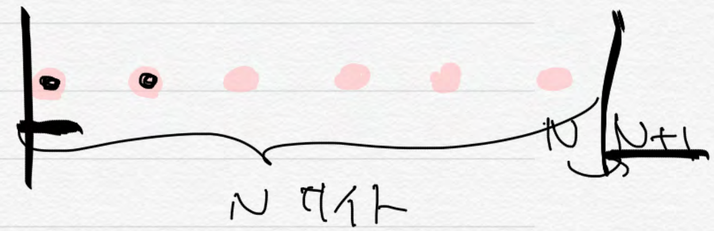
古典2次元イジング模型

↓

量子1次元イジング模型

$$H = -J\sum_k \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} - K\sum_k \sigma_z^{(k)}$$



↓

フェルミオンで書き直す

$$H = -K\sum i\psi_{2k-1}\psi_{2k} - J\sum i\psi_{2k}\psi_{2k+1}$$

↓

フェルミオンの2次式はとける!

$J=K \longrightarrow$ gapless : 臨界点

$J\neq K \longrightarrow$ gapped

$J \leftrightarrow K$ Kramers Wannier 双対性

Kitaev chain / Majorana wire

フェルミオン化したHを
端のあるchainで考える.

$$H = -K\sum_k i\psi_{2k-1}\psi_{2k} - J\sum i\psi_{2k}\psi_{2k+1} = -J\sum\sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} - K\sum\sigma_z^{(k)}$$

$k=1,\cdots,N$; 添字がはみでてた項はないとする. $\cancel{\psi_{2N}\psi_{2N+1}}$

$$\begin{cases} \psi_a\psi_a = 1, \quad \psi_a\psi_b = -\psi_b\psi_a \quad (a\neq b) \\ \psi_a^\dagger = \psi_a \end{cases}$$

$$\boxed{\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\psi_1 = \sigma_y^{(1)}$$
$$\psi_2 = \sigma_x^{(1)}$$
$$\psi_3 = \sigma_z^{(1)}\sigma_y^{(2)}$$
$$\psi_4 = \sigma_z^{(1)}\sigma_x^{(2)}$$
$$\vdots$$
$$\psi_{2k-1} = \sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\cdots\sigma_z^{(k-1)}\sigma_y^{(k)}$$
$$\psi_{2k} = \sigma_z^{(1)}\cdots\sigma_z^{(k-1)}\sigma_x^{(k)}$$

$J \Leftrightarrow K$ 入れかえ $\Leftrightarrow$ 1つずらす

$$i\psi_{2k-1}\psi_{2k} = \sigma_z^{(k)}$$
$$i\psi_{2k}\psi_{2k+1} = \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)}$$

-1

$\Downarrow$

$K \Leftrightarrow J$ 入れかえは bulk (中身) はかえないが…
boundary (境界) ははげしくかえうる.

$J > K$ ---> $J \neq 0,\ K = 0$

$J < K$ ---> $J = 0,\ K \neq 0$

こちらから考える.

$$H = -K \sum i f_{2k-1} f_{2k} = -K \sum_j \sigma_z^{(j)}$$

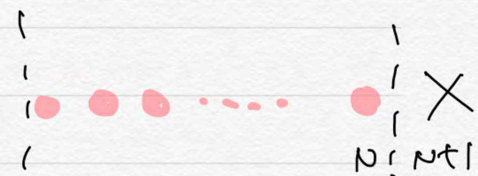
こいつら ± 1

固有値は

$$-K(\pm 1\ \pm 1\ \pm 1\ \cdots\ \pm 1)$$

最低固有値は 唯一. ユニーク. 非退化 非縮退.

$$H = -J \sum i f_{2k} f_{2k+1} = -J \sum_{k=1}^{N-1} \sigma_y^{(k)} \sigma_y^{(k+1)}$$



$$\updownarrow$$

$$-J \sum_{k=1}^{N-1} \underline{\sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)}}$$

最低エネルギー状態

$$\left\{ \begin{array}{l} |\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \cdots\cdots \uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \cdots\cdots \downarrow\rangle \end{array} \right.$$

2つある!

$\Leftarrow$ $-\sigma_z^{(1)} \quad \sigma_z^{(2)}$

$\pm 1 \quad \pm 1$

$\lvert\uparrow\uparrow\rangle$	$-(+1)$
$\lvert\uparrow\downarrow\rangle$	$-(-1)$
$\lvert\downarrow\uparrow\rangle$	$-(-1)$
$\lvert\downarrow\downarrow\rangle$	$-(+1)$

エネルギー低い.

エネルギー高い.

$$H = -J \sum_{k=1}^{N-1} \psi_{2k}\psi_{2k+1}$$

ψ_1, ψ_{2N}があらわれない。

$$= -J(\psi_2\psi_3 + \psi_4\psi_5 + \cdots + \psi_{2N-2}\psi_{2N-1})$$

$$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{2N-1}, \psi_{2N}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H\psi_1 = {}^{+}\psi_1 H \\ H\psi_{2N} = {}^{+}\psi_{2N} H \end{cases}$$

$$\psi_a\psi_b = -\psi_b\psi_a \quad a \neq b$$

$$(\psi_a\psi_b)\psi_c = +\psi_c(\psi_a\psi_b) \quad a \neq b \neq c \neq a.$$

$$\underset{\text{えんざんし}}{H}\,|\Psi\rangle = \underset{\text{かず}}{E}\,|\Psi\rangle$$

$$H(\underbrace{\psi_1|\Psi\rangle}_{2N}) = \underbrace{\psi_1 H|\Psi\rangle}_{2N} = \underbrace{\psi_1}_{2N} E|\Psi\rangle = E(\underbrace{\psi_1|\Psi\rangle}_{2N}).$$

特に Eを最低エネルギーとすると.

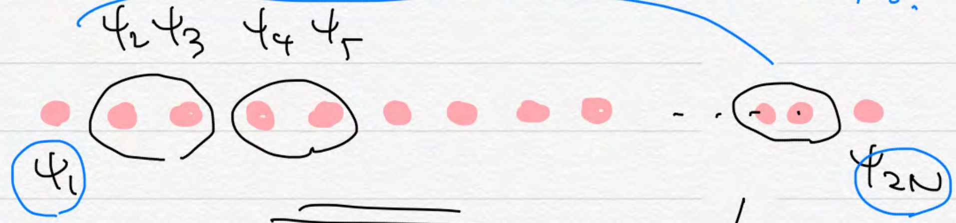
$$\boxed{\begin{aligned} \psi_1{}^2 = \psi_{2N}{}^2 = 1 \\ \psi_1\psi_{2N} = -\psi_{2N}\psi_1 \end{aligned}}$$

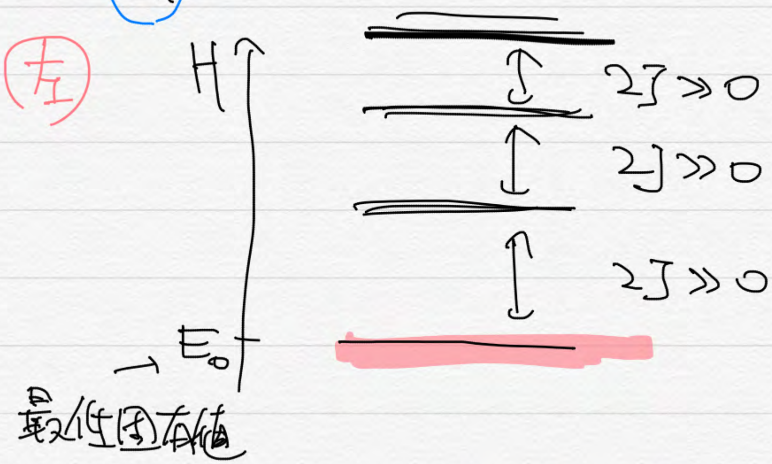
$|\Psi\rangle$, $\psi_1|\Psi\rangle$ } 両方最低エネルギー.

$\psi_{2N}|\Psi\rangle$ も。

$\Rightarrow$ 最低エネルギー状態は少なくとも2次元あって, そこに $\psi_1 \sim \sigma_y$, $\psi_{2N} \sim \sigma_z$ として作用.

とっても長いとする。





手持ちのエネルギーでは
アクセスできないぐらい
J が大きいとする。

← ここしかさわれない。

2次元あって。

ψ_1, ψ_{2N} が作用。

σ_y 　 σ_x

とってもとっても
離れたベジョに
あるとってもよい

それぞれ別の $\boxed{\text{部分量子系となると思いたい}}$。

同じ次元 $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_{左} \\ \mathcal{H}_{右} \end{array} \right\}$ 部分系のヒルベルト空間がある？

$\dim \mathcal{H}_{右} = \dim \mathcal{H}_{左} = \sqrt{2}$.

全体の状態空間 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{左} \otimes \mathcal{H}_{右}$

② $\Rightarrow \dim \mathcal{H} = (\dim \mathcal{H}_{左})^2$

ひかく:

エンタングル状態：

$$\mathcal{H}_{全} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

$$|\Psi\rangle \neq |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$$

今の状況.

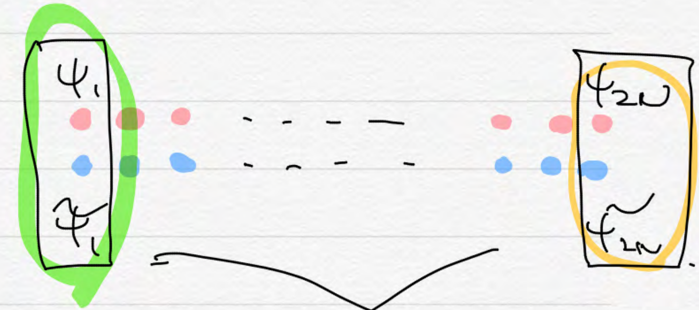
$$\mathcal{H}_{全} \neq \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

この性質は非常にrobust

⇒ 境界の ψ_1, ψ_{2N} は なかなか消せない.

トポロジカルな理由で存在.

$$H = -J(\psi_2\psi_3 + \cdots + \psi_{2N-2}\psi_{2N-1})$$
$$-J(\tilde{\psi}_2\tilde{\psi}_3 + \cdots + \tilde{\psi}_{2N-2}\tilde{\psi}_{2N-1})$$



最低エネルギー状態に作用

$$\psi_1 = \sigma_x^{(1)}$$
$$\tilde{\psi}_1 = \sigma_y^{(1)}$$

qubit 1 に作用

$$\psi_{2N} = \sigma_z^{(1)}\sigma_x^{(2)}$$
$$\tilde{\psi}_{2N} = \sigma_z^{(1)}\sigma_y^{(2)}$$

qubit 2 に作用.

このがんじょうさは、同じチェーンを2つとってくると消えてしまう.

Hに項を追加

$$\begin{cases} \boxed{-i\psi_1\tilde{\psi}_1} = \sigma_z^{(1)} \\ \boxed{-i\psi_{2N}\tilde{\psi}_{2N}} = \sigma_z^{(2)} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}_{全} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$ に分解.

⇒ 四状態のエネルギーが

$\pm\varepsilon \pm\varepsilon$ に分解

⇒ 最低エネルギー状態は -2ε の

1つだけになる。

⇒ $\boxed{\text{Kitaev chain 2つにはトポロジカルに保護された境界のフェルミオンはない。}}$

$\mathbb{Z}_2$ という群をなす。

⇑

$1 + 1 \sim 0$

$J>K$ の Kitaev chain　　$J>K$ の Kitaev chain

$0 + 0 \sim 0$

$0 + 1 \sim 1$

$1 + 0 \sim 1$

1次元の量子フェルミオン系

（で 特定の対称性をもつもの）

で gap があるものは

大きく 2 種に分類できる。

"0" ⇐ —— 境界にトポ保護されたフェルミオンがない。　例 $J<K$

"1" ⇐ —— 〜 ある。　$J>K$

1次元量子フェルミオン系で
gap ありのものは
大きく分類すると
$\mathbb{Z}_2$ という群になる。

↑
トポロジカル絶縁体の周期表の
エントリのひとつ.

これが ここ数年 数学の
ボルディズム群 というものと
関係があるとわかってきた。

代数トポロジー
代数キカ

かなり違う分野.

トポロジー.
ぐにゃぐにゃ曲げても同じと思う.

2次元面は 同相
向きづけ可能

穴 n,
n でわかである.

もっと荒い分類をする.

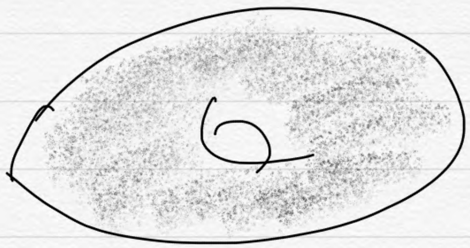
同境. ボルダント.

$M_d \sim M_d'$ とは

何か $(d+1)$ 次元多様体があって
その境界の片方が M_d,
もう片方が M_d'.

⇒ 勝手な（向きづけ可能な）2次元面は

空集合 と ボルダント.



M_d : ドーナツの表面

M_d' : ϕ : 空集合

N_{d+1} : ドーナツの中身

($S^2/\mathbb{Z}_2$  は

向きがないが

空集合とボルダントでない。)

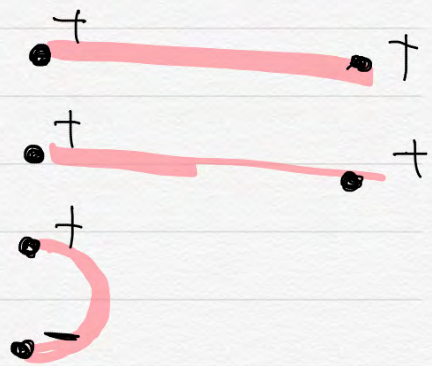
同様に

勝手な1次元面＝曲線は

空集合とボルダント.

円周いくつかと同相

0次元のむきつき面



例1 〜 例2

ボルダント

+の点と−の点は対消滅できる.

〜〉 0次元の向きつき多様体は

ボルダントなものを同じと思って

$\cdots, \bar{\bullet}\bar{\bullet}, \bar{\bullet}, \phi, \overset{+}{\bullet}, \overset{+}{\bullet}\overset{+}{\bullet}, \cdots$

$\Omega^{\text{向きつき}}_{d=0} = \mathbb{Z}$ ：せーろー．

$\Omega^{\text{向きつき}}_{d=1} = 0$

$\Omega^{\text{向きつき}}_{d=2} = 0$

$\Omega^{\text{むきつき}}_{d=3} = 0$

$\Omega^{\text{むきつき}}_{d=4} = \mathbb{Z}$

$\Omega^{\text{むきつき}}_{d=5} = \mathbb{Z}_2 \leftarrow$ 5d つぶせない．

同じものを2つとる 5d 5d つぶせる．

これだけだと <u>フェルミオンは</u> あつかえない．

360° まわすと −1倍

720° まわしてはじめて もとに戻る．

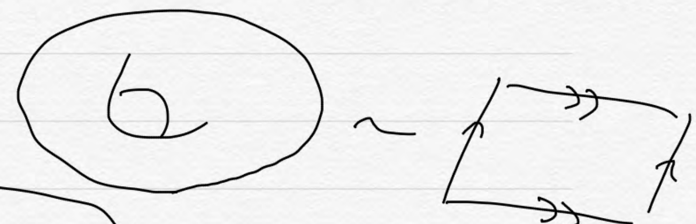
空間上でフェルミオンを考えるには

空間のまがり方が 360° まわっているか

720° まわっているか区別して

やらないといけない．

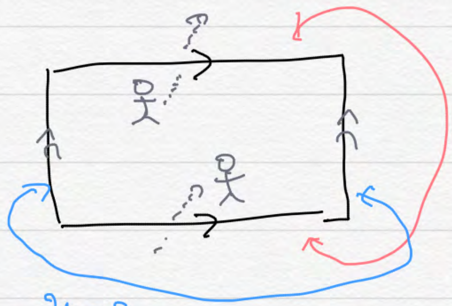
これをスピン構造という。



むきつき曲面としては

一種類．

スピン曲面としては4種ある.



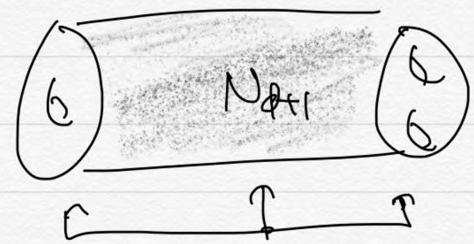
はる際に
360°まわったか
0°=720°まわったか
区別しないといけない.

360°か
0°か
の区別.

2×2=4とおりある.

スピンボルディズム.

M_d — M_d'



スピン構造を
指定

360°まわっている spin 円周は
空集合と spin bordant
だが
まわってない spin 円周は
空集合と spin bordant
でない.

なぜか？

円周

はる際に
360°まわったか
まわってないかを
指定する.

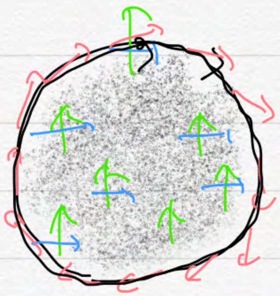
スピン一次元円周は
2種類ある.

M_d' : 空集合.

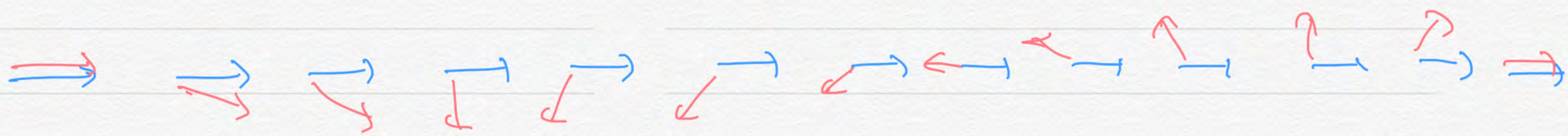
M_d : 円周 ← の座標系は360°まわっている.

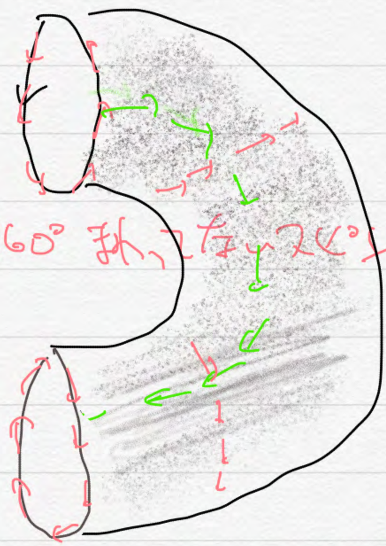
$\boxed{N_{d+1} : 円板}$ ← の座標系に対し

スピン構造は唯一.



⇒ スピン円板のまわりの円周のスピン構造は自動的に360°まわっているもの.





360°まわってないスピン円周.

$\boxed{スピン円周で360°まわっていないもの}$ ← "1"

を2つとってくると

空集合と bordant
^spin.

$$\left.\begin{aligned} 1 &\not\sim 0 \\ 1+1 &\sim 0 \end{aligned}\right\} \mathbb{Z}_2 \text{という群になる.}$$

同様に

は 4通りスピン構造がある.

どちらも360°まわっていないもの ="1"

は 空集合とspin bordantでない.

が 2つもってくると 空集合と ― である.

$1 \nsim 0$

$1+1 \sim 0$

勝手な2次元スピン構造つき面は

1か0とspin bordant.

$\mathbb{Z}_2$

$\Omega^{spin}_{d=0} = \mathbb{Z}$: 点の数

$\Omega^{spin}_{d=1} = \mathbb{Z}_2$

$\Omega^{spin}_{d=2} = \mathbb{Z}_2$ Kitaev chain

$\Omega^{spin}_{d=3} = 0$

$\Omega^{spin}_{d=4} = \mathbb{Z}$

$\Omega^{spin}_{d=5} = 0$

$\vdots$

なぜこれが Kitaev chain とか
トポロジカル絶縁体 etc と
かんけいあるか？

量子 d 次元フェルミオンあり
gapped. bulk の基底状態が
唯一
の分類

=
等価!!

(d+1) 次元 spin bordism 群
の分類

Kitaev chain
d=1.

d+1=2.

対称性クラスを
いろいろかえる

ボルディズムの
微妙にことなる
バージョンになる.

なぜか？

量子 d 次元系 $\Leftrightarrow$ 古典 (d+1) 次元系 を (d+1) 次元の空間
M_{d+1}. 上で考える.

Kitaev chain : $d=1$

↳ $d=2$ の イジング模形 のフェルミオン版、を トーラス上で考える。

M_{d+1}

いま 系 S を考える

$$\frac{Z_S(M_{d+1})}{|Z_S(M_{d+1})|}$$: 絶対値 1 の複素数 $\sim U(1)$

M_{d+1} ‥ f_S

$M_{d+1} \sim M_{d+1}'$: spin bordant なら

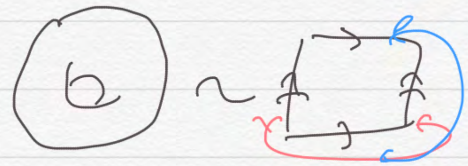
⇓

$$f_S(M_{d+1}) = f_S(M_{d+1}')$$

: 分配関数の位相部分は同じ.

$f_S : \Omega^{spin}_{d+1} \longrightarrow U(1)$ の 準同型になる.

$\Longrightarrow$ S の分類を荒く行って Ω^{spin}_{d+1} の分類に帰着する.



両方とも 360° まわってない トーラス. X_2

$$\frac{Z_S(X_2)}{|Z_S(X_2)|} = \pm 1$$

$+1$ が 境界に fermion の いないもの

-1 が 境界に fermion が いるもの.