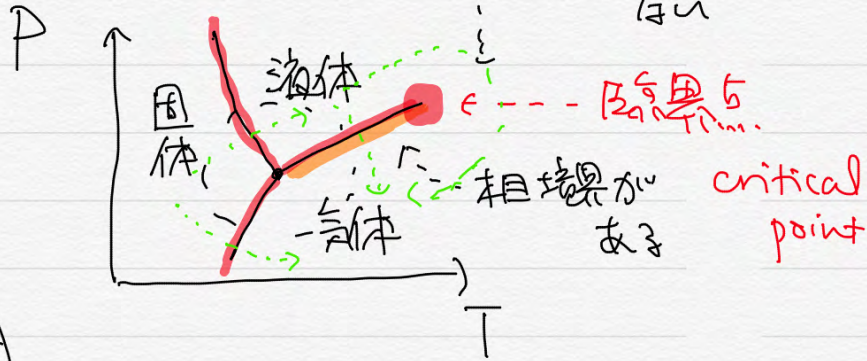


熱力学・統計力学

物質の三態

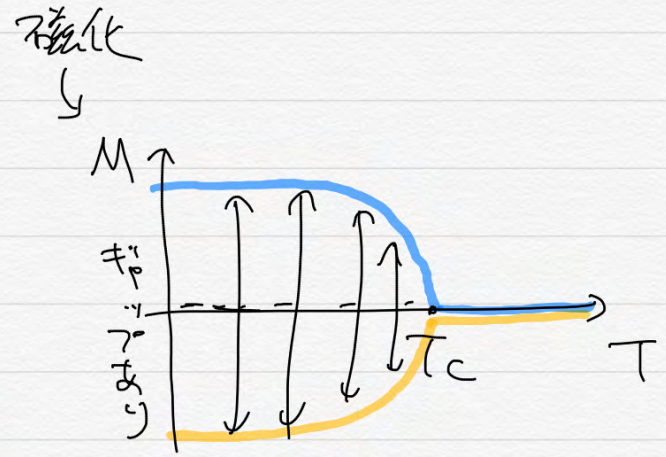
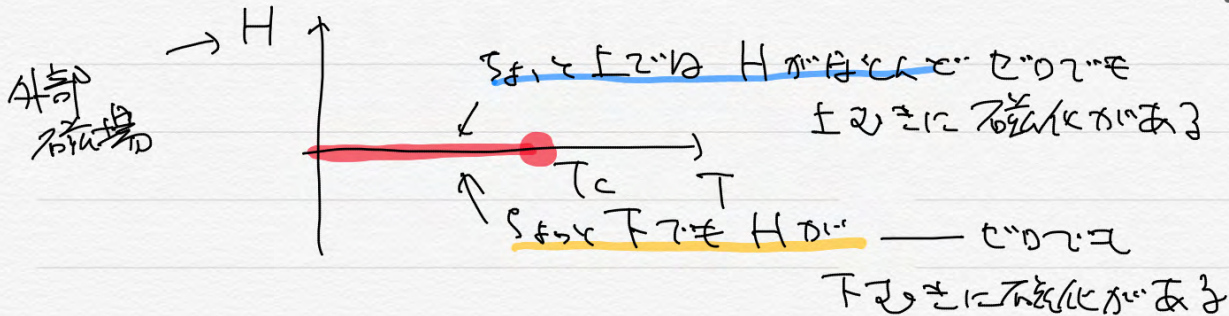


水

磁石

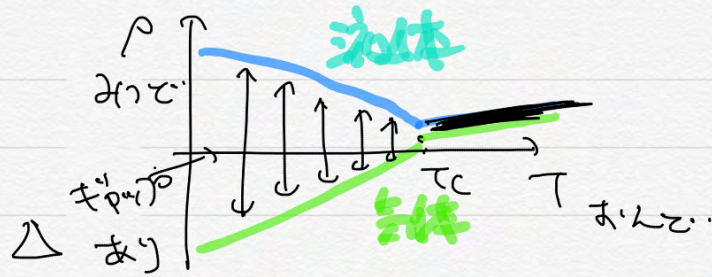
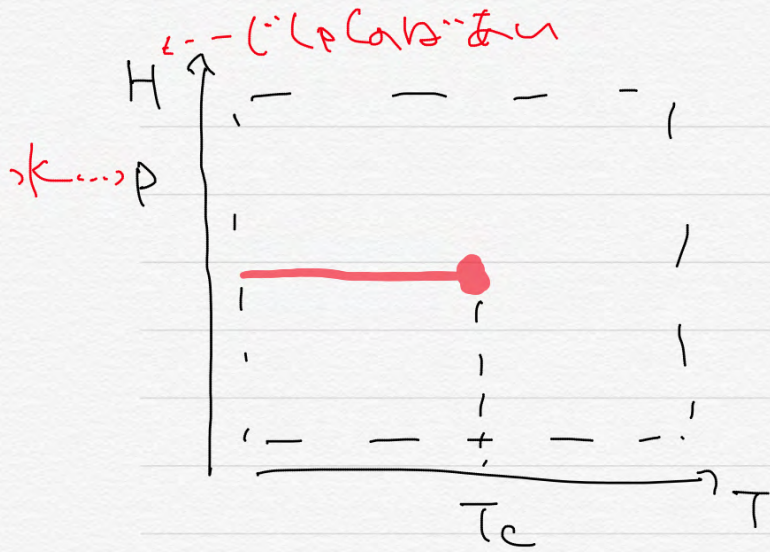


↓ T がある
磁石でなく存在



臨界点周りの相図の
とささ





水の相転移 $\Delta \sim |t|^\beta$
 水の相転移

$t := T - T_c$

比熱 $\sim |t|^{-\alpha}$
 水の相転移

水の相転移

$\alpha \sim 0.11$

$\beta \sim 0.32$

水の相転移の物理量

$|t|$ の水の相転移

水の相転移 (critical exponent)

水の相転移

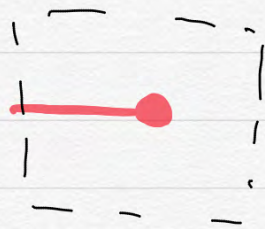
$\Rightarrow \Gamma = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \bar{T}_1$

水の相転移

$H \leftrightarrow M$
 水の相転移

$P \leftrightarrow \rho$
 水の相転移

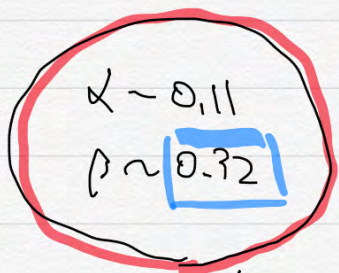
この他に深さの物理系で



この相図を
とす

臨界点近くの物理量の

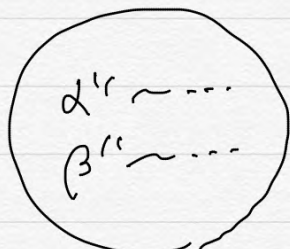
べきの振舞が同じになる。



深さの系



別の深さの系



さらに別の深さの系

ユニバーサリティ
クラスにある。
critical pt に
達するたびに
tune する
100xA の数値が
異なる。

制御

100xA

T, P

T, H

~



相図

このほかの集いのことを

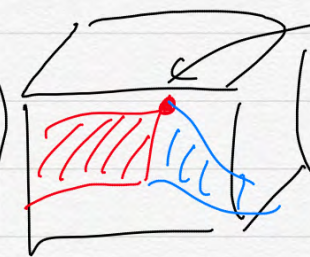
universality class とす。

水, 磁石, 合金の u.c. を

三次元イジング u.c. とす。

一般の系は

もこの深さの100xAがある。



へん存して
異なる...

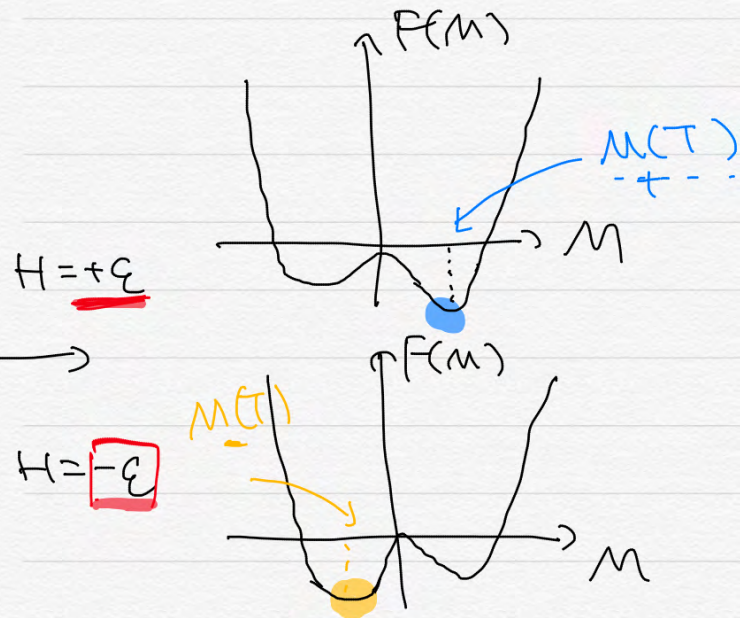
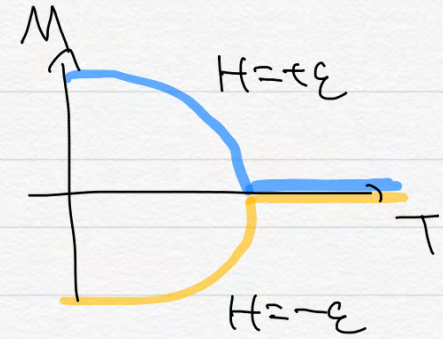
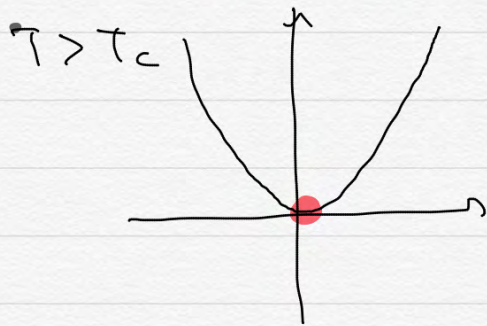
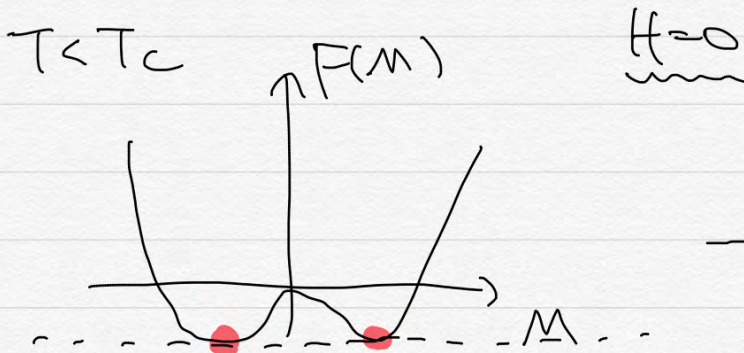
非常にわかりにくい

このA17の相図の次のように
理解していただきたい:

$$F(M) = aM^4 + (T - T_c)M^2 - HM$$

平衡点の自由エネルギー

最小化して求めている。



平均場近似.

$$H \rightarrow 0 \text{ 附近}$$

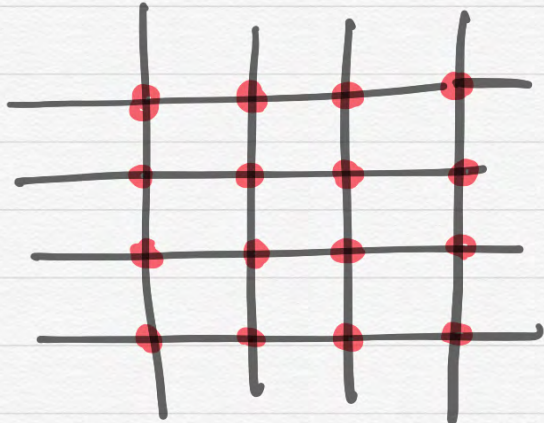
$$M_+(T) \sim |T - T_c|^{1/2}$$

$$\beta = \frac{1}{2}$$

元々、Ising 模型を考へてみる!

d次元 Ising 模型

$d=2$



各格子点 \vec{x} に $s(\vec{x}) = \pm 1$ の自由度

配位 $\{s(\vec{x})\}$ $+1 \dots \uparrow$
 $-1 \dots \downarrow$

実現する確率

$$\infty \prod_{\vec{x}, \vec{y}} e^{J s(\vec{x}) s(\vec{y})} \prod_{\vec{x}} e^{h s(\vec{x})}$$

で表される。

100% 以上

$J > 0$
 $h \leftarrow$ 正負

J は β を書くと $J \rightarrow \beta J$ である。

$\sim \frac{1}{T}$: 逆温度

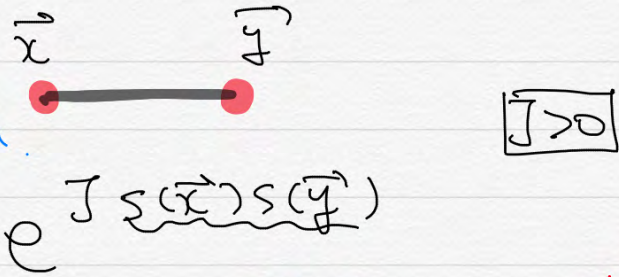
非常に大さな β に考へてみる...

h の影響

$$h > 0 \Rightarrow e^{h(+1)} > e^{h(-1)}$$

$$h < 0 \Rightarrow e^{h(+1)} < e^{h(-1)}$$

平均場近似



$J \sim 0$

$$e^{J(+)} \gg e^{J(-)}$$

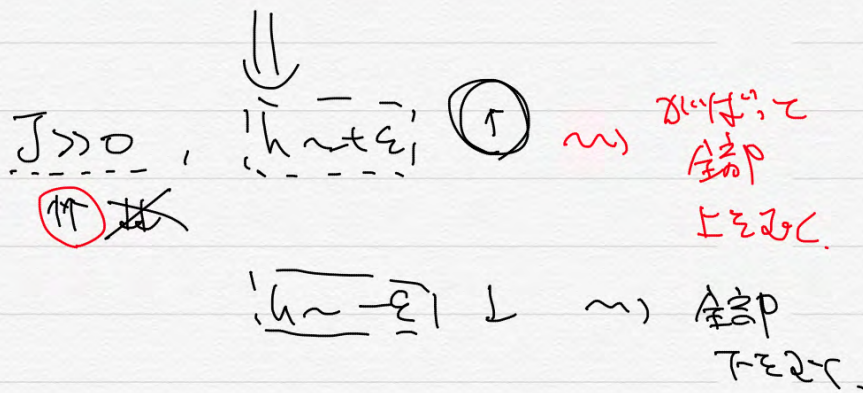
↑ ↑ ↓ ↓

$J \gg 0$

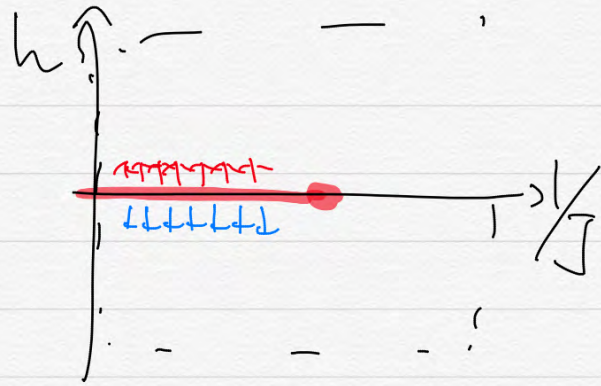
$$e^{J(+)} \gg e^{J(-)}$$

↑ ↓ ↓ ↓

↑ $e^{J(+)} \gg e^{J(-)}$ \Rightarrow $J > 0$ の方が有利

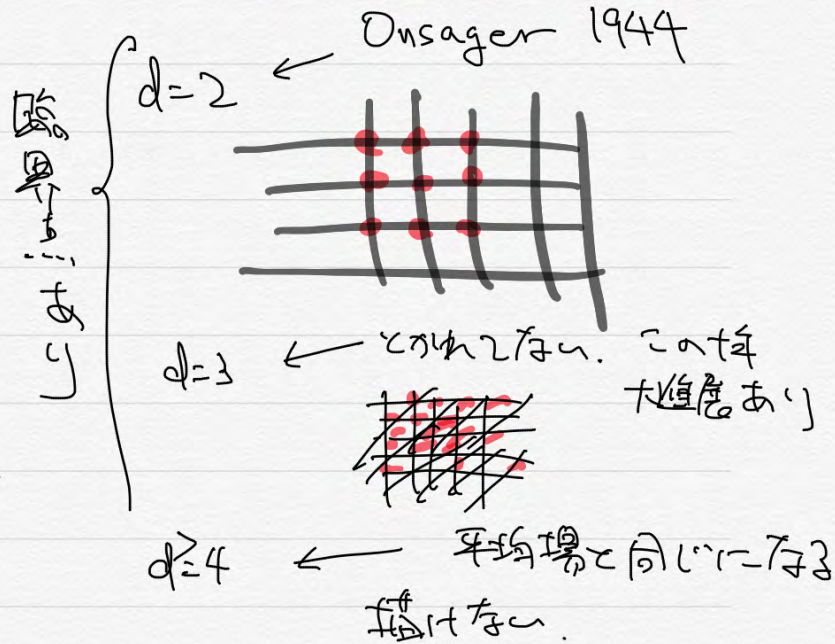


$J = 0$, 平均場近似でわからない



$e^{J(+)} \gg e^{J(-)}$ に存在

$d=1$ ← Ising 本が異なる臨界点になる



	d=2	d=3	d ≥ 4
α	0	<u>0.110...</u>	0
β	1/8	<u>0.326...</u>	1/2

↑
厳密に

とわかる。

↑
分かる、
きた。

水、磁石と
うさの

universality class

↑
平均場と
同じになる。

Conformal

bootstrap 手法か

10年前に出た。大進展。

次回以降
やる。

イジング・模型のシミュレーション

モンテカルロ法。

配列 $\{S(x)\}$ を乱数生成して

$$P_{\alpha}(\{S(x)\}) \propto \prod_{\langle x, y \rangle} e^{-J(S(x), S(y))}$$

(x, y) の対

(h は省略)

に従って行く。

$$\{S(x)\} \rightarrow \{S'(x')\}$$

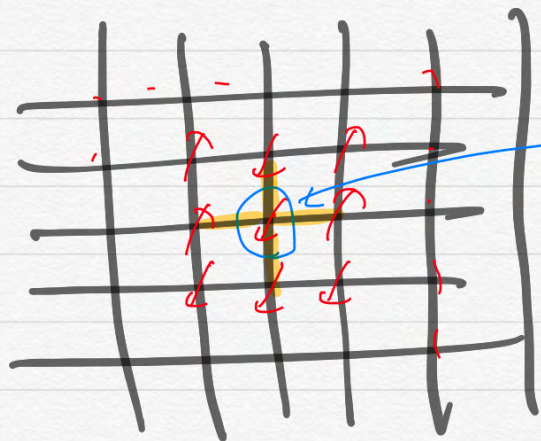
この操作は
可逆的。

格点 x
の近隣の
近隣の
近隣の

$S(x_0) \in \pm 1$

これを適切な確率で

flip する。

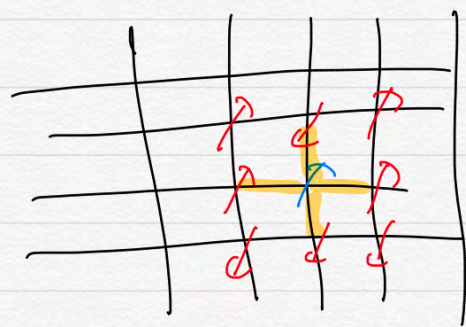


flip (おひねり?)
 \vec{x}_0

$s(\vec{x})$

$$\pi e^{J s(\vec{x}) s(\vec{y})}$$

~~~~~  
 2323



$s'(\vec{x})$

$$\pi e^{J s'(\vec{x}) s'(\vec{y})}$$

計算  
 match  $\Rightarrow$   
 242  
 $R^{-1}$  242

$$\pi e^{2J s(\vec{x}_0) s(\vec{y})}$$



$s(\bar{x}_0) \ni \text{flip}$

$$\left\{ \begin{array}{c} f(s(\bar{x})) \\ P_{f(s)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\quad} \left\{ \begin{array}{c} f(s'(\bar{x})) \\ P_{f(s')} \end{array} \right\}$$

$$R := P_{f(s')} / P_{f(s)}$$

$\tau = \bar{x}$  である  $\exists \bar{x}$  の  $f(\bar{x})$ .

$\tau$  は  $-1$  から  $1$  まで  
 $0 \leq u \leq 1$  である  
 $R > u$  ならば flip した状態を  
 採用  
 $R \leq u$  ならば flip (なにも  
 して) しない。

2次元イジング  $h=0$  のとき

臨界点...  $J_c = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$   
 $= 0.4407 \dots$

↑  
 Onsager (1944) の  $\frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$  に  
 Kramers & Wannier (1941) の  
 導出が由来する。

KW 双対性  $\tau$  の  $\tau$  使用。

duality  
 という事。

(相対性  
 という事  
 relativity)

$$J > J_c$$

↓

$$J < J_c$$

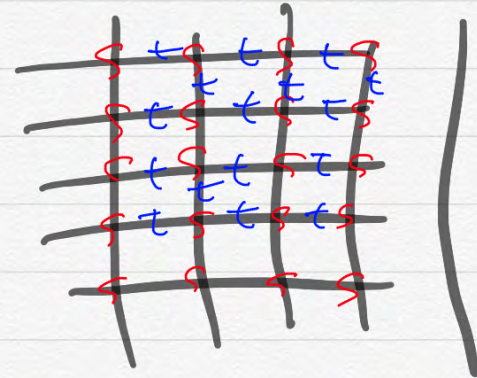
の間に深層SWTがある。

配位 \$f\_S(\vec{x})\$ (a x 1 y)

$$\propto \prod_{\vec{x}, \vec{y}} e^{J_S(\vec{x}) S(\vec{y})}$$

(存在性)

$$= Z^{-1} \sum_{\{S\}} \prod e^{J_S S}$$



z(J) :=  $\sum_{\{S\}} \prod e^{J_S(\vec{x}) S(\vec{y})}$

$(\cosh J)$  の数

$$= \sum_{\{t\}} \sum_{\{S\}} (\underbrace{SS' \tanh J}_{\text{blue wavy}})^{t \in 0, 1}$$

これは計算しなくてはなりません。

↑  
 $t$  を固定して  
 $S$  を変数にして計算  
 $\sum S = 0$

$SS' = \pm 1 \Rightarrow$

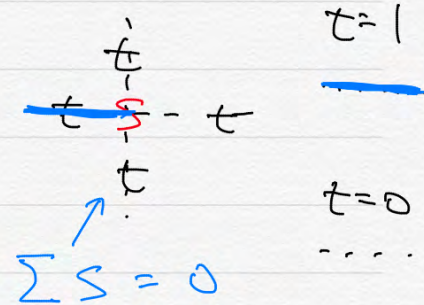
$$e^{J SS'} = (\cosh J) \sum_{t=0,1} (SS' \tanh J)^t$$

⊙  $SS' = \pm 1$  のときは両辺に  $\sum$  を計算

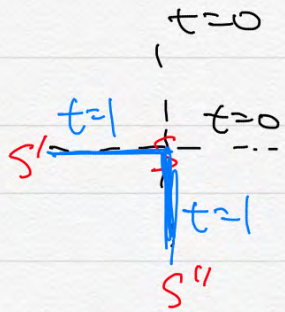
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$\Rightarrow$  消滅



$$\prod (\epsilon s' \tanh J)^t$$

$\Rightarrow$  変換

$$\sum_s (\epsilon s' \tanh J) (\epsilon s'' \tanh J)$$

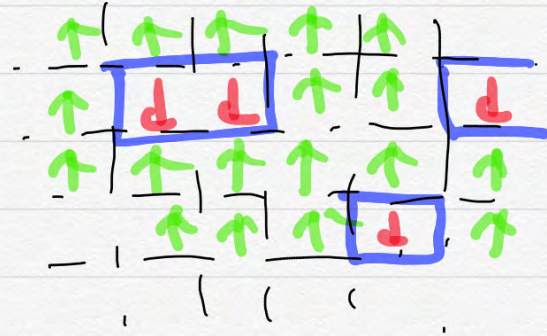
$$\sum_{s=\pm 1} s^2 = 2$$

$\Rightarrow$   $t=1$  の線が閉曲線になる場合の値の総和。

$$Z(J) = (2 \cosh J)^{\sum a}$$

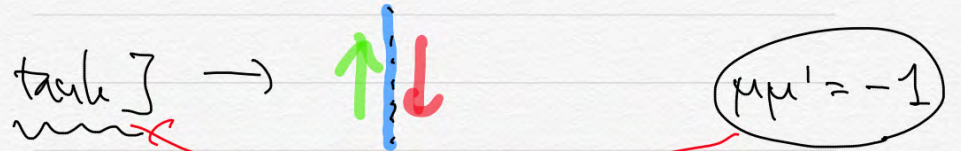
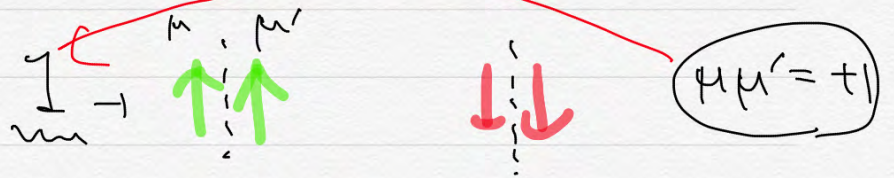
$$\sum_{t \in \mathbb{Z}} (\tanh J)^L$$

$t=1$  の存在  
閉曲線が閉曲線になる。



閉曲線の外  $\epsilon \uparrow$ , 内  $\epsilon \downarrow$

$\mu = \pm 1$   $\epsilon$  の配値。



赤と緑の  
=  $(\tanh J)^{\frac{1}{2}(1 - \mu\mu')}$

$$Z(J) \approx \sum_{\{s\}} \prod e^{Jss'}$$

$$(2 \cosh J) \sum_{\{M\}} \prod (\tanh J)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} M M'}$$

$$2 (\cosh J \sinh J)^{\frac{1}{2}} \sum_{\{M\}} \prod (\tanh J)^{-\frac{1}{2} M M'}$$

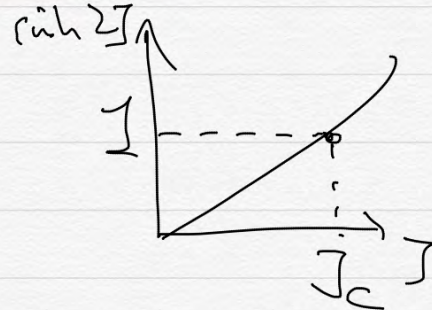
$$= \left( \text{rectangle with diagonal lines} \right) \sum_{\{M\}} e^{J' M M'}$$

$$e^{J'} = (\tanh J)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$(\sinh 2J) (\sinh 2J') = 1$$

$$J_c = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \approx 0.44 \dots$$



$\left[ \frac{e^{2J_c} - e^{-2J_c}}{2} = 1 \right]$   
 2次方程式

$$\boxed{\sinh 2J_c = 1}$$

ε ε ε ε

$$J > J_c$$

ε

$$J < J_c$$

0...  
 未知な

↓

$$\propto J < \infty$$

一度だけ

臨界点がある

上記  $J_c$  に到達する

まで

$$\left[ \frac{e^{2J_c} - e^{-2J_c}}{2} = 1 \right]$$