow\rangle^{(1)}\otimes|\downarrow\rangle^{(2)} \\ |\downarrow\rangle^{(1)}\otimes|\uparrow\rangle^{(2)} \\ |\downarrow\rangle^{(1)}\otimes|\downarrow\rangle^{(2)} \end{array}\right\}$$

を基底とするベクトル空間を考える.

$\mathcal{H}^{(1)}$ で $|\psi\rangle$　$|\psi| = 2$

$\mathcal{H}^{(2)}$ で $|\phi\rangle$

$\mathcal{H}^{(1)}\otimes\mathcal{H}^{(2)}$ で $|\psi\rangle\otimes|\phi\rangle$

$\mathcal{H}^{(1)}\otimes\mathcal{H}^{(2)}$

$a\,|\uparrow\rangle^{(1)}\otimes|\uparrow\rangle^{(2)}$

$+b\,|\uparrow\rangle^{(1)}\otimes|\downarrow\rangle^{(2)}$

$+$ …

と表せる.

4次元空間になる.