現代物理学(2020)第四回
講義スライド

2020年5月1日

- 今回はスライドをみせて進めてみます。
- 黒板で講義をするより進行が速くなりがちで、
ついて行けないことがしばしばあります。
- 黒板は講師の書く速度が律速になりますから、
とんでもなく速くはならないですから...
- 来週は黒板で(というか iPad に書くのを zoom で共有して)
やってみようと思います。

- ちなみに、研究者になって研究会に参加すると、
  理論物理だとたいていスライド
  数学だとまだまだ黒板
  弦理論だと稀にまだ黒板
が使われます。

- 今日の講義は古い数学の話です。
  (現代でもなければ物理でもない...)
- 実数 $\mathbb{R}$ と複素数 $\mathbb{C}$ については皆さん聞いた事がある。
- 今日は四元数 $\mathbb{H}$ と八元数 $\mathbb{O}$ について学びましょう。
- 今回のネタ本は

  エビングハウス、ヘルメス、ヒルツェブルフ、ケッヒャー、
  マインツァー、ノイキルヒ、プレステル、レンメルト共著
  「数」(上,下)
  シュプリンガー東京

  です。原書はドイツ語。英語版が Numbers という
  タイトル。図書館の ebook ライブラリにもあります。
  興味のある方は ebook の家からのアクセス練習でやってみよう。
  日本語版の古本は各巻 700 円ぐらい。

実数 $\mathbb{R}$

- $\boldsymbol{\pi = 3.14159265\ldots}$ とか。
- 英語では real number という。
- 実数の集合は通常 blackboard bold を用いて $\mathbb{R}$ と書く。
- real というけれど、数学的にはなかなか難しいもの。
  大学一二年の数学で丁寧に習う/習った人もいるでしょう。

例えば: 実数は数え上げられない。(非加算、uncountable)

証明: もし可能だとして、$A_1, A_2, A_3, \ldots$ と順にならべる。
それを十進で表記して

$$\begin{array}{llllllll}
A_1 = X_1 & . & \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
A_2 = X_2 & . & a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
A_3 = X_3 & . & a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} & \cdots \\
A_4 = X_4 & . & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boxed{a_{44}} & \cdots
\end{array}$$

とする、ただし X_n は整数部分で、a_{nk} は 0 から 9 とする。そこで

$$B = 0.b_1 b_2 b_3 b_4 \cdots$$

という実数を考える、ただし b_n は 0 から 8 の数で a_{nn} と異なるものをとる。

B は A_n と小数 n 桁目が異なるので A_n と異なる。
よって B は A_n のどれでもない。これは仮定に矛盾する。

- 物体の座標を実数みっつ (x, y, z) であらわすというけれど、
小数点以下無限精度で測れないわけだし、
人類の歴史は有限だから実験だって高々有限回しかできない。
宇宙が滅びず、文明も滅びないとしても、
高々数えられるぐらいしか出来ないでしょう。
- 座標を実数であらわす、という時点で、
非常識な理想化をしていることに注意。
- まあしかし、この講義では実数の常識的な性質については
知っているものとする。

複素数 $\mathbb{C}$

- 英語では complex number といい、その集合を $\mathbb{C}$ と書く。
- $z = a + bi$, ただし $a, b \in \mathbb{R}$,
  i は虚数単位で $i^2 = -1$ をみたすもの。
- 実数の二乗は $a^2 \geq 0$ をみたすので、
  i は虚 (imaginary) と呼ばれた。

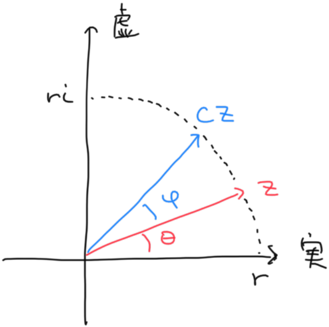
- でも前項で述べたように、無限桁精度を持つ実数も十分 imaginary。
- 技術的用語は歴史的要因で決まっていて、
  日常言語における意味で考えようとしてはいけない。
- 用語が指す意味は論理的に考えてわかるわけでもない。
  定義を教科書か辞典でしらべるしかない。

- (「古典力学は実数しかつかわないから普通で、量子力学は虚数を使うから変」と非専門家向けの解説に書いてあることが
  時々あるが、僕は賛成しない)

- 業界によっては虚数単位は i と書かない。
  電流の i と衝突するので、
  電流を i、虚数単位を j と書く分野もあるそうです。
- 僕の分野はむしろ電流を j、虚数単位を i と書く。

- 和 $\sum_i$ の添え字 i と衝突するので、
虚数単位を $\mathbf{i}$ と書くこともある。
- まあ理論物理の論文では $\sum_i ia_i$ と書いて平然と片方は虚数単位で片方は添え字だったりしますが。
- $\sum_{i=1}^{N} i$ は Ni なのか $N(N-1)/2$ なのか...
- 数学では(理由は分かりませんが) i を
そもそも使わない分野は多く、
そういう分野ではいつもあからさまに $\sqrt{-1}$ と書く。
- まあどれが正しいというわけではない。
記法の背後にある事実を学びましょう。
- 閑話休題。

- 複素数は極座標で $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とも書ける。
- $c = \cos\varphi + i\sin\varphi$ を掛けると加法定理より
  $cz = r[\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta)]$
- $|c| = 1$ なる複素数の掛け算は複素平面の回転を引き起こす。



- 高校でやったはず? (指導要領はどんどん変わるし、
  僕は昔のことは覚えていないので...)

詳しく書くと

$$
\begin{aligned}
&(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
=&(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi) \\
=&\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)
\end{aligned}
$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と書くと単に

$$
e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}
$$

- 何故 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$?
- これも e^x や $\cos\theta, \sin\theta$ をどう定義するかによる。
- 高校ではそれぞれどう定義しているんでしたっけ?

- 大学一年の数学でおそらく一般の z に対して

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

が収束してよく定義され、

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

が示される。そうして $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を

$$e^{i\theta} =: \cos\theta + i\sin\theta, \qquad e^{-i\theta} =: \cos\theta - i\sin\theta$$

で定義。
- すると $e^{z+w} = e^z e^w$ から三角関数の加法定理が導かれる。

具体的には

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} \cdots \\
&= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots) \\
&\quad + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots)
\end{aligned}
$$

で、$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ だったから

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots \\
\sin\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots
\end{aligned}
$$

- 高校での **cos**、**sin** の導入とそこでの加法定理との証明と、
  今の議論の関係はなんでしょう?
- 出発点は異なるが、得られる結果は同じ。

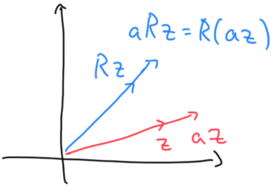
- (色々導出できる一般的な出発点が重要なのでしょうか?
  それとも得られた色々な結果が重要なのでしょうか?
  物理でも、いろいろな現象のもととなる原理はひとつと限らず
  複数あるかもしれず、実際そういうことがあります。
  だから、あまり物理を学ぶ際に何故こういう原理なんだろう? と
  悩まないほうがいい気が僕はします。
  導出された現象が現実と一致するのが原理を正当化するので、
  純粋理性では原理の正しさはわかりません。)

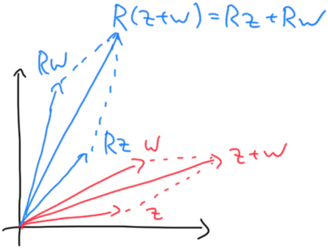
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ の掛け算が回転になることを別の観点から考えてみる。

- 二次元の回転 $z \mapsto R(z)$ は実線形変換である、すなわち

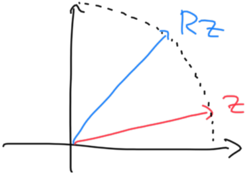
$$R(az) = aR(z), \qquad R(z+w) = R(z) + R(w)$$

ただし a は実数。





- 二次元の回転は長さを保つ、すなわち $|R(z)| = |z|$



- 複素数 c に対して、$z \mapsto cz$ は実線形変換である

$$c(az) = a(cz), \qquad c(z + w) = cz + cw$$

- また掛け算の絶対値は絶対値の掛け算になる

$$|cz| = |c||z|$$

  ので、$|c| = 1$ ならば

$$|cz| = |z|$$

  となる。

- 長さを保つ実線形変換は(向きを保てば)回転。

- よって、$|c| = 1$ なる複素数による掛け算は
  複素平面の回転になる。
- そのような複素数は $c = \cos\theta + i\sin\theta$ と書ける。
- $c = \cos\theta + i\sin\theta$ による掛け算のことを
  角度 θ の回転と「定義する」。

- 重要な関係式は

$$c(az) = a(cz), \quad c(z+w) = cz + cw, \quad |c||z| = |cz|.$$

- 一つ目は $a\cdot$ と $c\cdot$ との交換則、
- 二つ目は分配則。
- 三つ目についてさらに考えてみる。$z = a + bi$ と書くと

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- $z = a + bi, w = p + qi$ とすると $|z||w| = |zw|$ は

$$(a^2 + b^2)(p^2 + q^2) = (ap - bq)^2 + (aq + bp)^2$$

ということ。両辺を闇雲に展開すれば確認できる。
- 別の方法として、$|z|^2 = z\bar{z}$ を思い出す。
ただし $z = a + bi$ に対し $\bar{z} = a - bi$。
- これは $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ をみたす。
- すると

$$|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2.$$

- 二次元の回転が絶対値 $\mathbf{1}$ の複素数の掛け算であらわせたのは、

$$\boldsymbol{(a,b) \leftrightarrow z = a + bi}$$
$$\boldsymbol{(p,q) \leftrightarrow w = p + qi}$$

  という同一視をすると $\boldsymbol{|zw| = |z||w|}$ が成り立つことが重要だった。

- 三次元の回転も

$$\boldsymbol{(a,b,c) \leftrightarrow u = a + bi + cj}$$
$$\boldsymbol{(p,q,r) \leftrightarrow v = p + qi + rj}$$

  という同一視をして、$\boldsymbol{j}$ に関する計算則をうまく決めて、$\boldsymbol{|uv| = |u||v|}$ が成り立つようにすれば出来るのではないか、と思った人がいた。

四元数 $\mathbb{H}$

それを考えたのが Hamilton。彼自身の息子に送った回想によると:

> *Every morning in the early part of the above cited month, on my coming down to breakfast, your (then) little brother, William Edwin, and yourself, used to ask me, "Well, papa, can you multiply triplets?" Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: "No, I can only* ***add*** *and* ***subtract*** *them".*

(http://books.google.com/books?id=9j8MAQAAIAAJ&pg=PA46 より)

もうちょっと文献を探すと、この会話をしたのは息子が9歳だかのときということがわかる。

1843年10月16日、Hamilton は散歩中に決定的なアイデアをひらめき、近くの橋に結果の公式を刻んだ。

https://en.wikipedia.org/wiki/Broom_Bridge

https://www.geograph.org.uk/photo/347941

三つの数字

$$\boldsymbol{(a, b, c) \leftrightarrow a + bi + cj}$$

は長さを保って掛けられないが、
四つの数字

$$\boldsymbol{(a, b, c, d) \leftrightarrow a + bi + cj + dk}$$

なら長さを保って掛けられる。

ただし、

$$\boldsymbol{i^2 = j^2 = k^2 = -1}$$
$$\boldsymbol{ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j}$$

とする。

$\boldsymbol{a, b, c, d}$ を実数として、

$$\boldsymbol{q = a + bi + cj + dk}$$

の形の数を四元数 (quaternion) という。

(qua**r**ternion ではないので注意。)

四元数全体は Hamilton を敬して $\mathbb{H}$ と書く。

($\mathbb{Q}$ は有理数。)

計算ルールは

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

だから

$$q = a + bi + cj + dk, \qquad q' = a' + b'i + c'j + d'k$$

に対して

$$\begin{aligned} qq' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i + \\ (ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k. \end{aligned}$$

計算ルールは

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

$ij = -ji = k$ だから $ij \neq ji$。すると

$$q = a + bi + cj + dk, \qquad q' = a' + b'i + c'j + d'k$$

に対して一般には $qq' \neq q'q$.

交換法則 (commutativity) は一般には成り立たない。

四元数 $q = a + bi + cj + dk$ と実数 r に対しては

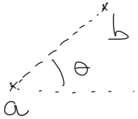
$$qr = rq$$

なので、一部の特殊な交換法則は成り立つ。

算数教育で、掛け算の順序問題ってありますよね。支持派の人で、交換法則の成り立たない代数系があるから... とかいう人がいますが。

頂点作用素代数 (vertex operator algebra, VOA) では、右から掛ける、左から掛ける、だけでなく、掛け算に方向がある。

$a_\theta b :=$



だから

$$a_0 b = ab, \qquad a_{180^\circ} b = ba.$$

こういうのを掛け算順序支持派の人に教えないように！

日本だから縦書きにしなさいとかいいはじめるかもしれません。

三つの四元数

$$
\begin{aligned}
q &= a + bi + cj + dk, \\
q' &= a' + b'i + c'j + d'k, \\
q'' &= a'' + b''i + c''j + d''k,
\end{aligned}
$$

に対して結合則 (associativity)

$$q(q'q'') = (qq')q''$$

は成り立つ。

証明: がんばって確認。計算ルールは

$$\boldsymbol{i^2 = j^2 = k^2 = -1}$$
$$\boldsymbol{ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j}$$

これを用いて

$$\boldsymbol{i(jk) = ii = -1, \qquad (ij)k = kk = -1}$$

など。

教訓: $\boldsymbol{ij = -ji = k}$ とか計算ルールを好きなように決めるのは勝手だが、そうすると交換法則、結合法則、分配法則などが成り立つかは確認しないといけない。

結合則 (associativity)

$$\boldsymbol{a(bc) = (ab)c}$$

をみたさない代数系もあります。

そういうものの存在を算数教育掛け算順序支持派に伝えないようにお願いします。

四元数の積は長さを保つ。すなわち

$$q = a + bi + cj + dk$$

に対し

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

と定義すると、

$$|q||q'| = |qq'|.$$

もっとあからさまには

$$q = a + bi + cj + dk, \qquad q' = a' + b'i + c'j + d'k$$

と書けば $|q||q'| = |qq'|$ の両辺を二乗して

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) &= \\ &(aa'-bb'-cc'-dd')^2+(ab'+ba'+cd'-dc')^2+ \\ &\quad (ac'+ca'+db'-bd')^2+(ad'+da'+bc'-cb')^2.\end{aligned}$$

証明1: 両辺をがんばって展開。

コメント1:

この公式自体はオイラーからゴールドバッハへの 1748年5月4日付けの手紙に出ている。

手紙は 1843 年にサンクトペテルブルク帝立科学院が出した「前世紀の著名科学者の手紙」に出ている。

— 452 —

wiss. omnem numerum, qui sit summa quatuor quadrator. fractorum, eundem in integris esse 4 quadratorum summam. Folgendes theorema kann auch dienen in vielen Fällen die quatuor quadrata selbst zu bestimmen, woraus eine Zahl zusammengesetzt ist: Si $m = aa + bb + cc + dd$ et $n = pp + qq + rr + ss$ erit $mn = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ existente

$$A = ap + bq + cr + ds$$
$$B = aq - bp - cs + dr$$
$$C = ar + bs - cp - dq$$
$$D = as - br + cq - dp.$$

Weil man nun die Zahlen a, b, c, d, p, q, r, s sowohl affirmative als negative annehmen, dieselben ferner auch nach Belieben mit einander combiniren oder ihre Ordnung verändern kann, so ist die resolutio producti mn auf sehr vielerley verschiedene Arten möglich.

https://books.google.co.jp/books?id=OGMSAAAAIAAJ&pg=PA452

ネタ本に書いてある文献情報をグーグルで検索するとすぐにそのものが出て来ます。すごい時代になりましたね。

よく眺めるとドイツ語とラテン語が混じっています。まあ僕が日本人の共同研究者に議論のメールを送ると日本語と英語が混ざるみたいなものでしょう。母語 + 科学共通語となる。

大昔は西洋ではラテン語。戦前ぐらいは数学や物理は各国語で論文が出ており、フランス語、ドイツ語の論文は沢山あった。特に物理ではドイツ語は標準的だった模様。

また、論文の概要と本文を違う言語で書いてみたりもした模様。

例えば

F. J. Belinfante

“On the covariant derivative of tensor-undors”

Physica A 7 (1940) 305–324

https://doi.org/10.1016/S0031-8914(40)90099-4

では概要はドイツ語とエスペラント、本文は英語。

ON THE COVARIANT DERIVATIVE OF TENSOR-UNDORS

by F. J. BELINFANTE

Instituut voor Theoretische Natuurkunde der Rijks-Universiteit, Leiden

Zusammenfassung

Die von W e y l, B a r g m a n n u.a. für gewisse Arten von Grössen gegebenen Definitionen der kovarianten Ableitung werden verallgemeinert zu einem Ausdruck für die kovariante Ableitung willkürlicher „Tensor-Undoren". Es wird eine vernünftigeBeschränkung für die Darstellung der Undoren angegeben, bei welcher der Ausdruck für die kovariante Ableitung eine einfache Form annimmt. Die Übereinstimmung mit den für Spezialfälle bereits definierten Ausdrücken wird gezeigt.

Resumo

La difinoj de la kunvarianta derivaĵo, donitaj de W e y l, B a r g m a n n k.a. por certaj specoj de grandoj, estas ĝeneraligataj je esprimo por la kunvarianta derivaĵo de arbitraj „tensor-undoroj". Limigo por la reprezentiĝo de la undoroj estas indikata, ĉe kiu la esprimo por la kunvarianta derivaĵo prenas simplan formon. La akordo kun la esprimoj por specialaj kazoj jam difinitaj estas montrata.

§ 1. *Introduction. Four-legs. World tensors and local tensors.* In previous papers [1]) [2]) the author has introduced 4^N-component quantities transforming like the products of N four-component D i r a c

物理では戦後は英語に統一された。数学ではまだ英語以外にフランス語も生き残っている模様。

しかし趣味でラテン語で論文を書く人もいるらしい。

> *Vadim Schechtman (2006)*
> *“Definitio nova algebroidis verticiani”*
> https://doi.org/10.1007/0-8176-4478-4_18
> https://www.math.univ-toulouse.fr/~schechtman/defin-nova-preprint.pdf

(全然正しいラテン語でないという風に聞きましたが...)

何の話でしたっけ。

$|q||q'| = |qq'|$ すなわち

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = \\ (aa'-bb'-cc'-dd')^2+(ab'+ba'+cd'-dc')^2+ \\ (ac'+ca'+db'-bd')^2+(ad'+da'+bc'-cb')^2.\end{aligned}$$

を示すという話でした。

コメント2: この展開を紙と鉛筆でやるのは大変。

数式処理ソフトでやると(タイプを間違えなければ)一瞬。

売り物には Mathematica、フリーなものには sage などが有名。

僕は学生のころからの惰性で Mathematica をつかっていますが。

その昔、僕が若かった頃は、紙と鉛筆が偉くて数式処理を使うのは邪道だ、と思ったりしましたが、やりたい計算が速く出来るならそれに越したことはないですよね。

ただし、手計算が間違えることがあるように、数式処理ソフトも間違うことがある。

- 入力を間違えると勿論こたえが間違う。
- 入力を間違えなくても、ソフトにバグがあって間違う。

後者は非常に困ります。

僕も研究の過程で Mathematica のバグにいくつか巡り合ったことがありますが、さらに困るのは、これを開発している Wolfram 社にバグを報告しても滅多に直してくれない。

数学者としてはこれでは困るので、オープンソースで自前で開発しているのが sage 。

僕も sage に移行すべきなのはわかっているのですが、惰性が... 老害ですね。すいません。

また、数式処理ソフトによって得手不得手がある。

売り物でも素粒子論では Mathematica と Maple と二種類使われてきた。それぞれ知っている公式が違ったりするため、片方では出来るがもう片方ではできない簡略化があったりする。

(僕が院生のときに、一年下の同僚二人が共同研究をしていて、片方は Mathematica でもう片方は Maple をつかって楕円関数をつかった計算を検算していて、Maple ではうまく簡略化できたが Mathematica では出来なかったケースがあった。)

数学者がつくっているソフトもいろいろあるが、分野ごとに違ったりする。

可換代数、代数幾何	Singular, Macaulay2 ...
群論	GAP, Magma ...

sage は分野ごとにいろいろあった数式処理ソフトを統合したものです。

で何の話でしたっけ。そう、四元数で $|qq'| = |q||q'|$ を証明するという話でした。

証明2: 四元数 $q = a + bi + cj + dk$ に対し $\bar{q}$ を

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk$$

と定める。すると

$$|q|^2 = q\bar{q}$$

はすぐ確認できる。また、

$$\overline{qq'} = \overline{q'}\bar{q}$$

も確認出来る。

q と q' の順序が入れ替わることに注意。

すると

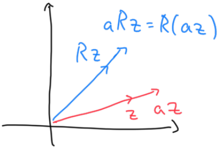
$$
\begin{aligned}
|qq'|^2 &= (qq')\overline{qq'} = (qq')(\overline{q'}\bar{q}) \\
&= q(q'\overline{q'})\bar{q} = q|q'|^2\bar{q} \\
&= |q'|^2 q\bar{q} = |q'|^2|q|^2.
\end{aligned}
$$

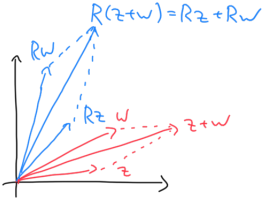
一行目から二行目には結合則をつかった。

二行目から三行目には、実数と四元数は交換することをつかった。

さて、$\vec{v} \leftrightarrow (x, y)$ の回転 $\vec{v} \mapsto R\vec{v}$ とは線形変換

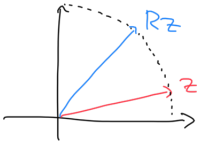
$$R(a\vec{v}) = a(R\vec{v}), \qquad R(\vec{v} + \vec{w}) = (R\vec{v}) + (R\vec{w})$$





で長さを保つもの

$$|R\vec{v}| = |\vec{v}|$$



で向きを保つものだった。

一般に n 次元空間のベクトル $\vec{v} \leftrightarrow (x_1, \ldots, x_n)$ に対しても
回転とは線形変換

$$R(a\vec{v}) = a(R\vec{v}), \qquad R(\vec{v} + \vec{w}) = (R\vec{v}) + (R\vec{w})$$

で長さを保つもの

$$|R\vec{v}| = |\vec{v}|$$

で向きも保つもの、ということにする。ただし

$$|\vec{v}| = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$

と定める。

コメント: 中高では三平方の定理 $|\vec{v}|^2 = x^2 + y^2$ は定理だった。
一方いまはこれを長さの定義とする。
この関係はどういうことでしょうか？

四次元空間のベクトルを四元数と

$$(x, y, z, w) \leftrightarrow v := x + iy + jz + kw$$

と同一視する。q をもうひとつの四元数として、

$$v \mapsto qv$$

を考える。これは

$$q(av) = a(qv), \qquad q(v + w) = qv + qw$$

をみたすので実ベクトルとしての線形変換。さらに $|q| = 1$ なら

$$|qv| = |q||v| = |v|$$

なので長さを保つ。向きも保つのでこれは四次元空間の回転である。

同様に q' を $|q'| = 1$ なる別の四元数として

$$v \mapsto vq'$$

も回転になる。四元数は交換法則を一般にはみたさないので

$$v \mapsto qv$$

とは一般に異なる変換になる。もっと拡張して

$$v \mapsto qvq'$$

も $|q| = |q'| = 1$ ならば四次元の回転を定める。

定理 四次元のベクトル (x, y, z, w) を
四元数 $v := x + yi + zj + wk$ と同一視すると、
勝手な四次元空間の回転は適切な絶対値 1 の四元数 q, q' をとって

$$v \mapsto qvq'$$

とあらわせる。

証明 今の段階では難しいので略。

参考: 二次元のベクトル (a, b) を複素数 $z = a + bi$ と同一視すると、
勝手な二次元の回転は適切な絶対値 1 の複素数 c をとって

$$z \mapsto cz$$

とあらわせる、というのは今回の講義のはじめのほうでやりました。

でも四次元の回転よりも三次元の回転のほうが普通は(?)興味がある。

三次元の回転を四元数であらわすこともできる。

$$\boldsymbol{q = a + bi + cj + dk}$$

で $\boldsymbol{a = 0}$ なものを純虚な四元数ということにする。

$$\boldsymbol{\bar{q} = a - bi - cj - dk}$$

だから、$\boldsymbol{q}$ が純虚 $\Leftrightarrow \boldsymbol{q = -\bar{q}}$.

そこで、三次元ベクトル $\boldsymbol{(x, y, z)}$ を $\boldsymbol{v := xi + yj + zk}$ なる
純虚四元数と同一視することにする。

$\boldsymbol{q}$ を $|\boldsymbol{q}| = 1$ なる四元数とする。そこで $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{x}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{z}\boldsymbol{k}$ に対して

$$\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}' := \boldsymbol{q}\boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{q}}$$

という変換を考える。$\boldsymbol{v}'$ も純虚であることはすぐわかる、なぜなら

$$\overline{\boldsymbol{v}'} = \overline{\boldsymbol{q}\boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{q}}} = \bar{\bar{\boldsymbol{q}}}\bar{\boldsymbol{v}}\bar{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q}(-\boldsymbol{v})\bar{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{v}'.$$

また

$$|\boldsymbol{v}'| = |\boldsymbol{q}||\boldsymbol{v}||\bar{\boldsymbol{q}}| = |\boldsymbol{v}|$$

だから、この変換は長さを保ち、三次元の回転になる。

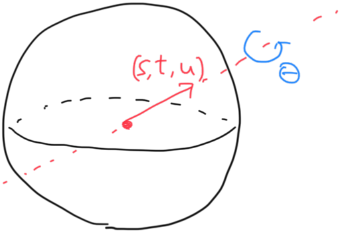
定理 三次元のベクトル (x, y, z) を
純虚四元数 $v := xi + yj + zk$ と同一視すると、
勝手な三次元空間の回転は適切な絶対値 1 の四元数 q をとって

$$v \mapsto qv\bar{q}$$

とあらわせる。

証明 抽象的にやるのではなくて、勝手な三次元の回転に対し、
q を具体的に作ろう!

まず、勝手な三次元の回転はある回転軸のまわりの $\boldsymbol{\theta}$ 角回転であることを思い出す:



(思い出す、といったが、示せますか?)

軸は緯度経度ではなく、単位球との交点の座標 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u})$ であらわすこととする。

$$\boldsymbol{s^2 + t^2 + u^2 = 1}$$

である。

はじめから一般にやるのは大変なので、i 軸周りの回転から考える。
θ だけ回すと、

$$\begin{aligned}(1,0,0) &\mapsto (1,0,0)\\(0,1,0) &\mapsto (0,\cos\theta,\sin\theta)\\(0,0,1) &\mapsto (0,-\sin\theta,\cos\theta)\end{aligned}$$

となるはず。純虚四元数でかけば、

$$i \mapsto i, \qquad j \mapsto j\cos\theta + k\sin\theta, \qquad k \mapsto -j\sin\theta + k\cos\theta$$

となる。

さて、天下りではあるが $q = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いて

$$v \mapsto qv\bar{q} = (\cos\theta + i\sin\theta)v(\cos\theta - i\sin\theta)$$

を考える。頑張って計算すると

$$\begin{aligned}
i &\mapsto (\cos\theta + i\sin\theta)i(\cos\theta - i\sin\theta) \\
&= i, \\
j &\mapsto (\cos\theta + i\sin\theta)j(\cos\theta - i\sin\theta) \\
&= [(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2]j + [2\sin\theta\cos\theta]k \\
&= j\cos 2\theta + k\sin 2\theta, \\
k &\mapsto (\cos\theta + i\sin\theta)k(\cos\theta - i\sin\theta) \\
&= -[2\sin\theta\cos\theta]j + [(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2]k \\
&= -j\sin 2\theta + k\cos 2\theta
\end{aligned}$$

になる。

前二頁を比較すると、$q = e^{i\theta}$ による

$$v \mapsto qv\bar{q}$$

は i 軸周りの 2θ 回転になる。

複素数による二次元の回転では $c = e^{i\theta}$ に対し

$$z \mapsto cz$$

は θ 回転だったことに注意。

$\boldsymbol{j}$ 軸、$\boldsymbol{k}$ 軸まわりの $\boldsymbol{2\theta}$ 回転も同様に $\boldsymbol{q = e^{j\theta}, = e^{k\theta}}$ に対する

$$\boldsymbol{v \mapsto qv\bar{q}}$$

であらわせる。

確認するには、まず $\boldsymbol{e^{j\theta}}$ や $\boldsymbol{e^{k\theta}}$ は何かを考える。

その前に、$\boldsymbol{e^{i\theta}}$ は何かを思い出す。

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &:= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} \cdots \\
&= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots) \\
&\quad + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots)
\end{aligned}
$$

また

$$
\cos\theta := 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots, \qquad \sin\theta := \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots
$$

だから

$$
e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta
$$

この計算で重要なのは $i^2 = -1$ だけ。

だから

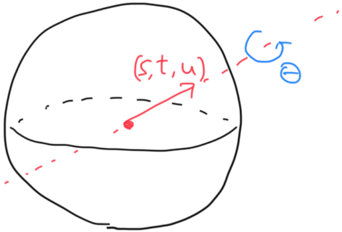
$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta, \qquad e^{k\theta} = \cos\theta + k\sin\theta.$$

あとは具体的に

$$e^{j\theta} v e^{-j\theta}, \qquad e^{k\theta} v e^{-k\theta}$$

を $v = i, j, k$ に対して計算して確認すればよい。

もっと一般の軸 $(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}), (\boldsymbol{s}^2 + \boldsymbol{t}^2 + \boldsymbol{u}^2 = 1)$ まわりの $\boldsymbol{\theta}$ 回転はどうすればよいか?



まず、$\boldsymbol{c} := \boldsymbol{si} + \boldsymbol{tj} + \boldsymbol{uk}$ という純虚四元数を考える。

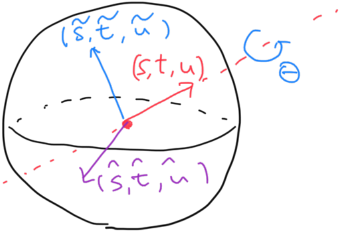
$$\boldsymbol{c}^2 = -\boldsymbol{s}^2 - \boldsymbol{t}^2 - \boldsymbol{u}^2 = -1$$

である。 $\boldsymbol{c}^2 = -1$ だから、前と同じ論法で、

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{c\theta}} = \cos\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{c}\sin\boldsymbol{\theta}$$

である。

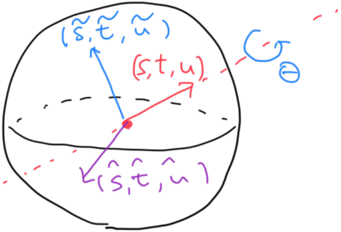
つぎに



と、$(s, t, u), (\tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{u}), (\hat{s}, \hat{t}, \hat{u})$ が正規直交基底であるように取る。

$$c = is + jt + ku, \quad \tilde{c} = i\tilde{s} + j\tilde{t} + k\tilde{u}, \quad \hat{c} = i\hat{s} + j\hat{t} + k\hat{u}$$

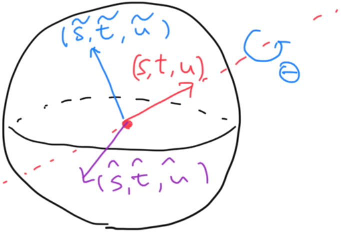
を考える。



すると

$$\begin{aligned} c\tilde{c} &= -(s\tilde{s} + t\tilde{t} + u\tilde{u}) + i(t\tilde{u} - u\tilde{t}) + j(u\tilde{s} - s\tilde{u}) + k(s\tilde{t} - t\tilde{s}) \\ &= i\hat{s} + j\hat{t} + k\hat{u} = \hat{c} \end{aligned}$$

がわかる。



この調子で、

$$c^2 = \tilde{c}^2 = \hat{c}^2 = -1,$$
$$c\tilde{c} = -\tilde{c}c = \hat{c}, \quad \tilde{c}\hat{c} = -\hat{c}\tilde{c} = c, \quad \hat{c}c = -c\hat{c} = \tilde{c}$$

がわかる。すなわち、

$$(i, j, k) \leftrightarrow (c, \tilde{c}, \hat{c})$$

と対応させれば計算ルールは全く同じ。

勝手な純虚四元数は

$$\boldsymbol{v = xc + y\tilde{c} + z\hat{c}}$$

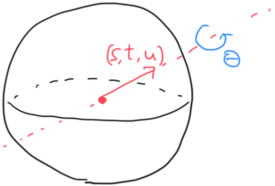
と書ける。こうかいた上で、$\boldsymbol{q = e^{c\theta} = \cos\theta + c\sin\theta}$ に対し

$$\boldsymbol{v \mapsto qv\bar{q} = e^{c\theta} v e^{-c\theta}}$$

を具体的に計算すると、これは $\boldsymbol{c = si + tj + uk}$ 軸周りの
$\boldsymbol{2\theta}$ 回転であることがわかる。

きちんと準備をすれば、$\boldsymbol{i}$ 軸周りと計算はまったく同じです。

まとめ:



三次元ベクトル (x, y, z) を純虚四元数であらわす:

$$v := xi + yj + zk$$

また軸 (s, t, u) を絶対値 1 の純虚四元数であらわす:

$$c := si + tj + uk$$

すると c 軸まわりの 2θ 回転は、

$$v \mapsto qv\bar{q} = e^{c\theta} v e^{-c\theta}$$

とあらわせる、ただし

$$q = e^{c\theta} = e^{(si+tj+uk)\theta}.$$

これまでのまとめ

実数 $\mathbb{R}$

$$|a||b| = |ab|$$

複素数 $\mathbb{C}$

$$|z||w| = |zw|$$

四元数 $\mathbb{H}$

$$|q||q'| = |qq'|$$

二乗するとそれぞれ

$$\boldsymbol{a^2 b^2 = (ab)^2}$$

また

$$\boldsymbol{(a^2+b^2)(p^2+q^2) = (ap-bq)^2 + (aq+bp)^2}$$

そして

$$\begin{aligned}\boldsymbol{(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)} &\boldsymbol{=} \\ \boldsymbol{(aa'-bb'-cc'-dd')^2+(ab'+ba'+cd'-dc')^2+} \\ \boldsymbol{(ac'+ca'+db'-bd')^2+(ad'+da'+bc'-cb')^2.}\end{aligned}$$

だった。

これを利用すると、回転が掛け算であらわされた。

もっと一般に $\boldsymbol{n}$ 次元ベクトルに対して「$\boldsymbol{n}$ 元数」

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longleftrightarrow x := x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$
$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) \longleftrightarrow y := y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n$$

ただし $\boldsymbol{e_1 = 1}$ を考え、$\boldsymbol{e_i}$ と $\boldsymbol{e_j}$ の掛け算をうまく定めることで、

$$|x||y| = |xy|$$

がみたされるように出来ないか?

実数は $n = 1$ で $(e_1) = 1$,
複素数は $n = 2$ で $(e_1, e_2) = (1, i)$,
四元数は $n = 4$ で $(e_1, e_2, e_3) = (1, i, j, k)$ の場合。

掛け算ルールを

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} c_{i,j;k} e_k$$

と書くと、$z = xy$ は

$$z = \sum_k \left(\sum_{i,j} c_{i,j;k} (x_i y_j) \right) e_k$$

と展開できるので、$|x||y| = |z|$ は二乗を成分で表示すれば

$$({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2)({y_1}^2 + \cdots + {y_n}^2) = \\ (\sum_{i,j} c_{i,j;1} x_i y_j)^2 + \cdots + (\sum_{i,j} c_{i,j;n} x_i y_j)^2$$

と、「n 個の二乗の和の積が n 個の二次式の二乗の和で書けるように $c_{i,j;k}$ を選べるか」という問題になる。

八元数 $\mathbb{O}$

$\boldsymbol{n = 1, 2, 4}$ でそうできることは既にみた。
安直には次は $\boldsymbol{n = 8}$ だろうと誰でも考える。
実際 $\boldsymbol{n = 8}$ でうまくいく。

$\boldsymbol{n = 2}$ は16世紀(カルダノ等)により導入された。

$\boldsymbol{n = 4}$ は既に述べたように 1843 年10月16日に Hamilton がみつけた。

$\boldsymbol{n = 8}$ は Hamilton の友達 Graves が 1843 年12 月16日に Hamilton に書いた手紙に書いてある。独立に Cayley が 1845 年にみつけた。

八元数 (octonion) と呼ばれ、その集合を $\mathbb{O}$ と書く。

次は $\boldsymbol{n = 16}$ と考えたくなるが、実は $\boldsymbol{n = 1, 2, 4, 8}$ に限ることが知られている。(Hurwitz, 1889)

八元数の作り方。

まず一元数(=実数)から二元数(=複素数)を作るには、
p, q を一元数として $p + qi$ を考える。掛け算ルールは

$$(p + qi)(P + Qi) = (pP - Qq) + (Qp + qP)i$$

と定める。絶対値は

$$|p + qi|^2 = |p|^2 + |q|^2$$

で定める。すると

$$\begin{aligned} |(p + qi)(P + Qi)|^2 &= (pP - Qq)^2 + (Qp + qP)^2 \\ &= (p^2 + q^2)(P^2 + Q^2). \end{aligned}$$

つぎに二元数から四元数を作るには、
p, q を二元数として $p + qj$ を考える。掛け算ルールは

$$(p + qj)(P + Qj) = (pP - \bar{Q}q) + (Qp + q\bar{P})j$$

と定める。絶対値は

$$|p + qj|^2 = |p|^2 + |q|^2$$

で定める。

すると

$$
\begin{aligned}
&|(p+qj)(P+Qj)|^2\\
=&|(pP-\bar{Q}q)+(Qp+q\bar{P})j|^2\\
=&(pP-\bar{Q}q)(\bar{P}\bar{p}-\bar{q}Q)+(Qp+q\bar{P})(\bar{p}\bar{Q}+P\bar{q})\\
=&(|p|^2+|q|^2)(|P|^2+|Q|^2)-pP\bar{q}Q-\bar{Q}q\bar{P}\bar{p}+QpP\bar{q}+q\bar{P}\bar{p}\bar{Q}\\
=&(|p|^2+|q|^2)(|P|^2+|Q|^2)\\
=&|p+qj|^2|P+Qj|^2.
\end{aligned}
$$

つぎに四元数から八元数を作るには、

p, q を四元数として $p + ql$ を考える。掛け算ルールは

$$(p + ql)(P + Ql) = (pP - \bar{Q}q) + (Qp + q\bar{P})l$$

と定める。絶対値は

$$|p + ql|^2 = |p|^2 + |q|^2$$

で定める。八元数の積の絶対値が絶対値の積であることを示したい。

すると

$$
\begin{aligned}
&|(p+ql)(P+Ql)|^2 \\
=&(pP-\bar{Q}q)(\bar{P}\bar{p}-\bar{q}Q)+(Qp+q\bar{P})(\bar{p}\bar{Q}+P\bar{q}) \\
=&(|p|^2+|q|^2)(|P|^2+|Q|^2)-pP\bar{q}Q-\bar{Q}q\bar{P}\bar{p}+QpP\bar{q}+q\bar{P}\bar{p}\bar{Q}
\end{aligned}
$$

よって

$$(pP\bar{q})Q+\bar{Q}(q\bar{P}\bar{p}) \overset{?}{=} Q(pP\bar{q})+(q\bar{P}\bar{p})\bar{Q}$$

が示せればよい。これは二つの四元数 $A=pP\bar{q}, B=Q$ として

$$AB+\bar{B}\bar{A} \overset{?}{=} BA+\bar{A}\bar{B}$$

が示せればよい。

$$AB+\overline{AB} \overset{?}{=} BA+\overline{BA}.$$

とかいても同じこと。

これは $A = a + bi + cj + dk, B = a' + b'i + c'j + d'k$ と書くと

$$AB + \overline{AB} = 2(aa' - bb' - cc' - dd') = BA + \overline{BA}$$

でわかる。

これでようやく八元数ふたつ o, o' に対して

$$|oo'| = |o||o'|$$

がしめされた。

ネタ本によると、 $|oo'|^2 = |o|^2|o'|^2$ をあからさまに成分で書いた式自体はサンクトペテルブルク帝立科学院紀要の 1818 年版に出た Degen の “Adumbratio demonstrationis theorematis arithmetici maxime universalis” という論文に出ている。

Degen はしかし 2^n 個の変数に拡張できると論文に書いてある、とネタ本に書いてある。ラテン語が読めないので確認できませんが ...

同様にグーグルで調べるとすぐにそのものが出てきます。
すごい時代ですね。

209

§. 3. Ante omnia necesse est extensionem theorematis *Euleriani* ad summam octo quadratorum ostendere: Fit nempe

$$(P^2+Q^2+R^2+S^2+T^2+U^2+V^2+X^2)(p^2+q^2+r^2+s^2+t^2+u^2+v^2+x^2)=\Pi$$
$$=(Pp+Qq+Rr+Ss+Tt+Uu+Vv+Xx)^2$$
$$+(Pq-Qp+Rs-Sr+Tu-Ut+Vx-Xv)^2$$
$$+(Pr-Qs-Rp+Sq\mp Tv\pm Ux\pm Vt\mp Xu)^2$$
$$+(Ps+Qr-Rq-Sp\pm Tx\pm Uv\mp Vu\mp Xt)^2$$
$$+(Pt-Qu\pm Rv\mp Sx-Tp+Uq\mp Vr\pm Xs)^2$$
$$+(Pu+Qt\mp Rx\mp Sv-Tq-Up\pm Vs\pm Xr)^2$$
$$+(Pv-Qx\pm Rt\pm Su\pm Tr\mp Us-Vp+Xq)^2$$
$$+(Px+Qv\pm Ru\pm St\mp Ts\mp Ur-Vq-Xp)^2,$$

cujus aequalitatis dispositionem ita me instituisse spero, ut etiam minus sagacibus de veritate ejus facile constare possit. Sagaciores eandem facile ad sedecim etc. quadratorum summam extensuros esse mihi persuasum est. Prolixa igitur aeque ac taediosa descriptione supersedeo. Circa ipsum hoc theorema vero notasse oportet, deceptum iri qui hujus et *Fermatiani* illius, quo statuitur, *omnem numerum esse quatuor pauciorumve quadratorum summam*, aliquam ut aiunt *identitatem* ideo statuerent, quod sumto pro lubitu $\Pi=\Sigma+\Theta$, secundum *Fermatium* Σ in $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$, Θ in $\varepsilon^2+\zeta^2+\eta^2+\theta^2$ resolvi possit, adeoque semper sit Π octo quadratorum summa. Ex-

https://books.google.co.jp/books?id=-mXGbg-oRcsC&pg=PA209

八元数の掛け算ルールは $\boldsymbol{p, q, P, Q}$ を四元数として

$$(p+ql)(P+Ql) = (pP-\bar{Q}q) + (Qp+q\bar{P})l$$

だった。もうすこしあからさまに書くと、八元数の基底は

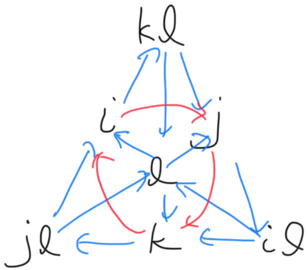
$$1,\ i,\ j,\ k,\ l,\ il,\ jl,\ kl$$

なので、これらの積を計算すればよい。上記ルールを頑張って展開すると、結局、

$$i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = (il)^2 = (jl)^2 = (kl)^2 = -1,$$

さらに

異なった元の積は、



上の図で直線もしくは円で $a \to b \to c$ となっていたら

$$ab = -ba = c, \quad bc = -cb = a, \quad ca = -ac = b$$

となる。

$$(ij)l = kl, \qquad i(jl) = -kl$$

なので、結合法則が一般には成り立たないことに注意。

つぎに八元数から十六元数を作ろうとすると?

八元数ふたつ p, q に対し十六元数を $p + q\sharp$ で定め掛け算ルールを

$$(p + q\sharp)(P + Q\sharp) = (pP - \bar{Q}q) + (Qp + q\bar{P})\sharp$$

と定めてみる。絶対値は

$$|p + q\sharp|^2 = |p|^2 + |q|^2$$

で定める。

すると

$$
\begin{aligned}
&|(p+q\sharp)(P+Q\sharp)|^2 \\
=&(pP-\bar{Q}q)(\bar{P}\bar{p}-\bar{q}Q)+(Qp+q\bar{P})(\bar{p}\bar{Q}+P\bar{q}) \\
\overset{!}{=}&(|p|^2+|q|^2)(|P|^2+|Q|^2)-pP\bar{q}Q-\bar{Q}q\bar{P}\bar{p}+QpP\bar{q}+q\bar{P}\bar{p}
\end{aligned}
$$

ここで $\overset{!}{=}$ はウソ。

何故か? そのためには、たとえば

$$
(pP)(\bar{P}\bar{p}) \overset{!}{=} p(P\bar{P})\bar{p} = p|P|^2\bar{p} = |p|^2|P|^2
$$

としたいが、一つ目の所で
八元数は結合法則が成り立たないのである...

$\mathbb{R}$　実数

$\downarrow$　「二乗が正」を失う

$\mathbb{C}$　複素数

$\downarrow$　「交換法則」を失う

$\mathbb{H}$　四元数

$\downarrow$　「結合法則」を失う

$\mathbb{O}$　八元数

これ以上進んでもあまり興味深いものは出てこない。

この議論では、絶対値の積が積の絶対値になる十六元数は
「この構成では」つくれないことしかわからないが、
どのようにしても無理なことが知られている。

A. Hurwitz,
“Ueber die Composition der quadratischen Formen
von beliebig vielen Variabeln,”
Nachrichten von der Gesellschaft der
Wissenschaften zu Göttingen,
Mathematisch-Physikalische Klasse (1989) 309–316 ,

http://eudml.org/doc/58420

四元数、八元数が出て来た 19 世紀半ばはそもそも線形代数どころか
行列も無い時代。

交換法則が失われたり、結合法則が失われたりするのは
歴史的に初めてのこと。

交換法則が失われるのは量子力学では非可換性として出てくる。

古典力学をやっていても回転行列の掛け算の非可換性は
いつでも出てくる。

可換性を失うのは理論物理屋もいつでも扱うことで、驚きではない。

一方で結合則を失うのはかなりヤバい状況で、
理論物理でも数学でもなかなかあらわれない。

数学で基本的なモノは写像。それを三つ

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z, \quad h : Z \to W$$

用意すると、ほぼ自動的に

$$(fg)h = f(gh) : X \to W$$

が成り立ってしまうので ...

理論物理をやっていると、四元数はあからさまには使わないが
実はつかっていることは頻繁にある。

八元数は滅多に使わない。

まあでも結合則が穏やかに(?)破れるケースは数学でテンソル圏というものを考えていると出て来たりする。

テンソル圏も 2+1 次元位相的場の理論の一般論をやると出てくるので、結合則の破れを扱わないことはないですが...

テンソル圏における結合則の破れと八元数における結合則の破れの関係はわかりません。あるのかなぁ?