現代物理学(2020)第五回
講義スライド

2020年5月8日

- 前回手書きでやるといいましたが、
  今回もスライドをみせて進めてみます。
- 目的は 360° では戻らないが 720° では戻るということを
  実感することです。
- 今回も相変わらず数学の話です。
  次回は量子力学の話になるはず。

まず用語をいくつか準備します。

$x^2+y^2=1$	$x^2+y^2+z^2=1$	$x^2+y^2+z^2+w^2=1$
		???
円	球面	超球面?
一次元球面	二次元球面	三次元球面
S^1	S^2	S^3

S は Sphere の頭文字。球面を単に球ともいう。

表面だけ、内部を含まない。

三次元空間内の球面が二次元球面と呼ばれるのに注意。

群 G とは:

- 単位元と呼ばれる元 $e \in G$ を含み
- 勝手な $g \in G$ に対して逆元とよぶ $g^{-1} \in G$ と書かれる元を含み
- 勝手な $g, h \in G$ に対して $gh \in G$ という元が定まっており
- 以下の条件
    - $(gh)k = g(hk)$
    - $eg = ge = g$
    - $gg^{-1} = g^{-1}g = e$

  をみたす

ような集合のこと。

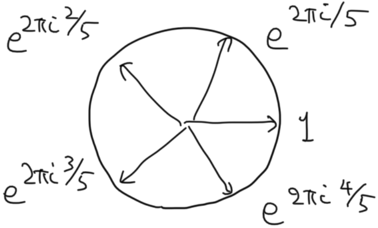
群の例:

$\{\pm 1\}$ で群構造を積で定めたもの。単位元 e は 1。

群の例:

$$\{e^{2\pi ik/n} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

で群構造を積で定めたもの。



この群を物理屋は $\mathbb{Z}_n$ と書く。

数学者は $\mathbb{Z}/n$ や $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と書く。

($\mathbb{Z}_n$ が全然別のものを指す数学の分野もあるので注意。)

群の例:

n 個のモノの置換群 $\mathcal{S}_n$ とは、写像

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

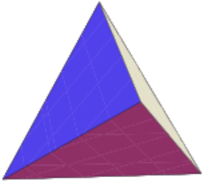
で逆をもつものの全体。そのような写像は $n!$ 個ある、
すなわち $|\mathcal{S}_n| = n!$。

- 群の演算 fg は写像の合成で定める。
- e は恒等写像 $e(i) = i$
- f に対し f^{-1} は逆写像、すなわち $f(x) = y$ なら $f^{-1}(y) = x$。

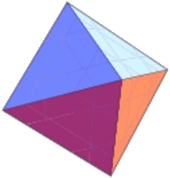
(ドイツ文字で $\mathfrak{S}_n$ と書くことも多い。)

群の例:

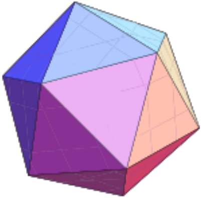
正四面体群 $\mathcal{T}$、 正八面体群 $\mathcal{O}$、 正二十面体群 $\mathcal{I}$ とは、
対応する正多面体を自分自身にうつすような回転操作のなす群。



$\mathcal{T}$
tetrahedral
group



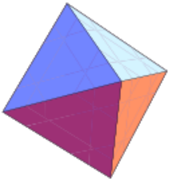
$\mathcal{O}$
octahedral
group



$\mathcal{I}$
icosahedral
group

(記法 $\mathcal{T}, \mathcal{O}, \mathcal{I}$ はこういう文脈ではしばしば使われるが特に標準的に決まっているわけではないと思う。)

正八面体群 $\mathcal{O}$ の要素数は?



- 単位元が $\mathbf{1}$ つ
- 相対する頂点の組 $\mathbf{3}$ つを軸とする $\mathbf{90^\circ}, \mathbf{180^\circ}, \mathbf{270^\circ}$ 回転
- 相対する辺の組 $\mathbf{6}$ つを軸とする $\mathbf{180^\circ}$ 回転
- 相対する面の中心の組 $\mathbf{4}$ つを軸とする $\mathbf{120^\circ}, \mathbf{240^\circ}$ 回転

あわせて $\mathbf{1+3\times 3+6+4\times 2=24}$ 個。

四つのモノの置換群 $\mathcal{S}_4$

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$$

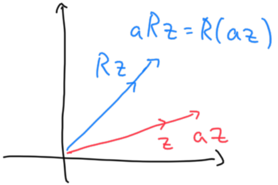
も $4! = 24$ 個元があった。

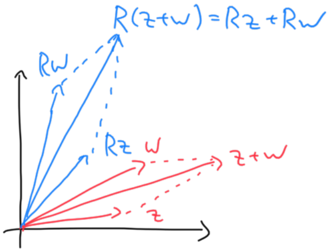
実は正八面体群 $\mathcal{O}$ と四つのモノの置換群 $\mathcal{S}_4$ は群として同じ。

正四面体の裏表に $1, 2, 3, 4$ を書き、回転が引き起こす置換を考えれば良い。こういうのを群の同型という。

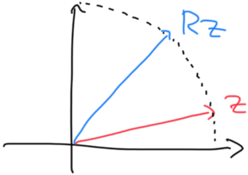
$\mathcal{O} \simeq \mathcal{S}_4$ と書く。

n 次元空間の線形変換





で、長さ $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ を保ち、



さらに向きを保つものを n 次元の回転という。

n 次元の回転全体は群をなし、n 次元の回転群という。

n 次元の回転群は通常 $SO(n)$ と書く。

Special **o**rthogonal group の頭文字をとったもの。

(「向きを保つ」というのを special という。単に orthogonal group というのは、線形変換で長さを保つもの全体。)

(記法は $SO(n)$ と書く派と $\mathrm{SO}(n)$ と書く派で血みどろの戦いが繰り広げられている。僕自身はときどき意見を変えます。少なくとも一本の論文を書いている間は統一したほうがよい)

$\boldsymbol{SO(1)}$: 一次元の回転群。

一次元の線形変換は $\boldsymbol{x \mapsto ax}$ という形。

長さを保つなら $\boldsymbol{a = \pm 1}$。向きを保つなら $\boldsymbol{a = +1}$ のみ。

$\boldsymbol{e : x \mapsto x}$ は単位元。

だから $\boldsymbol{SO(1) = \{e\}}$。簡単ですね。

$SO(2)$: 二次元の回転群。

複素平面をつかうと、勝手な二次元の回転は

$$z \mapsto cz$$

と書けた、ただし $c = \cos\theta + i\sin\theta$。

そのような c 全体は二次元平面の中の単位円、すなわち
一次元球面 S^1 をなす。

$$SO(2) \simeq \{|c| = 1\} \simeq S^1$$

$\boldsymbol{SO(3)}$: 三次元の回転群。

四元数をつかうと、勝手な三次元の回転は

$$\boldsymbol{v \mapsto qv\bar{q},}$$

ただし

$$\boldsymbol{v = ix + jy + kz}$$

は三次元空間を純虚四元数で書いたもので、

$$\boldsymbol{|q| = 1}$$

は絶対値 $\mathbf{1}$ の四元数。

四元数 $q = a + bi + cj + dk$ の絶対値が 1 とは

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

ということで、そのようなもの全体は三次元球面 S^3 をなす。

S^3 は四元数の掛け算のもとで群をなす。

だから、三次元の回転群 $SO(3)$ は群 S^3 と「だいたい同じ」。

でも、$SO(3)$ と S^3 が一致するわけではない。

$q = a + bi + cj + dk$ で $|q| = 1$ のときに $v \mapsto qv\bar{q}$ は
どういう回転だったか?

いま $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ なので、

$$a = \cos\theta, \qquad b^2 + c^2 + d^2 = (\sin\theta)^2$$

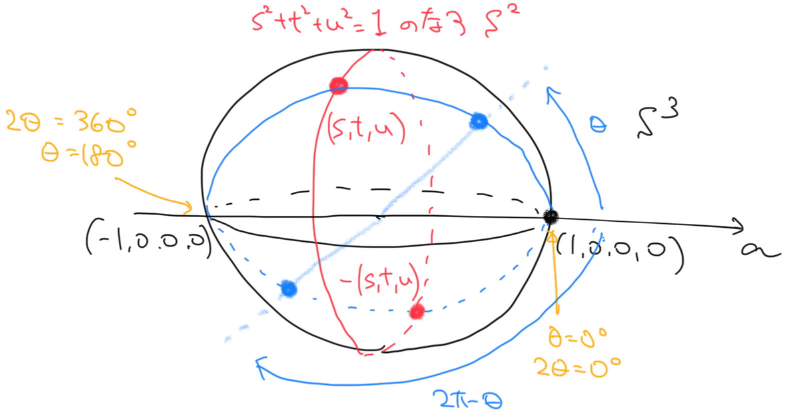
となる $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ がある。そこで

$$(b, c, d) = \sin\theta(s, t, u)$$

と書くと $s^2 + t^2 + u^2 = 1$ で

$$q = \cos\theta + \sin\theta(si + tj + uk)$$

となる。


$s^2+t^2+u^2=1$ のなす S^2
$2\theta=360°$
$\theta=180°$
(s,t,u)
$-(s,t,u)$
θ
S^3
$(-1,0,0,0)$
$(1,0,0,0)$
a
$\theta=0°$
$2\theta=0°$
$2\pi-\theta$

で、

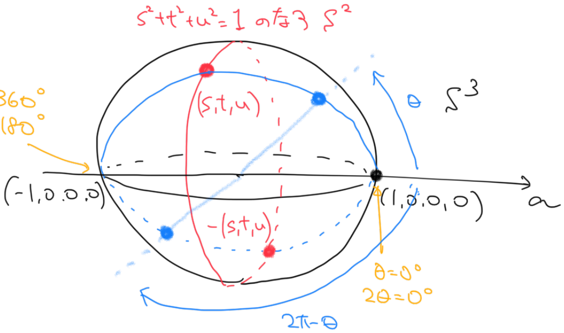
$$\boldsymbol{q = \cos\theta + \sin\theta(si + tj + uk)}$$

に対し

$$\boldsymbol{v \mapsto qv\bar{q}}$$

は $\boldsymbol{(s, t, u)}$ 軸周りの $\boldsymbol{2\theta}$ 回転だった。

だから



において

- $+q = +\cos\theta + \sin\theta(+si + tj + uk)$ は $(+s, +t, +u)$ 軸まわり $+2\theta$ 回転
- $-q = -\cos\theta + \sin\theta(-si - tj - uk)$ は $(-s, -t, -u)$ 軸まわり -2θ 回転

でおなじこと。

$+q$ の定める回転

$$v \mapsto qv\bar{q}$$

と $-q$ の定める回転

$$v \mapsto (-q)v(-\bar{q})$$

が同じことは

$$(-q)v(-\bar{q}) = (-1)qv(-1)\bar{q} = qv\bar{q}$$

からすぐ従うが、上記のように丁寧にやると、
$+q$ と同じ回転をあたえる四元数は $\pm q$ のみであることがわかる。

だから、三次元の回転群 $\boldsymbol{SO(3)}$ は絶対値1の四元数のなす群

$$\boldsymbol{S^3 = \{|q| = 1\}}$$

で $\boldsymbol{+q}$ と $\boldsymbol{-q}$ を同一視したもの。

よって

$$\boldsymbol{SO(3) \simeq S^3/\{\pm 1\}}$$

がわかった。

ただし右辺は $\boldsymbol{S^3}$ 上で $\boldsymbol{+q \sim -q}$ と同一視するという記号。

$\boldsymbol{SO(3)}$ は三次元の回転操作全体のなす空間。

これが $\boldsymbol{S^3/\{\pm 1\}}$ すなわち

「三次元球面で $\boldsymbol{+q}$ と $\boldsymbol{-q}$ を同一視したもの」

と等価であることがわかった。

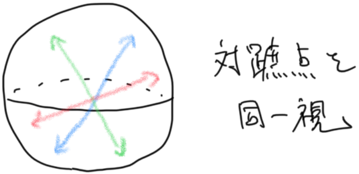
すこし具体的になった。もうすこし考えてみる。

$S^3/\{\pm 1\}$ は難しいので、まずは $S^2/\{\pm 1\}$ を考える。

すなわち、$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ で定まる二次元球面
(すなわち三次元空間内の球面)において

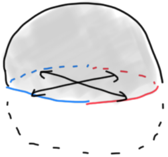
$$(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$$

と同一視したもの、を考える。



どんな空間でしょう。

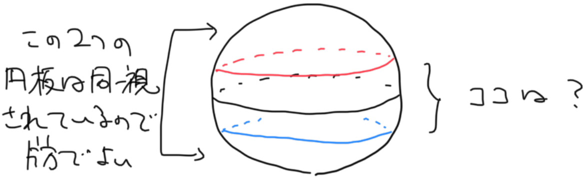
南半球の点はかならず北半球の点と同一視されているから、
北半球だけ残しておけば良い。



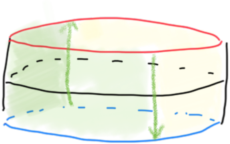
しかし赤道の互いの反対側、すなわち
経度 $\boldsymbol{\theta}$ の点と経度 $\boldsymbol{\theta + 180^\circ}$ の点が
同一視されていることを覚えていないといけない。

まだ良く判りませんか?

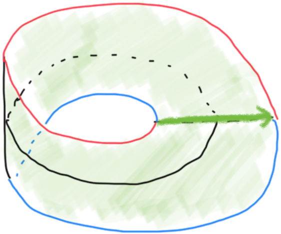
もうちょっと別の見方をしよう。



真ん中の部分はどうする?

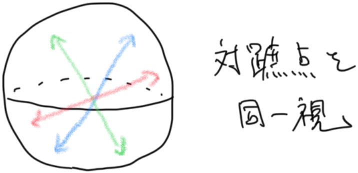


黄色のところと緑のところは同一視されている。
緑の所だけつかうと、

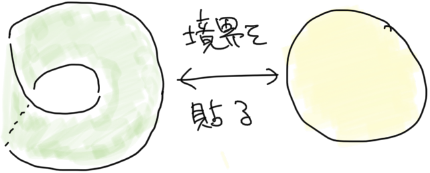


メビウスの帯ですね。

だから、

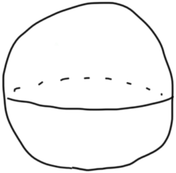


は

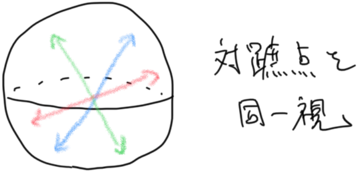


と、メビウスの帯と円板を境界の円周にそって貼ったもの。

さて、$\boldsymbol{S^2}$



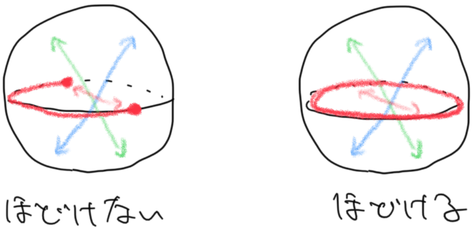
と $\boldsymbol{S^2/\{\pm 1\}}$



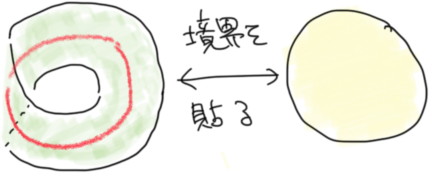
の違いを別の観点から考えましょう。

いま S^2 に輪っかを掛けるとする。いつでもスルスルとほどけます。

一方、$\boldsymbol{S^2/\{\pm 1\}}$ に輪っかを掛けるとする。

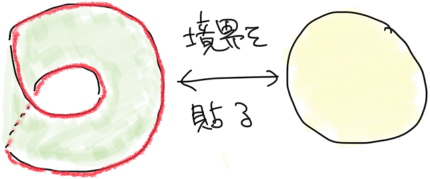


別の見方では、

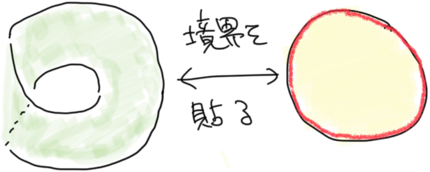


はひっかかっていてほどけない。

でも、



はほどける。なぜなら

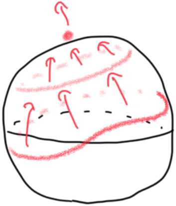


と同じだから。

こういうのをホモトピー群という。

S^2 上のどんな閉じた道もほどける:

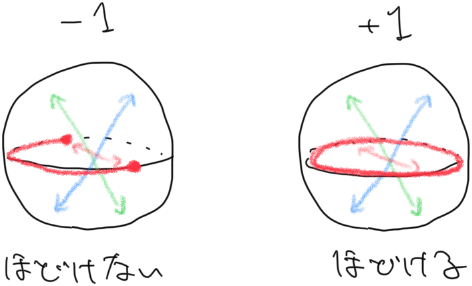
$$\pi_1(S^2) = \{e\}$$



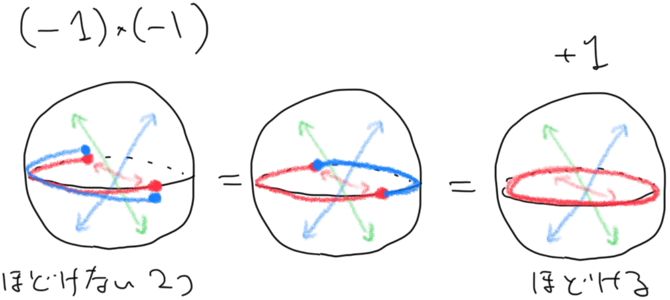
$S^2/\{\pm 1\}$ 上の閉じた道はほどけない道とほどける道がある。

$$\pi_1(S^2/\{\pm 1\}) = \{\pm 1\}$$

ただし



ほどけない道も二回まわるとほどける。



これが $(-1)^2 = +1$ と対応。

回転群 $SO(3) \simeq S^3/\{\pm 1\}$ を考えていたのでした。

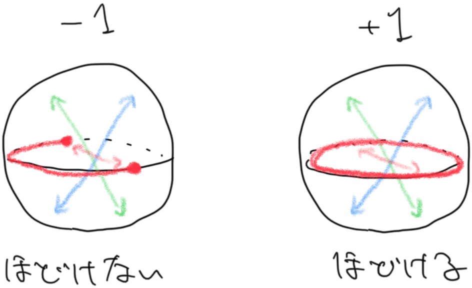
一次元高いですが同様に S^3 上のどんな閉じた道もほどける:

$$\pi_1(S^3) = \{e\}$$

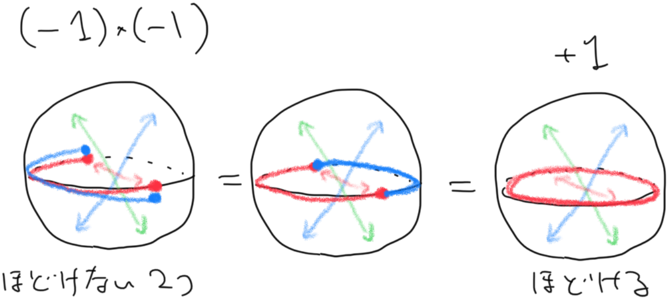
$SO(3) \simeq S^3/\{\pm 1\}$ 上の閉じた道は
ほどけない道とほどける道がある。

$$\pi_1(S^3/\{\pm 1\}) = \{\pm 1\}$$

ただし

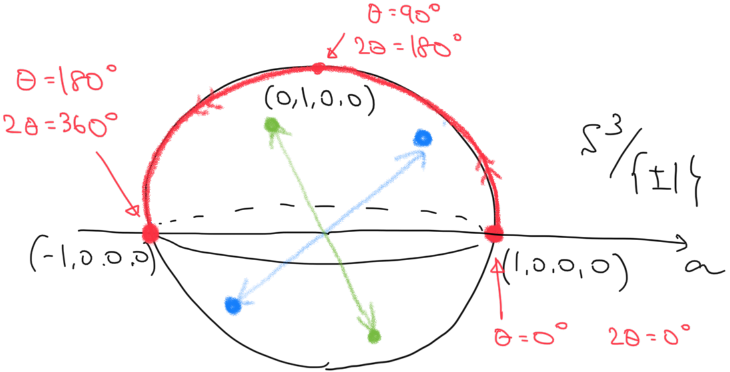


ほどけない道も二回まわるとほどける。



これが $(-1)^2 = +1$ と対応。

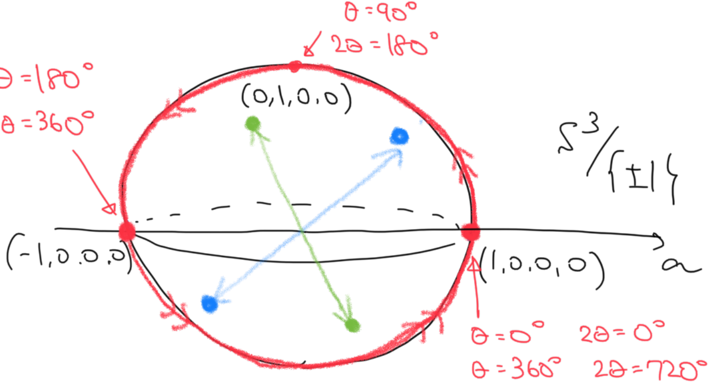
このほどけない道は何か?



$q = \cos\theta + i\sin\theta$ は jk 平面の 2θ 回転だった。

だから、$2\theta = 360^\circ$ 回転が丁度ほどけない道。

これを二周まわるとほどける。



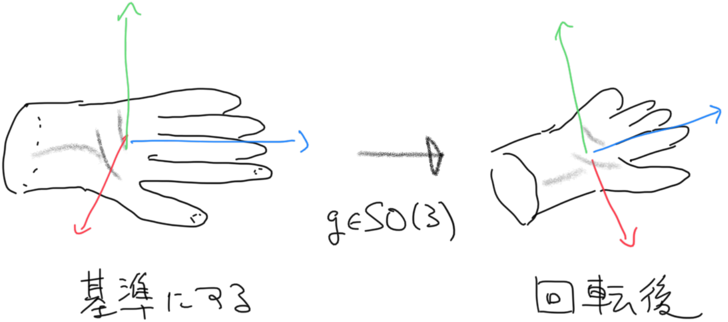
すなわち $2\theta = 720°$ 回転はほどける。

$\boldsymbol{SO(3) \simeq S^3/\{\pm 1\}}$ において、

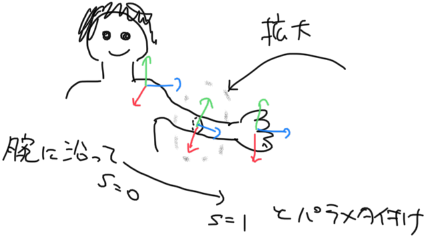
$\mathbf{360^\circ}$ 回転する道はひっかかっていてほどけないが、

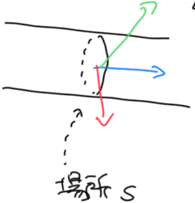
$\mathbf{720^\circ}$ 回転する道はほどける!

フェルミオン体操との関係は?



だから



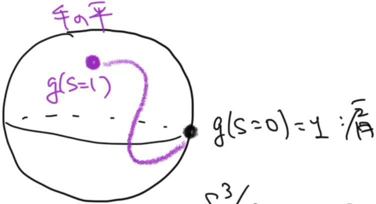


基準の基底に
$g(s)\in SO(3)$
を作用させて
得られる基底.

腕が $SO(3)$ 内の

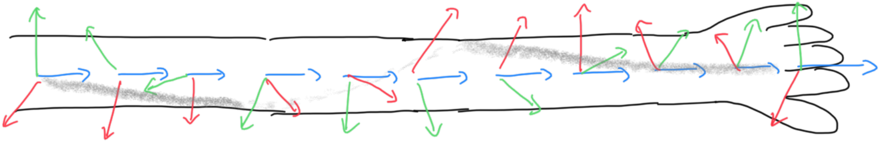
⇒

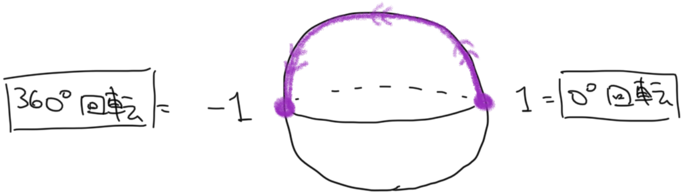
(一般には開いた)
道を与える.



$S^3/\{\pm 1\}\simeq SO(3)$

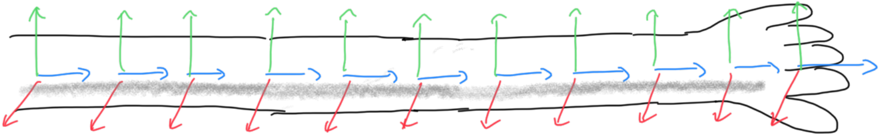
$\mathbf{360^\circ}$ 回ったところの腕は

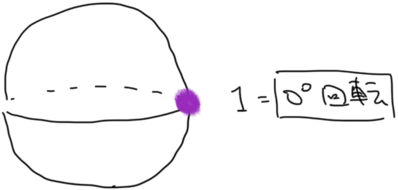




となって、$\boldsymbol{SO(3) \simeq S^3/\{\pm 1\}}$ にひっかかった道に対応。

回ってない腕は





となって、$\boldsymbol{SO(3) \simeq S^3/\{\pm 1\}}$ 上で動かない自明な道に対応。

まあ、関節の可動範囲の問題があるので、
$\boldsymbol{SO(3) \simeq S^3/\{\pm 1\}}$ 内の閉じた道の分類と、
腕の動かし方と、きちんとは対応しませんがね...

肩、腕、手首の関節にそれぞれ何自由度あって
可動範囲がどうなっていて、というのもとても面白い問題です。

$\boldsymbol{n}$ 次元の回転群を $\boldsymbol{SO(n)}$ と書いた。

今日は

- $\boldsymbol{SO(1) \simeq \{e\}}$
- $\boldsymbol{SO(2) \simeq S^1}$
- $\boldsymbol{SO(3) \simeq S^3/\{\pm 1\}}$

を学んだ。

$\boldsymbol{SO(4)}, \boldsymbol{SO(5)}, \ldots$ は？

前回勝手な四次元の回転は絶対値 $\mathbf{1}$ の四元数ふたつ $\boldsymbol{q, q'}$ を用いて

$$\boldsymbol{v \mapsto qvq'}$$

と書けるという事実を紹介した。これから

$$\boldsymbol{SO(4) \simeq (S^3 \times S^3)/\{\pm 1\}}$$

がさだまる。ただし $\boldsymbol{/\{\pm 1\}}$ は $\boldsymbol{(q, q')}$ と $\boldsymbol{(-q, -q')}$ が定める回転が同じであるので $\boldsymbol{(q, q') \sim (-q, -q')}$ と同一視する、ということをあらわす。

ここまで話すと $SO(n)$ って一般に球面をちょっと割ったものであるという間違った先入観を植え付けたかもしれませんが、
そうではない。

$SO(n)$ が球面で書けるのは $n \leq 4$ に限り、
それ以上は $SO(n)$ と言うより簡単な記述はない。

低い次元の空間に住んでいて良かったですね。

また、今日は

- $S^1 =$ 絶対値 1 の複素数全体
- $S^3 =$ 絶対値 1 の四元数全体

が群になることも散々使った。しかし

- $S^7 =$ 絶対値 1 の八元数全体は群にならない。

八元数は結合則をみたさず、群の公理には結合則がいるので。

また、n 次元球面 S^n がいつ群になるか、
という疑問も自然にわいてくる。

答え: S^1 と S^3 のみ。

教訓: 低次元ではいろいろ特殊なことが起こる。