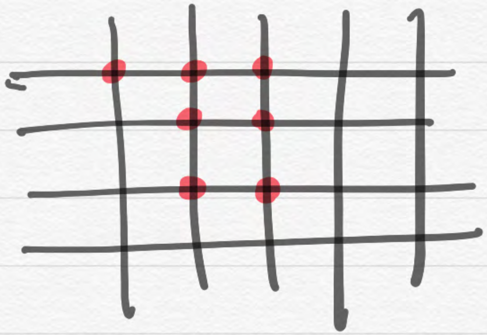
イジング模型



$s(\vec{x}) = \pm 1.$

$$P_{\{s(\vec{x})\}} = Z(J)^{-1} \times \prod_{\substack{\text{となりあう}\\ \text{格子点}\\ \vec{x},\vec{y}}} e^{J s(\vec{x}) s(\vec{y})}$$

$s(\vec{x}), s(\vec{y})$ ↑↑ ↓↓ 〜 e^{+J}

$\vee|$

$J>0$ ↑↓ ↓↑ 〜 e^{-J}

$J \gg 0$ → そろえたい
$J \sim 0$ → そうでもない.

⇒ どこかの $J = J_c$ で
臨界点 があるっぽい.

$$\sum_{s(\vec{x})} P_{\{s(\vec{x})\}} = 1$$

⇓

$$Z(J) = \sum_{s(\vec{x})} \prod_{\substack{\vec{x},\vec{y}\\ \text{となり}}} e^{J s(\vec{x}) s(\vec{y})}$$

⇑

がんばって計算.

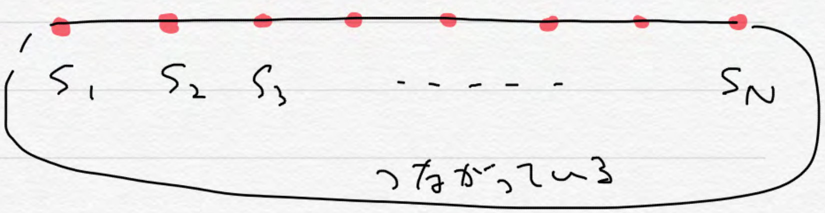
$Z(J)$: 分配関数
partition function

$\Downarrow$

$e^{N \boxed{F(J)}}$ ← だいたい
こう振まう.

↑
格子点の数.

まず… 1次元イジング模型から
はじめよう！



ことにする。

$$Z(J) = \sum_{s_1=\pm1}\sum_{s_2=\pm1}\cdots\sum_{s_N=\pm1} e^{Js_1s_2}\,e^{Js_2s_3}\cdots e^{Js_{N-1}s_N}\,e^{Js_Ns_1}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} e^{Js_is_{i+1}}$$

↑

i=N のとき
$s_{N+1} := s_1$ とする。

どうするか？

$$\sum_{s_2=\pm1} e^{Js_1s_2}\,e^{Js_2s_3} = (T^2)_{s_1s_3}$$

$T_{s_1s_2}$　　$T_{s_2s_3}$

±1 ±1

↑

2×2行列と思う。

$$= \sum_{s_1=\pm1}(\underbrace{TT\cdots T}_{N})_{s_1s_1}$$

$$= \mathrm{tr}\, T^N$$

となる。

$$T_{ss'} = e^{Jss'}$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,-1} \\ T_{-1,1} & T_{-1,-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{J} & e^{-J} \\ e^{-J} & e^{J} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{tr}\, T^N$ は？

↑ 基底によらない。

固有値

$$T \sim \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

と基底をとりなおせるなら

$$\mathrm{tr}\, T^N = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}^N$$

$$= \mathrm{tr} \begin{pmatrix} p^N & 0 \\ 0 & q^N \end{pmatrix} = p^N + q^N .$$

$$\boxed{e^{NF(J)}} \simeq Z(J)$$

よって T の固有値 p, q を求めればよい。

$$\begin{pmatrix} e^{J} & e^{-J} \\ e^{-J} & e^{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{J} + e^{-J} \\ e^{J} + e^{-J} \end{pmatrix}$$

$$= \underline{(e^{J} + e^{-J})} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{J} & e^{-J} \\ e^{-J} & e^{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{J} - e^{-J} \\ e^{-J} - e^{J} \end{pmatrix}$$

$$= \underline{(e^{J} - e^{-J})} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \mathrm{tr}\, T^N = \boxed{(e^{J} + e^{-J})^N} + \cancel{(e^{J} - e^{-J})^N}$$

N→∞で むし できる.

$$e^{J} + e^{-J} > e^{J} - e^{-J}$$

↓ N乗 　　↓ N乗

$$(e^{J} + e^{-J})^N \ggg (e^{J} - e^{-J})^N$$

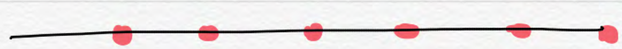
$$\Rightarrow \quad e^{NF(J)} \approx \left(e^{J}+e^{-J}\right)^{N}$$

$$\Rightarrow \quad F(J) = \log\left(e^{J}+e^{-J}\right) \quad //$$

Jで何回でもビブンできる。

（相転移がない
臨界点）

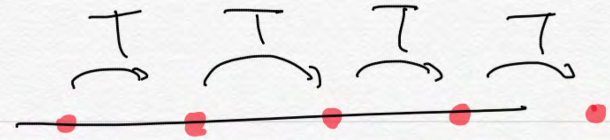
一般に、相転移とか臨界点があると
F(J) は有限回しかビブン
できなくなる。



$$\underbrace{s \quad s'}$$

$$\boxed{e^{Jss'}}$$

$$= T_{ss'}$$



$$s=+1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \leftrightarrow |\uparrow\rangle$$

$$s=-1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \leftrightarrow |\downarrow\rangle$$

T：転送行列.
transfer matrix

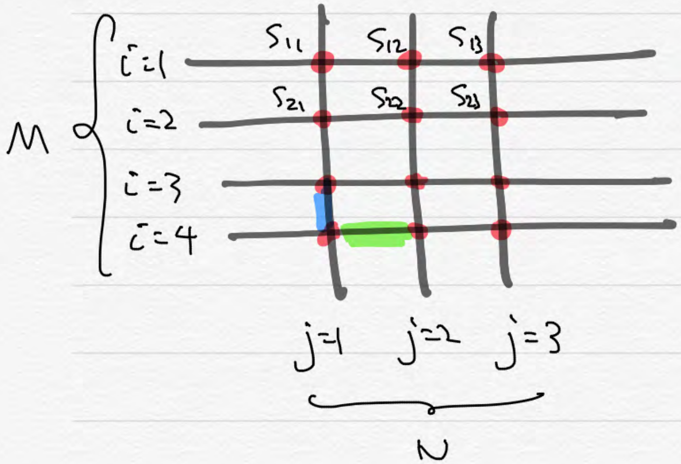
りさん的な 時間発展と思うと
qubit 系 がでてきた。

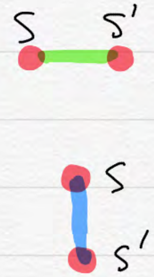
1次元古典統計力学モデル
↳ qubit 1コ系.
有限次元の量子力学系に
かきかえた。

あっちのテクニック
↕
こっちのテクニック

d 次元古典統計モデル
⟷ (d-1)次元の量子系.

2次元イジングモデルにうつろう。





$e^{Jss'}$

$e^{J'ss'}$

前回. Kramers-Wannier 双対性.

$Z(J) \leftrightarrow Z(\tilde{J})$

$\sinh 2J \sinh 2\tilde{J} = 1.$

$Z(J, J') \leftrightarrow Z(\tilde{J}, \tilde{J}')$.

$\sinh 2J \sinh 2\tilde{J}' = 1$

$\sinh 2J' \sinh 2\tilde{J} = 1.$

$\Rightarrow$ 転移点は $\sinh 2J \cdot \sinh 2J' = 1$ のとき.

$S_{i,j} = \pm 1.$

2^N コの和

$$Z(J, J') = \sum_{S_{11}=\pm1} \sum_{S_{12}=\pm1} \cdots \sum_{S_{1N}=\pm1} \sum_{S_{21}=\pm1} \sum_{S_{22}=\pm1} \cdots \sum_{S_{2N}=\pm1} \cdots \sum_{S_{M1}=\pm1} \sum_{S_{M2}=\pm1} \cdots \sum_{S_{MN}=\pm1} \prod_{i=1}^{M} \prod_{j=1}^{N} \boxed{e^{J S_{i,j} S_{i,j+1}}} \boxed{e^{J' S_{i,j} S_{i+1,j}}}$$

2^N コの和.

$\simeq$: $e^{MN \{F(J, J')\}}$ とふるまう.

を求めたい.

M, N 大きいと

S　　T

但し $S_{i,N+1} := S_{i,N}$; $S_{M+1,j} := S_{1,j}$ とする.

1. N qubit系にかきかえる

$\Longrightarrow$ $2^N \times 2^N$ の行列の対角化に帰着

2. 2N コのフェルミオンの系にかきかえる。

$\Longrightarrow$ $2N \times 2N$ の行列の対角化に帰着

3. 格子上のフーリエ変換

$\Longrightarrow$ 2×2 の行列の対角化に帰着

$$\sum_{s_{i+1,1}} \sum_{s_{i+1,2}} \cdots \sum_{s_{i+1,N}} \boxed{e^{J' s_{i,j} \boxed{s_{i+1,j}}}} \; e^{J' \boxed{s_{i+1,j}} s_{i+2,j}}$$

$(s_{\bullet,j=1}, s_{\bullet,j=2}, \cdots, s_{\bullet,j=N})$

という1つ目の添字と

$(s_{*,j=1}, s_{*,j=2}, \cdots, s_{*,j=N})$

という2つ目の添字をもった

$2^N \times 2^N$ の行列と思う。

T と書く $= T'^{(1)} T'^{(2)} \cdots T'^{(N)}$

$s_{\bullet j} = +1 \leftrightarrow |\uparrow\rangle^{(j)}$

$s_{\bullet j} = -1 \leftrightarrow |\downarrow\rangle^{(j)}$

j番目のqubitの状態をあらわしていると思う。

$e^{J' s_{i,j} s_{i+1,j}}$

$$T' = \begin{pmatrix} e^{J'} & e^{-J'} \\ e^{-J'} & e^{+J'} \end{pmatrix}$$

が j番目のqubitに作用。

これを $T'^{(j)}$ と書く。

$$S := \prod_{j=1}^{N} e^{J s_{i,j} \, s_{i,j+1}}$$

行列としての添じ A_{ab}

$(s_{i,1} \cdots s_{i,j=N})$ を

1セットしか もたない.

$(s_{i',1} \cdots s_{i',j=N})$ という

2つ目の 添え字を もつと思うんだが…

たまたま $s_{i,1} = s_{i',1}$

$s_{i,2} = s_{i',2}$

$\vdots$

$s_{i,N} = s_{i',N}$

のときのみ 1以外の値をもつ.

$2^N \times 2^N$ の対角行列 である。

N コの qubit

$$\overbrace{|\uparrow\downarrow\uparrow \cdots \downarrow\rangle}^{N}$$

$\vec{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の $\sigma_z^{(j)}$ を作用させると

j ばんめの qubit $\left.\begin{array}{l} |\uparrow\rangle \Rightarrow +1 \\ |\downarrow\rangle \Rightarrow -1 \end{array}\right\} s_{\bullet,j}$

$\rightsquigarrow e^{J s_{i,j} s_{i,j+1}}$

は $e^{J \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)}}$ の固有値.

$\rightsquigarrow$

S は行列としては単に

$$\underline{\prod_{j=1}^{N} e^{J \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)}}}$$ である.

対角.

$Z(J,J')$

$$= \mathrm{tr}\left(S\,\sigma T\right)^M = \left(2\sinh 2J'\right)^{\frac{NM}{2}} \mathrm{tr}\left(\prod_{j=1}^{N} e^{J\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)}} \prod_{j=1}^{N} e^{K\sigma_x^{(j)}}\right)^M$$

但し

$$S = \prod_{j=1}^{N} e^{J\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)}}$$

$$\sigma T = \prod_{j=1}^{N} T'^{(j)} = \left(2\sinh 2J'\right)^{N/2} \prod_{j=1}^{N} e^{K\sigma_x^{(j)}}$$

両辺の det をとると

$$T' = \begin{pmatrix} e^{J'} & e^{-J'} \\ e^{-J'} & e^{J'} \end{pmatrix} = m\, e^{K\sigma_x}$$

左辺は $e^{2J'} - e^{-2J'} = 2\sinh 2J'$

右辺は $m^2 \times \left[(\cosh K)^2 - (\sinh K)^2\right]$, $\left[(\cosh K)^2 - (\sinh K)^2\right] = 1$

$$m = \sqrt{2\sinh 2J'}$$

$$e^{-2J'} = \tanh K$$

$$e^{K\sigma_x} = \begin{pmatrix} \cosh K & \sinh K \\ \sinh K & \cosh K \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ $S\sigma T$ の固有値を $p_1 \cdots p_{2^N}$ とすると

$$Z(J,J') = p_1^M + p_2^M + \cdots + p_{2^N}^M.$$

$$\mathrm{tr}\left(\underbrace{\prod_{j=1}^{N} e^{J\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)}}}_{e^{\sum_{j=1}^{N} J\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)}}}\ \underbrace{\prod_{j=1}^{N} e^{K\sigma_x^{(j)}}}_{e^{\sum_{j=1}^{N} K\sigma_x^{(j)}}}\right)^M$$

$$e^{-2J'} = \tanh K$$

$$\Updownarrow$$

$$\sinh 2J' \sinh 2K = 1.$$

$K = \tilde{J}$ であった.

$$\neq \quad e^{\sum_{j=1}^{N} J\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)} + K\sigma_x^{(j)}}$$

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

には A と B が可換でないといけない.

前回, Kramers-Wannier 双対:

$$Z(J) \leftrightarrow Z(\tilde{J})$$

$$\sinh 2J \sinh 2\tilde{J} = 1.$$

$$Z(J, J') \leftrightarrow Z(\tilde{J}, \tilde{J}').$$

$$\sinh 2J \sinh 2\tilde{J}' = 1$$

$$\sinh 2J' \sinh 2\tilde{J} = 1.$$

⇒ 転移線は $\sinh 2J \cdot \sinh 2J' = 1$ のとき

この N qubit 系の立場では K-W は単に J と K の入れかえ.

$$e^{\sum_{j=1}^{N} J Z^{(j)}} \, e^{\sum_{j=1}^{N} K X^{(j)}} = e^{\sum J X^{(j)}} \, e^{\sum K Z^{(j)}}$$

$$e^{\sum_{j=1}^{N} K Z^{(j)}} \, e^{\sum_{j=1}^{N} J X^{(j)}}$$

XとZをいれかえても
抽象的な
代数的性質は
一緒.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)} &=: Z^{(j)} \\ \sigma_x^{(j)} &=: X^{(j)} \end{aligned}\right\}$$ の性質は?

① $(Z^{(j)})^2 = 1$. $(X^{(j)})^2 = 1$.

② $Z^{(j)}$ 同士は交換する.

③ $X^{(j)}$ 同士も交換する.

④ $Z^{(j)}$ と $X^{(j')}$ は
$j' = j$ か $j+1$ のときは
反交換. そうでなければ交換.

$\Leftrightarrow$

① $(X^{(j)})^2 = 1$. $(Z^{(j)})^2 = 1$

② $X^{(j)}$ 同士は交換する.

③ $Z^{(j)}$ 同士も交換する.

④ $X^{(j)}$ と $Z^{(j')}$ は . .
$j' = j$ か $j-1$ のときは
反交換. そうでなければ交換.

$$\boxed{e^{\sum_{j=1}^{N} J\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)}} \; e^{\sum_{j=1}^{N} K\sigma_x^{(j)}}} = e^{\sum_j J Z^{(j)}} e^{\sum_j K X^{(j)}}$$

(ほとんど)同じ固有値をもつ.

何故か?

$$\boxed{e^{\sum_{j=1}^{N} K\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)}} \; e^{\sum_{j=1}^{N} J\sigma_x^{(j)}}} = e^{\sum_j K Z^{(j)}} e^{\sum_j J X^{(j)}}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)} &=: Z^{(j)} \\ \sigma_x^{(j)} &=: X^{(j)} \end{aligned}\right\} \text{の性質は?}$$

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$

$\boxed{\sigma_z^{(j)}\sigma_x^{(j)} = -\sigma_x^{(j)}\sigma_z^{(j)}}$

$\sigma_z^{(j)}\sigma_x^{(j')} = \sigma_x^{(j')}\sigma_z^{(j)}$ $(j \neq j')$.

① $(Z^{(j)})^2 = 1.$ $(X^{(j)})^2 = 1.$

② $Z^{(j)}$ 同士は交換する.

③ $X^{(j)}$ 同士も交換する.

④ $Z^{(j)}$ と $X^{(j')}$ は $j' = j$ か $j+1$ のときは反交換. そうでなければ交換.