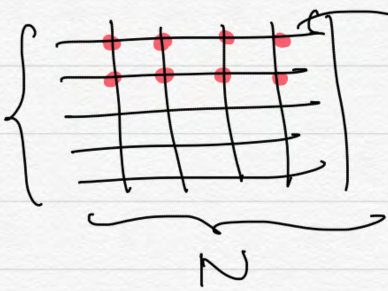
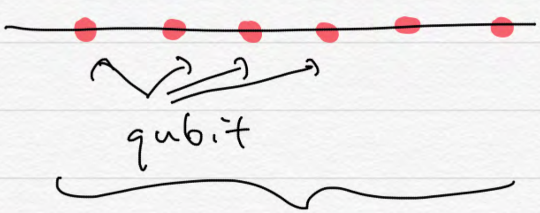
古典 二次元イジング模型



$$\Downarrow$$

量子 一次元イジング模型



$\Leftarrow 2^N$次元の状態空間

$$\boxed{H = -J\sum_j \sigma_y^{(j)}\sigma_y^{(j+1)} - K\sum_j \sigma_z^{(j)}}$$

$2^N \times 2^N$

を対角化すればよい。

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

フェルミオン演算子にかきかえ

$$\Longrightarrow \quad H = \sum i \boxed{M_{ab}} \psi_a \psi_b$$

フェルミオンの二次式

$2N\times 2N$ 行列

$$\Downarrow$$

2×2行列の対角化に帰着。

マヨラナ
フェルミオン演算子

$\psi_a \quad a = 1, \cdots, 2N$

$\psi_a^\dagger = \psi_a$: エルミート

$$\begin{cases} \psi_a \psi_a = 1 \\ \psi_a \psi_b = -\psi_b \psi_a \quad (a \neq b) \end{cases}$$

N qubit 上の実現を考える.

$$\begin{cases} \psi_1 = \sigma_y^{(1)} \\ \psi_2 = \sigma_x^{(1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_3 = \sigma_z^{(1)} \sigma_y^{(2)} \\ \psi_4 = \sigma_z^{(1)} \sigma_x^{(2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_5 = \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_y^{(3)} \\ \psi_6 = \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_x^{(3)} \end{cases}$$

$\vdots$

$$\psi_{2k-1} = \sigma_z^{(1)} \cdots \sigma_z^{(k-1)} \sigma_y^{(k)}$$

$$\psi_{2k} = \sigma_z^{(1)} \cdots \sigma_z^{(k-1)} \boxed{\sigma_x^{(k)}}$$

$$\psi_{2k+1} = \sigma_z^{(1)} \cdots \sigma_z^{(k-1)} \boxed{\sigma_z^{(k)}} \boxed{\sigma_y^{(k+1)}}$$

$$i\psi_{2k-1}\psi_{2k} = i\sigma_y^{(k)}\sigma_x^{(k)}$$

$$= \sigma_z^{(k)}$$

$$i\psi_{2k}\psi_{2k+1} = \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)}$$

$$\rightsquigarrow H = -K\sum i\psi_{2k-1}\psi_{2k}$$

$$-J\sum i\psi_{2k}\psi_{2k+1}$$

となった。

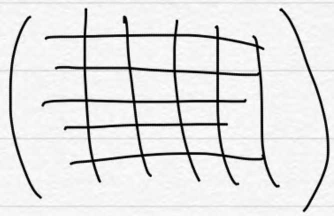
フェルミオンの2次式!

$$H(M) = \frac{i}{2}\sum_{a,b} M_{ab}\psi_a\psi_b$$

$$\vec{\psi} = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{2N}\end{pmatrix} \qquad \parallel \qquad \frac{i}{2}\vec{\psi}^T M \vec{\psi}$$

は　M を対角化したらとける。

U_{sa}：　$2N\times 2N$ の実回転行列．



$\Uparrow$ それぞれの行が長さ1．互いに直交．

$$\psi'_s := \sum_a U_{sa}\psi_a$$

$\Rightarrow$ $\psi_s'\psi_s' = 1$

$\psi_s'\psi_t' = -\psi_t'\psi_s'$　$(s\neq t)$

となる．

$$H(U^T M U) = \frac{i}{2}\underbrace{\vec{\psi}^T U^T}_{\vec{\psi}'^T} M \underbrace{U\vec{\psi}}_{\vec{\psi}'} = \frac{i}{2}\vec{\psi}'^T M \vec{\psi}'$$

同じ固有値をもつ。

$\Updownarrow$

U をうまくえらんで

$U^T M U$ をなるべく

かんたんにすればよい。

かってな反対称な M_{ab}　は

$(M_{ab} = -M_{ba})$

U をうまくえらんで…

$$U^T M U = \begin{pmatrix} \begin{matrix} & m_1 \\ -m_1 & \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} & m_2 \\ -m_2 & \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} & m_N \\ -m_N & \end{matrix} \end{pmatrix}$$

とできる. ただし $\pm m_1, \cdots, \pm m_N$

は iM の固有値.

$$\Rightarrow H(U^T M U) = i \sum_{k=1}^{N} m_k \psi_{2k-1} \psi_{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} m_k \underbrace{\sigma_z^{(k)}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ 固有値は $\pm m_1 \pm m_2 \cdots \pm m_N$ の 2^N コ.

ではイジング模型にもどる：

$$H = -K\sum_i \psi_{2k-1}\psi_{2k} - J\sum_i \psi_{2k}\psi_{2k+1}$$

これを $H(M)$ とおくと

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & K & & & & \\ & -K & 0 & J & & & \\ & & -J & 0 & K & & \\ & & & -K & 0 & J & \\ & & & & -J & 0 & K \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

という行列。

これの固有値（ベクトル）は？

形を仮定

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a\,e^{-il} \\ b\,e^{-il} \\ a \\ b \\ a\,e^{il} \\ b\,e^{il} \\ a\,e^{2il} \\ b\,e^{2il} \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}\,e^{-il} \\ \tilde{b}\,e^{-il} \\ \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{a}\,e^{il} \\ \tilde{b}\,e^{il} \\ \tilde{a}\,e^{2il} \\ \tilde{b}\,e^{2il} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

e^{iln} ベクトルの成分を一周するともとにもどってほしい

$$(e^{il})^N = 1. \Rightarrow l = \frac{2\pi s}{N}$$

$s = 1, \dots, N.$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K - Je^{-il} \\ -K + Je^{il} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を この 2×2行列 の固有ベクトルとして

ここに入れると固有ベクトルになる。

固有値 $\pm m_s = \pm \left| K - Je^{-il} \right|$. $l = \frac{2\pi s}{N}$.

量子 1次元 イジング模型 をフェルミオン化したもの

$$H(M) = -K\sum i\,\psi_{2k-1}\psi_{2k} - J\sum i\,\psi_{2k}\psi_{2k+1}$$

$$= \sum_{s=1}^{N} i\, m_s \tilde{\psi}_{2s-1}\hat{\psi}_{2s}$$

固有値

$$\pm m_1, \pm m_2 \cdots\cdots \pm m_N$$

$$m_s = \left| K - J e^{-i\frac{2\pi s}{N}} \right| = \sqrt{(J-K)^2 + JK\left(2\sin\frac{2\pi s}{N}\cdot\frac{1}{2}\right)^2}.$$

//.

$\boxed{\text{いろいろコメント}}$

ひとつめ　物理では H：ハミルトニアン の固有値は
エネルギー.

エネルギーは低いほうがよくきく。

⟶ 基底状態 (ground state)　$E_0 = -m_1 - m_2 \cdots - m_N$

最低固有値状態 に着目することが必要.

← $-m_1 - m_2 \cdots - m_N$

$$H - E_0 = \left\{\begin{matrix}2m_1\\0\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}2m_2\\0\end{matrix}\right\} + \cdots + \left\{\begin{matrix}2m_N\\0\end{matrix}\right\} = \sum_{s=1}^{N} c_s \cdot (2m_s)$$

$\pm m_1 \pm m_2 \cdots \pm m_N$

0か1.

フェルミオン.

「s番目の状態に 0コか1コ $\boxed{\text{モノ}}$ が入っている」

「この状態には 2コ以上は入らない」 ⇐ パウリの排他律

exclusion principle

フェルミ統計.

statistics

$$\boxed{\begin{matrix}\psi_a\psi_a = 1\\ \psi_a\psi_b = -\psi_b\psi_a\end{matrix}}$$

$(a \neq b)$

$$\boxed{\psi_a\psi_b + \psi_b\psi_a = 2\delta_{ab}}$$

一方で ボゾンというものもある.

$$H - E_0 = \left\{\begin{matrix}\vdots\\3e_1\\2e_1\\e_1\\0\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\vdots\\3e_2\\2e_2\\e_2\\0\end{matrix}\right\} + \cdots + \left\{\begin{matrix}\vdots\\4e_N\\3e_N\\2e_N\\e_N\\0\end{matrix}\right\} = \sum_{s=1}^{N} c_s \cdot e_s$$

0以上のせーすー.

「s番目の状態には 0コ以上任意-せーすー-個の $\boxed{\text{モノ}}$ が入る」

ボゾン.

$\phi_{a=1\cdots N}$ エルミートでない. $\phi_a^\dagger \neq \phi_a$

$$\phi_a\phi_b^\dagger = +\phi_b\phi_a$$

$$\boxed{\phi_a\phi_b^\dagger - \phi_b^\dagger\phi_a = 2\delta_{ab}}$$

特殊相対論 + 量子力学

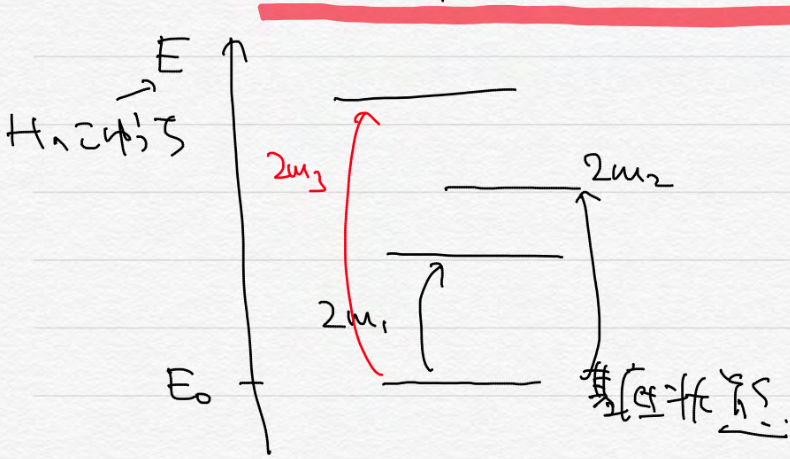
⇓

スピン・統計性定理

360° でもとに戻る粒子 ⇒ ボゾン

720° ではじめてもとに戻る粒子 ⇒ フェルミオン.

$$H - E_0 = \begin{Bmatrix} 2m_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2m_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \cdots \begin{Bmatrix} 2m_n \\ 0 \end{Bmatrix}$$



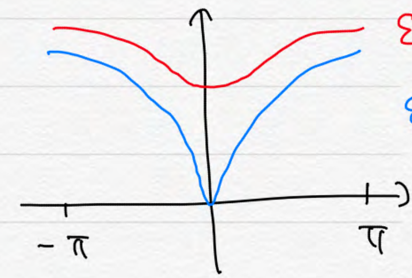
イジングモデル

$$m_s = \sqrt{(J-K)^2 + JK\left(2\sin\frac{l_s}{2}\right)^2} \geq |J-K|$$

$$\sqrt{\varepsilon^2 + \left(2\sin\frac{l}{2}\right)^2} \xrightarrow{\varepsilon=0} \left|2\sin\frac{l}{2}\right|$$

$l_s = \frac{2\pi s}{N}$ $\quad s=1,2,\ldots,N$ $\quad \leftarrow \quad 0\leq l_s<2\pi$

$-\frac{N}{2},\ \cdots 0,\ \cdots +\frac{N}{2} \leftarrow \quad -\pi<l_s<\pi.$

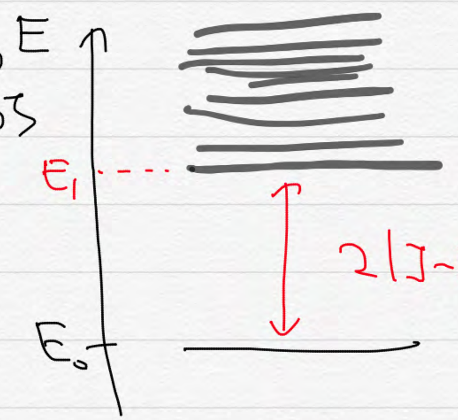


J=K のときが相転移点.

⇝ $m_s = J\left|2\sin\frac{l_s}{2}\right| \sim J\cdot|l_s|$ ← オーダー $\frac{1}{N}$.

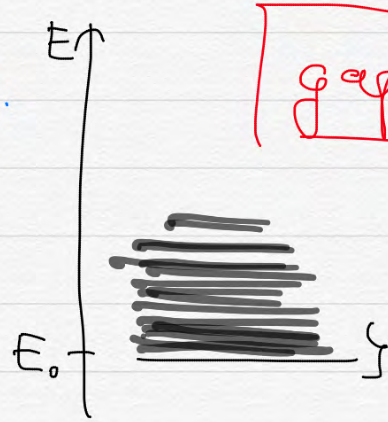
s が小さい ⇝ $\frac{2\pi s}{N}$: とても小さい.

N を大きくする.



gapped

J≠K



gapless

J=K

最近のはってん

$$H = -J\sum_j \sigma_y^{(j)}\sigma_y^{(j+1)} - K\sum_j \sigma_z^{(j)}$$

ここまでさんざんやってた系.

フェルミオンでかきかえると

⇒ free 自由 ← $\boxed{\text{二次} \to \text{とける.}}$

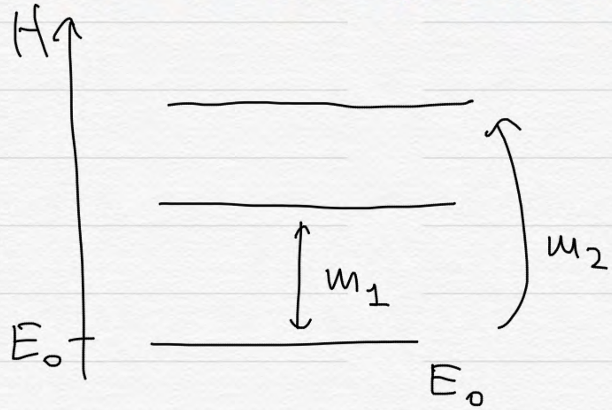
$$-K'\sum_j \sigma_y^{(j)}$$

← フェルミオンでうまくかきかえられなくなる。

free でない (相互作用がある interacting)

この特定のシステムにかんしては $H-E_0$ の下のほうが特定できる.

Hの固有値で (波数がゼロの所に制限したもの)

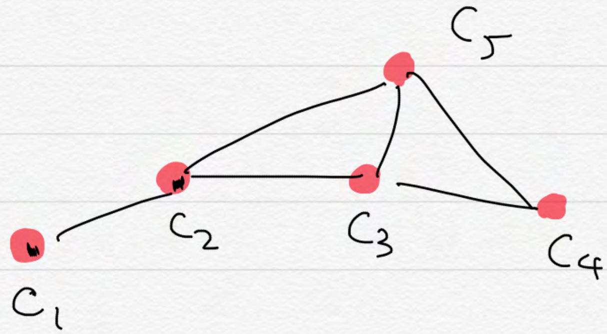


gapped系.

$\frac{m_2}{m_1}$ の比がわかる.

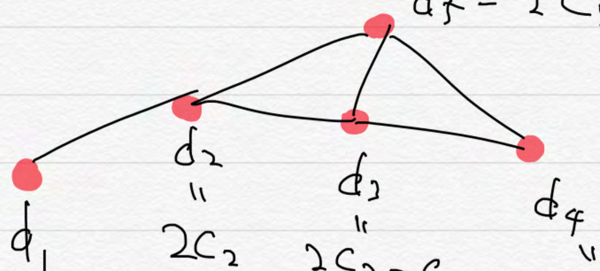
とつぜんですが....

グラフ Γ を考える



$\downarrow M_\Gamma$

$d_5 = 2c_5 - c_2 - c_4 - c_3$.



$d_1 = 2c_1 - c_2$

$d_2 = 2c_2 - c_1 - c_3 - c_5$

$d_3 = 2c_3 - c_2 - c_4 - c_5$

$d_4 = 2c_4 - c_3 - c_5$

$$d_v = 2c_v - \sum c_w$$

wはvにつながっている頂点

で M_Γ の固有値,

固有ベクトルを

考える...

に対する M_Γ の最小固有値は $2\left(1-\cos\frac{\pi}{N+1}\right)$ で、

固有ベクトルは

$\sin\frac{\pi}{N+1}$ — $\sin\frac{2\pi}{N+1}$ — $\sin\frac{3\pi}{N+1}$ — ⋯ — $\sin\frac{N\pi}{N+1}$ である。

$$\sin\frac{N\pi}{N+1} = \sin\frac{\pi}{N+1}$$

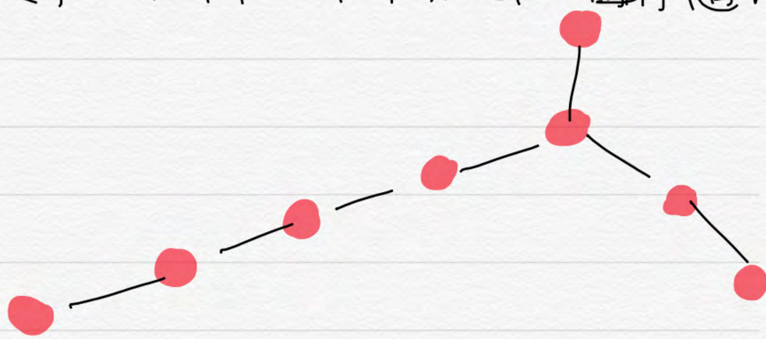
c_k : $\sin\frac{(k-1)\pi}{N+1}$ — $\sin\frac{k\pi}{N+1}$ — $\sin\frac{(k+1)\pi}{N+1}$

d_k :

$$= 2\sin\frac{k\pi}{N+1} - \left(\underbrace{\sin\frac{(k-1)\pi}{N+1} + \sin\frac{(k+1)\pi}{N+1}}_{=\,2\sin\frac{k\pi}{N+1}\cos\frac{\pi}{N+1}}\right)$$

$$= \left(\sin\frac{k\pi}{N+1}\right) 2\left(1-\cos\frac{\pi}{N+1}\right).$$

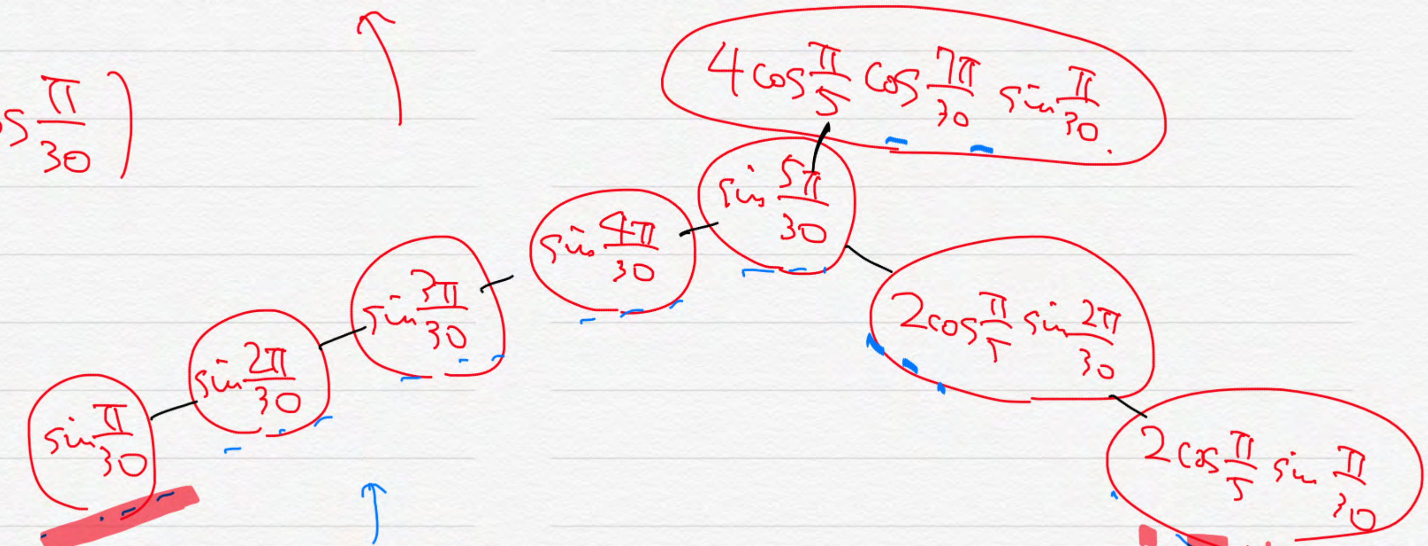
さっきの H のエネルギー固有値は



: E_8

の最小固有値の固有ベクトルで支配されている。(何故???????)

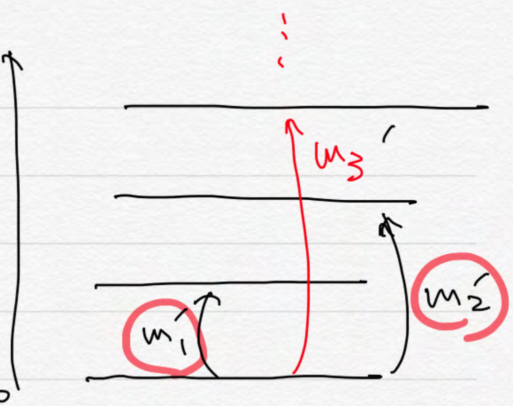
$2\left(1-\cos\frac{\pi}{30}\right)$



小さい順に

$m_1 < m_2 < \cdots < m_8$ とかくと.

H の波数 0 のところの固有値.



⇑

この m_1' m_2' …

が 前回の m_1, m_2 …

と 比例.

一般にグラフ Γ に対して

M_Γ という線形変換を

考えた。

固有値は

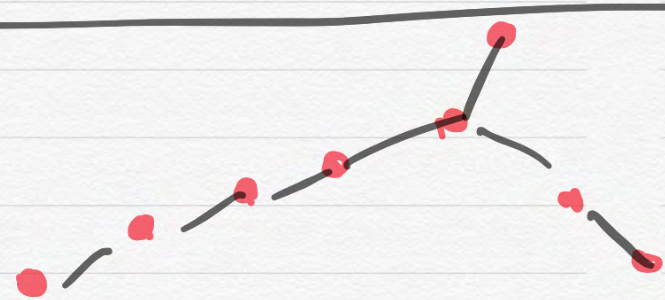
Γ

に対して 全て正.

$$2\left(1-\cos\frac{\pi}{N+1}s\right)$$

$s=1,2,\ldots,N$.

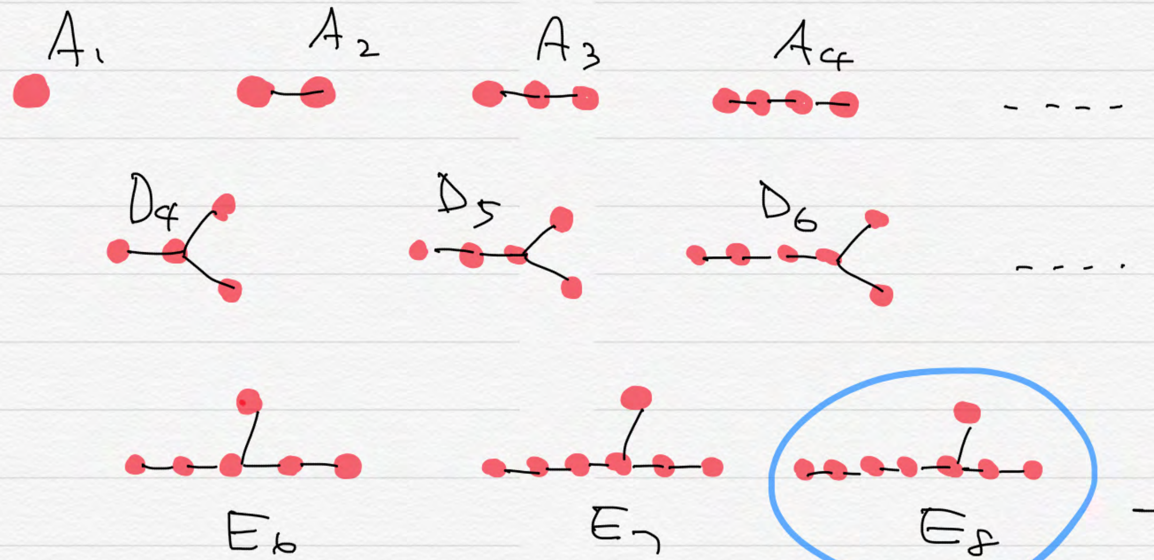
E_8



でも 全て正.

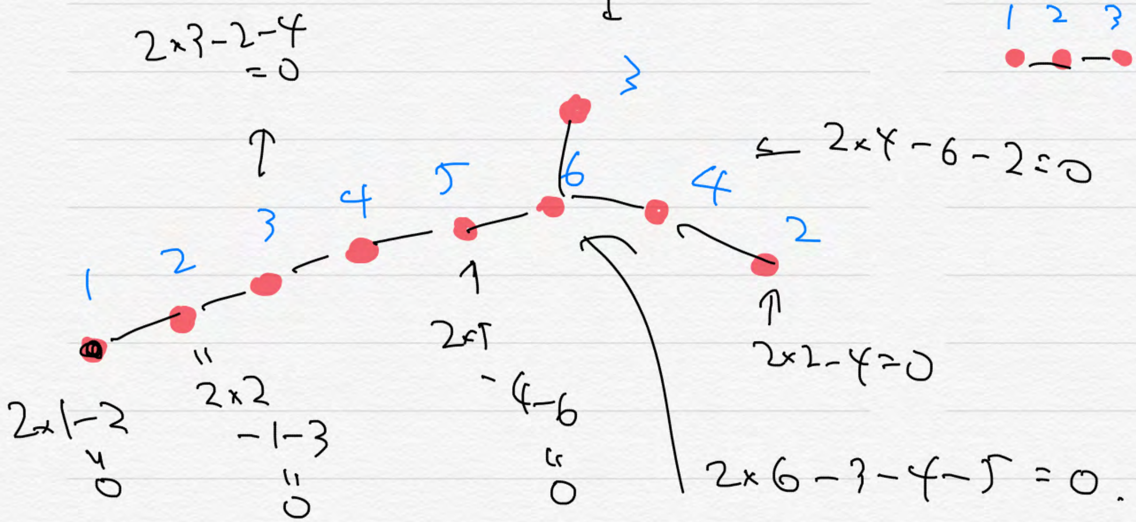
Q. M_Γ の固有値が全て正な Γ は？

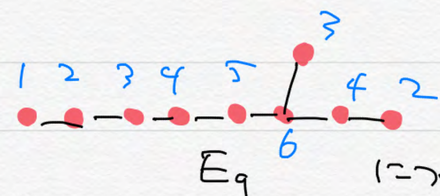
こたえ



無限につづく

うちどめ





E_9 について M_{E_9} を考えると

ゼロ固有値がある

数理的に同様に

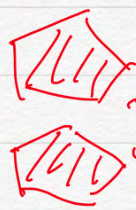
A_n, D_n, E にはで

分類されるものは決ん.

- グラフ のもんだい.
- リー代数の分類.
- 正多面体 とのかんけい.
- 共形場りろんの分類
- 単純特異点. の分類 ...

A_n : 正 n 角形

D_n :



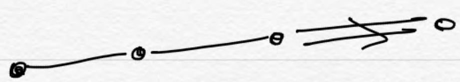
正二面体 , (n+2) 角形

はりあわせる.

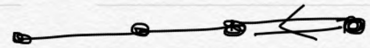
E_6 : 

E_7 : 

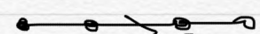
E_8 : 正十二面体
正二十面体



B 型



C 型



F_4

むきつき多重辺ありグラフ Γ
$\rightsquigarrow M_\Gamma$

G_2