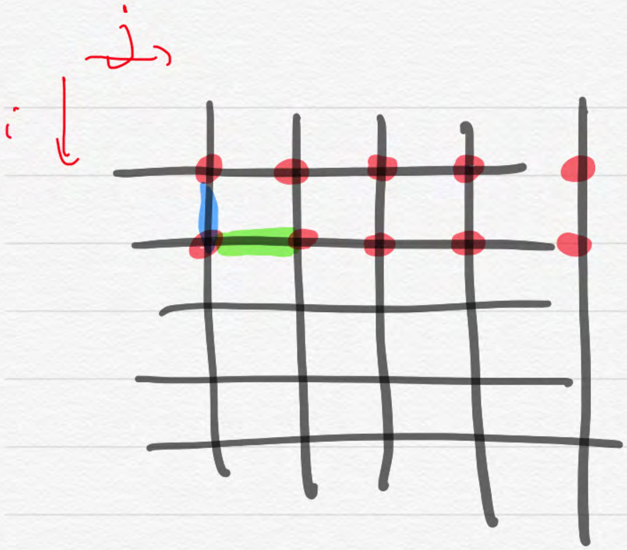


$\boxed{S_{i,j} = \pm 1}$ ↑↓

$$Z(J,J') = \sum_{\{S_{i,j}\}} \prod_{i=1}^{M}\prod_{j=1}^{N} \underbrace{e^{J S_{i,j} S_{i,j+1}}} \underbrace{e^{J' S_{i,j} S_{i+1,j}}}$$

$$e^{J s s'}$$

↑↑ ↓↓ $ss' = +1$ $\quad e^{J}$

↑↓ ↓↑ -1 $\quad e^{-J}$

$$= (2\sinh 2J)^{NM/2} \times \mathrm{tr}\left(\square\ \square\right)^{M}$$

N qubits の状態空間

$$\square = e^{J\sum_{j=1}^{N}\sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)}}$$

$$\square = e^{K\sum_{j=1}^{N}\sigma_x^{(j)}}$$

$\boxed{2^N \times 2^N \text{ の行列}}$

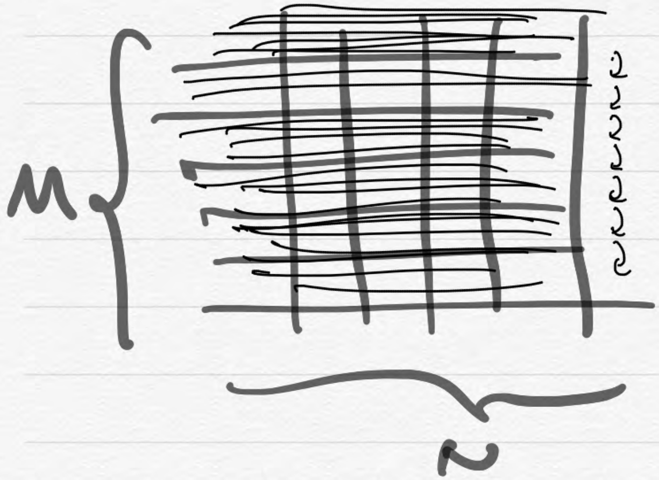
を対角化すればよい。

$\underline{J} := JM$

$\underline{K} := KM$

を固定して

$M \to \infty$ という極限。



というかんじ。

たて方向のみ連続極限をとる。

よこ方向はりさん的なまま。

$$\mathrm{tr}\left(e^{J\Sigma\cdots} e^{K\Sigma\cdots}\right)^M$$

$$= \mathrm{tr}\left(e^{\underline{J}\Sigma\cdots/M} e^{\underline{K}\Sigma\cdots/M}\right)^M$$

鈴木-Trotter公式

$$\lim_{M\to\infty}\left(e^{A/M} e^{B/M}\right)^M = e^{A+B}$$

というのがある。

$\underline{J} = \underline{K}$ が臨界点

$$H = \underline{J}\sum_{j=1}^{N} \sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)} + \underline{K}\sum_{j=1}^{N} \sigma_x^{(j)}$$

を対角化する問題に帰着した！

もとの2次元古典統計力学とかんけいなく

直接1次元量子系としても

興味ぶかいもの。

$$\xrightarrow{\lim_{M\to\infty}} \mathrm{tr}\, e^{\underline{J}\sum\sigma_z\sigma_z + \underline{K}\sum\sigma_x}$$

H

$\|$

$$e^{A/M} = 1 + \frac{A}{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{M}\right)^2 + \cdots$$

$$e^{B/M} = 1 + \frac{B}{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{B}{M}\right)^2 + \cdots$$

$$e^{A/M} e^{B/M} = 1 + \frac{A+B}{M} + O(M^{-2})$$

$$\left(e^{A/M} e^{B/M}\right)^{M} = e^{A+B} + O(M^{-1})$$

$$\downarrow M \to \infty$$

$$\left(\lim_{M\to\infty}\left(1 + \frac{x}{M}\right)^M = e^x\right) \qquad e^{A+B}$$

$$H = J \sum_j \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)} + K \sum_j \sigma_x^{(j)} + K' \sum_j \sigma_z^{(j)}$$

Onsager …

← '50年代, $J=K$ のとき りんかい.

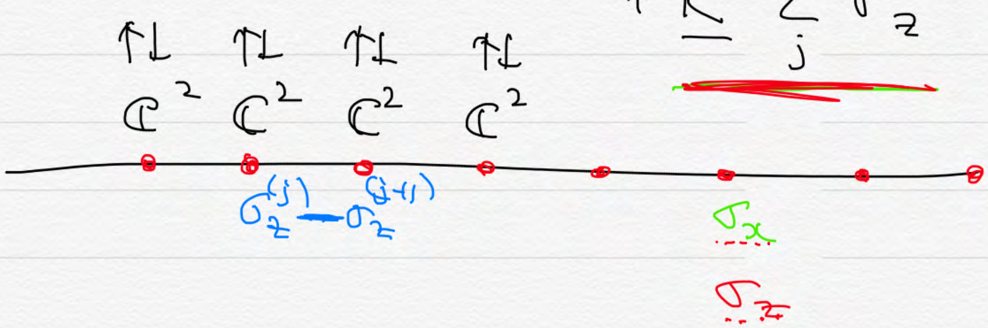
$J=K$ で

← K' を ノーゼロにする

というのを 1990のちょっと前に

Zamolodchikov.

実験的検証が今回でていた。



2次元イジングモデル
↑
古典

↓

1次元のN qubitのspin chain
にかきかえた。
$2^N \times 2^N$ 行列の対角化。 ここまで

↓

$2N \times 2N$ 行列の対角化

↓

2×2 行列の対角化。 これから

次のえんざんし達を考える。

$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots\cdots \quad \psi_{2N}$

全部 エルミート $\psi_a^\dagger = \psi_a$

Ⓐ $\psi_a \psi_a = 1$.（単位行列）

$a \neq b$ なら

Ⓑ $\psi_a \psi_b = -\psi_b \psi_a$

物理ではこれらを

Majorana フェルミオン演算子という。
マヨラナ

数学ではこれらの生成する代数を

実 クリフォード代数という。

$$\psi_a \psi_b + \psi_b \psi_a = 2\delta_{ab}$$

ともかく。

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & (a=b) \\ 0 & (a\neq b) \end{cases}$$

↑
Kroneckerのデルタ.

$N=1$ のとき

$$\psi_1{}^2 = 1 \qquad \psi_2{}^2 = 1 \qquad \psi_1\psi_2 = -\psi_2\psi_1$$

$$\begin{cases} \psi_1 = \sigma_y^{(1)} \\ \psi_2 = \sigma_x^{(1)} \end{cases}$$

qubit 1 に作用

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}}
\qquad
\boxed{\begin{aligned} \sigma_x\sigma_y &= -\sigma_y\sigma_x \\ \sigma_x\sigma_z &= -\sigma_z\sigma_x \\ \sigma_y\sigma_z &= -\sigma_z\sigma_y \\ \sigma_x{}^2 = \sigma_y{}^2 &= \sigma_z{}^2 = 1 \end{aligned}}$$

$N=2$

$$\begin{cases} \psi_3 = \sigma_z^{(1)} \; \sigma_y^{(2)} \\ \psi_4 = \sigma_z^{(1)} \; \sigma_x^{(2)} \end{cases}$$

qubit 2 に作用.

$\psi_2\psi_3 = -\psi_3\psi_2$

となって

ほしい…

↓

$\sigma_z^{(1)}$ を入れる.

$N=3$

$$\psi_5 = \sigma_z^{(1)} \; \sigma_z^{(2)} \; \sigma_y^{(3)}$$

$$\psi_6 = \sigma_z^{(1)} \; \sigma_z^{(2)} \; \sigma_x^{(3)}$$

qubit 3 に作用

一般的には

N qubit 系に対して

$$\psi_{2k-1} = \sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\cdots\sigma_z^{(k-1)}\sigma_y^{(k)}$$
$$\psi_{2k} = \sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\cdots\sigma_z^{(k-1)}\sigma_x^{(k)}$$

とすればよい。これで

$\psi_1\ \psi_2 \cdots \psi_{2N}$ で

$$\psi_a\psi_a = 1$$
$$\psi_a\psi_b = -\psi_b\psi_a \quad (a\neq b)$$

なものが N qubit 系 ($2^N\times 2^N$ 行列)

につくれた。

物理では Jordan-Wigner 変換

とよぶ。

数学では Clifford 代数の

表現 という。

コメント:

これは $\mathrm{Clifford}_{2N}$

一般には $\mathrm{Clifford}_{p,q}$

2N このうち p この2乗が +1

q この2乗が −1.

で 行列/演算子 で

ψ の2次式を考える。

$$(\psi_a\psi_b)^\dagger$$
$$= \psi_b^\dagger\psi_a^\dagger$$
$$= \psi_b\psi_a$$
$$= -(\psi_a\psi_b)$$

$i\psi_a\psi_b$ がエルミート.

$\shortparallel$

$-i\psi_b\psi_a$.

$a=b$ のものは単位行列なので
考えても仕方がない.

$$H = i\sum_{a<b} M_{ab}\psi_a\psi_b$$

一般的な $\boxed{\text{2次のハミルトニアン}}$

$$= \frac{i}{2}\sum_{a\neq b} M_{ab}\psi_a\psi_b$$

$M_{ab} = -M_{ba}$

反対称行列.

$(M_{aa}=0)$

へんかんできる.

重要事実

2次のハミルトニアンは解ける.

例

$N=1$ のとき

$$i\psi_1\psi_2 = \sigma_z^{(1)}$$

固有値は ± 1.

$N=2$ のとき

$$i\psi_3\psi_4 = \sigma_z^{(2)}$$

$\vdots$

$$i\sum_{k=1}^{N} m_k \underbrace{\psi_{2k-1}\psi_{2k}}_{\sigma_z^{(k)}}$$

$$\underbrace{|\uparrow\downarrow\uparrow\cdots\uparrow\downarrow\rangle}_{N}$$ が

固有状態

N qubit

固有値は $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \pm m_k$ ← 2^N コ 固有値.

$$H = \frac{i}{2}\sum_{a,b} M_{ab}\psi_a\psi_b$$ ← $2^N \times 2^N$ 行列.

は変換して

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \tilde{\psi}_{2k-1}\tilde{\psi}_{2k}$$

とできる. ただし

$\{\pm m_k\}$ は M_{ab} の固有値. ← $2N\times 2N$ 行列.

↑ $2N$コの数

⇝ H の固有値は $\sum_{k=1}^{N}(\pm m_k)$.

の 2^N コ.

まず U_{ab} を $2N\times 2N$ の

実回転行列とする.

$$\begin{pmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{pmatrix}$$ ← 各ベクトルの長さが 1. 互いに直交.

$$U^T \cdot U = U \cdot U^T = \mathbb{1}.$$

(${}^T U$ とか ${}^t U$ と書く人もいる...)

$$\tilde{\psi}_s = \sum_a U_{sa}\psi_a$$ とする.

$\vec{\tilde{\psi}} = U\vec{\psi}$ と略記できる.

$\tilde{\psi}_s$ 達は もとの ψ_a と同じ

反交換関係 をみたす.

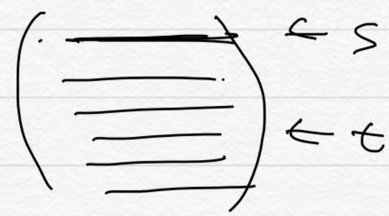
すなわち $\tilde{\psi}_s\tilde{\psi}_s = \mathbb{1}$, $\tilde{\psi}_s\tilde{\psi}_t = -\tilde{\psi}_t\tilde{\psi}_s$, をみたす. なぜなら...

∵ $$\tilde{\Psi}_s\tilde{\Psi}_t + \tilde{\Psi}_t\tilde{\Psi}_s = \sum_{a,b} U_{sa}U_{tb}\underbrace{(\psi_a\psi_b + \psi_b\psi_a)}_{2\delta_{ab}}$$

$$= 2\sum_{a,b} U_{sa}U_{tb}\delta_{ab} \qquad \delta_{ab} = \begin{cases} 1 & a=b \\ 0 & a\neq b \end{cases}$$

$$= 2\sum_{a} U_{sa}U_{ta}$$

$$= 2\delta_{st}.$$



だった。

すると

$$H(M) = \frac{i}{2}\sum M_{a,b}\psi_a\psi_b$$

について

$H(M)$ と $H(U^T M U)$ は同じ固有値をもつ.

∵ $$\boxed{\frac{1}{2}\sum_{a,b} M_{ab}\psi_a\psi_b} \qquad \frac{i}{2}\sum_{\substack{a,b\\ s,t}} \underbrace{\psi_a U_{as}}_{\tilde{\Psi}_s} M_{st} \underbrace{U_{tb}\psi_b}_{\tilde{\Psi}_t} = \boxed{\frac{i}{2}\sum_{s,t} M_{st}\tilde{\Psi}_s\tilde{\Psi}_t}$$

同じ固有値.

//

M_{ab} : 実 $2N\times 2N$ 反対称行列.

U をうまくとって

$$U^T M U = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & m_1 \\ -m_1 & 0 \end{matrix} & & & & \\ & \begin{matrix} 0 & m_2 \\ -m_2 & 0 \end{matrix} & & \bigcirc & \\ & & \begin{matrix} 0 & m_3 \\ -m_3 & 0 \end{matrix} & & \\ & \bigcirc & & \ddots & \\ & & & & \begin{matrix} 0 & m_N \\ -m_N & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

とできる。但し $\pm m_i$ は M_{ab} の固有値. ← あとは これを 示せばよい.

これを示すまえに、これをみとめると

$$H(U^T M U) = \frac{i}{2}\sum \tilde{\varphi}_a (U^T M U)_{ab} \tilde{\varphi}_b$$

$$= i\sum_{k=1}^{N} m_k \tilde{\varphi}_{2k-1}\tilde{\varphi}_{2k} \Rightarrow \text{固有値は} \sum_{k=1} \pm m_k \quad //$$

☺ M_{ab}：実反対称.

$$(iM)^\dagger = -iM^T = +iM$$

より iM はエルミート.

実固有値、ベクトルが とれる. 複素かも.

$$\sum_b iM_{ab} w_b^{(k)} = m_k w_a^{(k)}$$ ととる.

共役

$$-\sum_b iM_{ab} \overline{w_b}^{(k)} = -m_k \overline{w_a}^{(k)}$$

⇑

(w_a) が 固有値 m の固有ベクトル

$(\overline{w_a})$ が ―― $-m$ の固有ベクトル.

固有値が $\pm m$ でペアででる.

それを $\pm m_1$ $\pm m_2$ .... $\pm m_N$ とよぶ.

$$U^T M U = \begin{pmatrix} \begin{matrix} & m_1 \\ -m_1 & \end{matrix} & \\ & \ddots \end{pmatrix}$$

$$w_a^{(k)} = u_a^{(k)} + i v_b^{(k)}$$

ふくそ

実 にわける.

⟹

$$M\vec{u}^{(k)} = -m_k \vec{v}^{(k)}$$

$$M\vec{v}^{k} = +m_k \vec{u}^{(k)}$$

$\vec{u}^{(k)}, \vec{v}^{(k)}$ は互いに直交

長さ1 にとれる.

$$U = \begin{pmatrix} \vec{u}^{(1)} & \vec{v}^{(1)} & \vec{u}^{(2)} & \vec{v}^{(2)} & \cdots & \vec{u}^{(N)} & \vec{v}^{(N)} \end{pmatrix}$$

とすると

$$MU = U \begin{pmatrix} \begin{matrix} & m_1 \\ -m_1 & \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} & m_2 \\ -m_2 & \end{matrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

となって 示された。//

はあ疲れた…

イジングモデルの

$$H = J\sum_{j=1}^{N} \sigma_z^{(j)}\sigma_z^{(j+1)} + K\sum_{j=1}^{N}\sigma_x^{(j)}$$

は フェルミオンの2次式にへんかんできる.

$$H' = J\sum_{j=1}^{N} \sigma_y^{(j)}\sigma_y^{(j+1)} + K\sum_{j=1}^{N}\sigma_z^{(j)} = \boxed{K\sum_{k=1}^{N} i\psi_{2k-1}\psi_{2k} + J\sum_{k=1}^{N} i\psi_{2k}\psi_{2k+1}}$$

と等価.

$$\left.\begin{aligned}
\psi_{2k-1} &= \sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\cdots\sigma_z^{(k-1)}\,\sigma_y^{(k)} \\
\psi_{2k} &= \sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\cdots\sigma_z^{(k-1)}\,\sigma_x^{(k)} \\
\psi_{2k+1} &= \sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\cdots\sigma_z^{(k-1)}\,\sigma_z^{(k)}\,\sigma_y^{(k+1)}
\end{aligned}\right\}$$

$$i\psi_{2k-1}\psi_{2k} = \sigma_y^{(k)}\sigma_x^{(k)} = \sigma_z^{(k)}$$

$$i\psi_{2k}\psi_{2k+1} = \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)}$$

これは $\frac{i}{2}\sum M_{ab} t_a t_b$ で…

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & K & & & & & \\ & & -K & 0 & J & & & & \\ & & & -J & 0 & K & & & \\ & & & & -K & 0 & J & & \\ & & & & & -J & 0 & K & \\ & & & & & & -K & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

2k-1, 2k

2k, 2k+1

2k

2k

のとき。

v → 固有ベクトル

$$v = \begin{pmatrix} \vdots \\ a\,e^{-il} \\ b\,e^{-il} \\ a\,1 \\ b\,1 \\ a\,e^{il} \\ b\,e^{il} \\ a\,e^{2il} \\ b\,e^{2il} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

2N要素

Nブロック

$e^{iNl}=1$ を要求

↓

$$\boxed{l = \frac{2\pi s}{N}}$$

要素が周期的 ⇝ 固有ベクトルも周期的だろう…

あとはこのMが対角化できたらおしまい♡

$$iM\vec{v} = \begin{pmatrix} \tilde{a}\,e^{-il} \\ \tilde{b}\,e^{-il} \\ \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{a}\,e^{+il} \\ \tilde{b}\,e^{+il} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

を計算すると

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0, & K - J e^{-il} \\ -K + J e^{+il}, & 0 \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

になる。

ここの固有値；固有ベクトルがわかると

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \underline{K} - \underline{J} e^{-il} \\ -\underline{K} + \underline{J} e^{il} & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & z \\ -\bar{z} & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$l = \frac{2\pi k}{N}$

$k = 1 \cdots N$

固有値は $\pm|z|$.

$\Rightarrow$ M の固有値は

$$\pm m_k = \pm\left|\underline{K} - \underline{J} e^{\frac{2\pi i k}{N}}\right|$$

$k = 1 \cdots N$.

log とって N で割る.

$\Rightarrow$ $H(M)$ の固有値は $\sum_{k=1}^{N} \pm m_k$

$$\Rightarrow \operatorname{tr} e^{H(M)} = \sum_{\underbrace{\pm\pm\pm\cdots\pm}_{N}} e^{\pm m_1 \pm m_2 \cdots \pm m_N} = \prod_{k=1}^{N} \left(e^{+m_k} + e^{-m_k}\right)$$

$$\operatorname{tr} e^{H(M)} = e^{NF(\underline{J},\underline{K})}$$

$$\prod_{k=1}^{N} \left(e^{+m_k} + e^{-m_k}\right) = 2^N \prod_{k=1}^{N} \cosh\left|K - Je^{2\pi i k/N}\right|$$

$$F(\underline{J},\underline{K}) = \log 2 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \log\cosh\left|\underline{K} - \underline{J}\, e^{2\pi i k/N}\right|$$

$$\Big\downarrow \quad N \to \infty$$

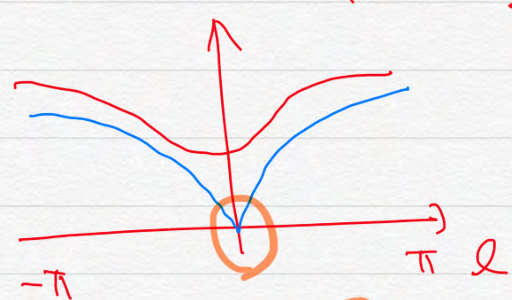
$$= \log 2 + \int_0^{2\pi} \left(\log\cosh\left|\underline{K} - \underline{J}\, e^{-il}\right|\right)\frac{dl}{2\pi}.$$

$$\left|\underline{K} - \underline{J}\, e^{-il}\right| = \sqrt{(\underline{J}-\underline{K})^2 + \underline{J}\,\underline{K}\left(2\sin\frac{l}{2}\right)^2}.$$

$\underline{J} \neq \underline{K}$ なら

$\underline{J} = \underline{K}$ だと

$$\left|2\sin\frac{l}{2}\right|$$



とんがる.

↓

ビブン可能でなくなる.

↓

物理量がいろいろ発散する.