駒場現代物理学(2020)第8回講義ノート

1　量子力学における観測についてもうすこし

1.1　観測した後の状態

状態空間を $\mathcal{H}$ とし、観測量 A について考える。固有ベクトルを $|i\rangle$ とかいて、$|i\rangle$ はそれぞれ長さ 1 で互いに直交するようにとっておく。対応する固有値は a_i であるとする: $A\,|i\rangle = a_i\,|i\rangle$。簡単のため a_i は全て異なるとする。

このとき、前回と前々回の講義で述べた基本法則 IV は以下のものだった:

> 状態 $|\psi\rangle$ において A を観測した際の結果は a_i のうちどれかであり、a_i が得られる確率は $|c_i|^2$ に比例する。ただし、c_i は $|\psi\rangle = \sum_i c_i\,|i\rangle$ と展開したときの係数である。

ここで、内積をとれば $c_i = (|i\rangle\,, |\psi\rangle)$ で $\sum_i |c_i|^2 = (\psi, \psi)$ となるので、

$$a_i\ \text{が得られる確率} = \frac{|(|i\rangle\,, |\psi\rangle)|^2}{(\psi, \psi)} \tag{1.1.1}$$

であった。特に、$|\psi\rangle = z\,|i\rangle$ の場合、この確率は 1 になる。固有状態において観測量を観測すると、値は 100% で固有値が得られる。

しかしこのルールにおいて観測した後の状態がどうなるかを書くのを忘れていた。それを書き足しておく:

> 観測結果が a_i であったとき、観測直後の系の状態は $|i\rangle$ である。

すると、ある状態 $|\psi\rangle$ において A を測定して a_i という結果が得られて、直後にまた A を測定すると、かならず同じ a_i という結果が得られることになる。

1.2　例

例として、qubit 系 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ を考える。観測量として

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

を考える。

σ_z の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で、固有値はそれぞれ ±1、また σ_x の固有ベクトルは

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

で固有値はそれぞれ ±1 である。

はじめに状態が

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) \tag{1.2.3}$$

であったとする。ここで、σ_z, σ_x の順で測定するのと、 σ_x, σ_z の順で測定するのを比較してみよう。 σ_* の測定結果を s_* と書くことにする。

まず前者を考える。 $|\psi\rangle$ は σ_z の固有値 $+1$ の固有状態なので、100% で $+1$ が得られる。次に、σ_x を測定すると、固有値 ±1 の固有ベクトルの線形結合で、係数がそれぞれ $1/\sqrt{2}$ であるから、二乗するとそれぞれ $1/2$ の確率で測定結果が ±1 である。まとめると

$$100\% \text{ で } \mathsf{s}_z = +1 \longrightarrow \text{五分五分で } \mathsf{s}_x = \pm 1 \tag{1.2.4}$$

ということ。

次に後者を考える。$|\psi\rangle$ は σ_x の固有ベクトルふたつの係数 $1/\sqrt{2}$ の線形結合だから、二乗してそれぞれ $1/2$ の確率で測定結果が ±1 になる。$\mathsf{s}_x = +1$ のときは状態は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{1.2.5}$$

であるから、ここで σ_z を測定すると五分五分で $\mathsf{s}_z = \pm1$ が得られる。同様に $\mathsf{s}_x = -1$ のときは状態が

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{1.2.6}$$

であるので、やはり σ_x を測定すると五分五分で $\mathsf{s}_z = \pm1$ が得られる。

まとめると

$$\text{五分五分で } \mathsf{s}_x = \pm 1 \longrightarrow \text{五分五分で } \mathsf{s}_z = \pm 1 \tag{1.2.7}$$

となり、(1.2.4) と全然異なる結果になる。

1.3 同時測定可能な観測量

上のように観測の順番によって結果が全然ことなるのは、σ_z と σ_x の固有ベクトルが全然ことなったから。いま二つの観測量 A, B が固有ベクトルのセット $|i\rangle$ を共有し、固有値がそれぞれ a_i, b_i であったとする:

$$A\,|i\rangle = a_i\,|i\rangle\,, \qquad B\,|i\rangle = b_i\,|i\rangle\,. \tag{1.3.1}$$

簡単のために a_i が互いにことなり、b_i が互いに異なるとする。（こういうのを「固有値に重複が無い」という。）

このときに状態 $|\psi\rangle = \sum_i c_i\,|i\rangle$ ただし $(|\psi\rangle\,, |\psi\rangle) = \sum_i |c_i|^2 = 1$ から出発して、A, B を二つの順序で測定してみる。それぞれの測定結果を A, B と書くことにする。

A を測定、その後に B を測定してみよう。 A を測定すると確率 $|c_i|^2$ で $|i\rangle$ になり、$\mathsf{A} = a_i$ が得られる。 $|i\rangle$ がでた状況で B を測定すると 100% の確率で $\mathsf{B} = b_i$ が得られる。

逆にまず B、そして A を測定してみる。 B を測定すると確率 $|c_i|^2$ で $|i\rangle$ になり、$\mathsf{B} = b_i$ が得られる。 $|i\rangle$ がでた状況で A を測定すると 100% の確率で $\mathsf{A} = a_i$ が得られる。

どちらにせよ、$(\mathsf{A},\mathsf{B}) = (a_i, b_i)$ になる確率が $|c_i|^2$ だということであって、測定の順序によらない。

このとき $AB = BA$ である。実際、勝手なベクトル $|\psi\rangle$ に対して

$$AB\,|\psi\rangle = BA\,|\psi\rangle = \sum_i a_i b_i c_i\,|i\rangle \tag{1.3.2}$$

だから。 $AB = BA$ を「A と B が交換する」という。(英語では "A and B commute." という。)

一般に固有値に重複がある場合でも、 $AB = BA$ なら同時固有状態がとれ、測定順序によらないことが知られている。演算子の非可換性が量子力学における測定順序依存性と関係している。

2 合成系

前回仄めかしただけにおわった法則 V にうつろう。

2.1 テンソル積、エンタングルメント

系 1 が状態空間 $\mathcal{H}^{(1)}$, 系 2 が状態空間 $\mathcal{H}^{(2)}$ をもつとき、系 1 と系 2 の合成系を考えられるはずである。合成系の状態空間は数学では $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ と書かれるもので与えられ、状態空間のテンソル積とよばれる。 $\mathcal{H}_{1,2}$ が有限次元のときはそれほど難しくない。

$\mathcal{H}^{(1)}$ が $n^{(1)}$ 次元だとして、基底 $|i\rangle^{(1)}$ $(i = 1, \ldots, n^{(1)})$ をとる。 $\mathcal{H}^{(2)}$ が $n^{(2)}$ 次元で基底 $|a\rangle^{(2)}$ $(a = 1, \ldots, n^{(2)})$ をとる。このとき、$\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ とは

$$|i\rangle^{(1)} \otimes |a\rangle^{(2)} =: |ia\rangle \tag{2.1.1}$$

を基底とする $n^{(1)}n^{(2)}$ 次元のベクトル空間である。

系 1 が状態 $|\psi\rangle^{(1)} = \sum c_i |i\rangle^{(1)} \in \mathcal{H}^{(1)}$ に、系 2 が状態 $|\phi\rangle^{(2)} = \sum d_a |a\rangle^{(2)} \in \mathcal{H}^{(2)}$ にいるとき、合成系の状態としては

$$|\psi\rangle^{(1)} \otimes |\phi\rangle^{(2)} = (\sum c_i |i\rangle^{(1)}) \otimes (\sum d_a |a\rangle^{(2)}) = \sum c_i d_a |ia\rangle \tag{2.1.2}$$

という状態であるものとする。

しかし、合成系の状態は $|\psi\rangle^{(1)} \otimes |\phi\rangle^{(2)}$ という形のものとは全然かぎらない。一般に、$\mathcal{H}$ が n 次元のとき、「物理的に異なる状態」は複素で $n-1$ パラメタを持っていたのを思い出す。 ($|\psi\rangle = \sum c_i |i\rangle$ と書いたときに c_i は n パラメタあるが、$|\psi\rangle$ と $z|\psi\rangle$ を同一視するので 1 パラメタ減る。) すると $\mathcal{H}^{(1)}$ の $|\psi\rangle^{(1)}$ には $n^{(1)} - 1$ パラメタ、 $\mathcal{H}^{(2)}$ の $|\phi\rangle^{(2)}$ には $n^{(2)} - 1$ パラメタあるが $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ の一般的な状態 $|\Psi\rangle$ を指定するには $n^{(1)}n^{(2)} - 1$ パラメタ必要であって、

$$(n^{(1)}n^{(2)} - 1) - (n^{(1)} - 1) - (n^{(2)} - 1) = (n^{(1)} - 1)(n^{(2)} - 1) \tag{2.1.3}$$

だけ追加のパラメタがある。

2.2 エンタングルメント

合成系の状態で、構成している二つの系の状態の積で書けないようなものを「エンタングルした状態 (entangled state)」という。

具体例として、$\mathcal{H}^{(1)}$ と $\mathcal{H}^{(2)}$ が両方とも qubit 系 $\simeq \mathbb{C}^2$だとする。 $n^{(1)} = n^{(2)} = 2$ である。$\mathbb{C}^2$ の基底を

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.2.1}$$

と書くことにする。（これは σ_z の固有値 ± 1 の固有状態だから。$|+\rangle, |-\rangle$ を使うことも多い。）$\mathcal{H}^{(1)}$ の基底は $|\uparrow\rangle^{(1)}, |\downarrow\rangle^{(1)}$; $\mathcal{H}^{(2)}$ の基底は $|\uparrow\rangle^{(2)}, |\downarrow\rangle^{(2)}$。すると合成系の基底は

$$|\uparrow\uparrow\rangle, \qquad |\downarrow\uparrow\rangle, \qquad |\uparrow\downarrow\rangle, \qquad |\downarrow\downarrow\rangle \tag{2.2.2}$$

の四つになる。合成系の一般の状態は

$$|\Psi\rangle = \Psi_{\uparrow\uparrow}|\uparrow\uparrow\rangle + \Psi_{\downarrow\uparrow}|\downarrow\uparrow\rangle + \Psi_{\uparrow\downarrow}|\uparrow\downarrow\rangle + \Psi_{\downarrow\downarrow}|\downarrow\downarrow\rangle \tag{2.2.3}$$

とかける。いつこの状態は $|\psi\rangle^{(1)} \otimes |\phi\rangle^{(2)}$ とかけるだろうか?

$$|\psi\rangle^{(1)} = c_\uparrow |\uparrow\rangle^{(1)} + c_\downarrow |\downarrow\rangle^{(1)}, \qquad |\phi\rangle^{(2)} = d_\uparrow |\uparrow\rangle^{(2)} + d_\downarrow |\downarrow\rangle^{(1)}, \tag{2.2.4}$$

とすると

$$\Psi := \begin{pmatrix} \Psi_{\uparrow\uparrow} & \Psi_{\uparrow\downarrow} \\ \Psi_{\downarrow\uparrow} & \Psi_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\uparrow d_\uparrow & c_\uparrow d_\downarrow \\ c_\downarrow d_\uparrow & c_\downarrow d_\downarrow \end{pmatrix} \tag{2.2.5}$$

となる。このとき

$$\det\Psi = \Psi_{\uparrow\uparrow}\Psi_{\downarrow\downarrow} - \Psi_{\uparrow\downarrow}\Psi_{\downarrow\uparrow} = 0 \tag{2.2.6}$$

である。逆に $\det\Psi = 0$ ならば

$$\frac{c_\uparrow}{c_\downarrow} := \frac{\Psi_{\uparrow\uparrow}}{\Psi_{\downarrow\uparrow}} = \frac{\Psi_{\uparrow\downarrow}}{\Psi_{\downarrow\downarrow}}, \qquad \frac{d_\uparrow}{d_\downarrow} := \frac{\Psi_{\uparrow\uparrow}}{\Psi_{\uparrow\downarrow}} = \frac{\Psi_{\downarrow\uparrow}}{\Psi_{\downarrow\downarrow}} \tag{2.2.7}$$

と取れば良い。だから $\det\Psi$ が合成系の状態 $|\Psi\rangle$ の「ふたつの系の状態の積での書けなさ具合」すなわち「エンタングル具合」をあらわしていることがわかった。

いま $|\Psi\rangle$ をいつものように長さ 1 にとっておく。すなわち

$$|\Psi_{\uparrow\uparrow}|^2 + |\Psi_{\uparrow\downarrow}|^2 + |\Psi_{\downarrow\uparrow}|^2 + |\Psi_{\downarrow\downarrow}|^2 = 1. \tag{2.2.8}$$

このとき $|\det\Psi|$ はどれくらい大きく出来るだろうか?

いま条件 (2.2.8) は

$$\mathrm{tr}\,\Psi^\dagger\Psi = 1 \tag{2.2.9}$$

と書けることに注意する。(tr は対角成分の和だった。）一方で「エンタングル具合」は

$$|\det\Psi|^2 = \det\Psi^\dagger \det\Psi = \det(\Psi^\dagger\Psi) \tag{2.2.10}$$

である。いま $\Psi^\dagger\Psi$ はエルミート行列だから、固有状態 $|i\rangle$ と固有値 p_i を持つ。ただし $i = 1, 2$。いいかえれば、$|1\rangle, |2\rangle$ を基底として行列表示すると、

$$\Psi = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} \tag{2.2.11}$$

となる。すると

$$\mathrm{tr}\,\Psi^\dagger\Psi = p_1 + p_2 = 1, \qquad \det\Psi^\dagger\Psi = p_1 p_2 \tag{2.2.12}$$

である。また、

$$p_1 = (|1\rangle, p_1|1\rangle) = (|1\rangle, \Psi^\dagger\Psi|1\rangle) = (\Psi|1\rangle, \Psi|1\rangle) \geq 0 \tag{2.2.13}$$

で同様に $p_2 \geq 0$ である。

これより、「エンタングル具合」$|\det\Psi|^2$ は $p_1p_2 = p_1(1-p_1) \geq 0$ であらわされ $p_1 = p_2 = 1/2$ で最大になることがわかった。

エンタングル具合は

$$S := p_1 \log p_1 + p_2 \log p_2 \tag{2.2.14}$$

であらわすこともおおい。これも $p_1 = p_2 = 1/2$ で最大になる。この量はエンタングルメントエントロピーと呼ばれる。集合 $\{p_1, p_2\}$ 自体をエンタングルメントスペクトラムと呼ぶ。

2.3 EPR 状態

合成系の観測量について考える。上記のとおり $\mathcal{H}^{(1)}$ が $n^{(1)}$ 次元で、基底を $|i\rangle^{(1)}$ $(i = 1, \ldots, n^{(1)})$ と書き、$\mathcal{H}^{(2)}$ が $n^{(2)}$ 次元で、基底を $|a\rangle^{(2)}$ $(a = 1, \ldots, n^{(2)})$ と書く。合成系の状態空間 $\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ は

$$|i\rangle^{(1)} \otimes |a\rangle^{(2)} =: |ia\rangle \tag{2.3.1}$$

を基底にもつのだった。

$\mathcal{H}^{(1)}$ の観測量 $A^{(1)}$ が

$$A^{(1)} |i\rangle = \sum_j (A^{(1)})_{ij} |j\rangle \tag{2.3.2}$$

また $\mathcal{H}^{(2)}$ の観測量 $B^{(2)}$ が

$$B^{(2)} |i\rangle = \sum_b (B^{(2)})_{ab} |a\rangle \tag{2.3.3}$$

と作用するとする。このときにこれらが合成系にどう作用するかを決めておかないといけない。それを

$$A^{(1)} |ia\rangle := \sum_j (A^{(1)})_{ij} |ja\rangle, \qquad B^{(2)} |ia\rangle := \sum_b (B^{(2)})_{ab} |ib\rangle \tag{2.3.4}$$

と定める。それぞれの演算子の作用出来る添え字(俗に業界では「足」と良く言う)に作用させるだけである。

すぐにわかるように、$A^{(1)}B^{(2)} = B^{(2)}A^{(1)}$ でどちらも

$$A^{(1)}B^{(2)} |ia\rangle = B^{(2)}A^{(1)} |ia\rangle = \sum_{jb} (A^{(1)})_{ij} (B^{(2)})_{ab} |jb\rangle \tag{2.3.5}$$

と作用する。観測量が交換すると同時に独立して測定可能というのがルールだった。よって、系 1 の観測量と系 2 の観測量が独立して測定可能ということである。

例として、いつものように qubit 系をふたつ $\mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)}$ と取り、$\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ を考える。それぞれに作用するパウリ行列を $\sigma^{(1)}_{x,y,z}, \sigma^{(2)}_{x,y,z}$ として区別する。例えば $\sigma^{(2)}_x$ は

$$\sigma^{(2)}_x |{\uparrow\uparrow}\rangle = |{\uparrow\downarrow}\rangle, \qquad \sigma^{(2)}_x |{\uparrow\downarrow}\rangle = |{\uparrow\uparrow}\rangle, \tag{2.3.6}$$

$$\sigma^{(2)}_x |{\downarrow\uparrow}\rangle = |{\downarrow\downarrow}\rangle, \qquad \sigma^{(2)}_x |{\downarrow\downarrow}\rangle = |{\downarrow\uparrow}\rangle. \tag{2.3.7}$$

となる。$\mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$ は四次元だから、$\sigma^{(2)}_x$ も 4×4 行列として書けるけれども、それをあからさまに書いてもあまり理解の助けにならない気が僕はする。

$\sigma^{(1)}_x$ と $\sigma^{(1)}_z$ は交換しないから同時測定はできないが、$\sigma^{(1)}_x$ と $\sigma^{(2)}_z$ は交換するので同時測定はできることに注意する。

さて、この系の状態

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \tag{2.3.8}$$

を考える。前節に従って $p_{1,2}$ を計算すると $p_1 = p_2 = 1/2$ で、もっともエンタングルした状態の一例である。

この状態で $\sigma_z^{(1)}$ と $\sigma_z^{(2)}$ を測定した結果を $(\mathsf{s}_z^{(1)}, \mathsf{s}_z^{(2)})$ と書くと、50% で $(\mathsf{s}_z^{(1)}, \mathsf{s}_z^{(2)}) = (+1, -1)$ で 50% で $(\mathsf{s}_z^{(1)}, \mathsf{s}_z^{(2)}) = (-1, +1)$ である。

系 1 で測った結果がどちらになるかはわからないが、系 1 で測った結果から、100% の確実さで系 2 での結果がわかる。これは系1と系2が何百億光年離れていてもこういうことである。[1]

Einstein-Podolsky-Rosen[2] はこの事実をもって、量子力学は不完全なんじゃないの、と思った。彼らの議論はこうである(原論文をみればわかるが、彼らは二 qubit 系でやったのではないが、まあ同じことである。): 状態 $|\psi\rangle$ においては、qubit 1 が $\uparrow$ でqubit B が $\downarrow$ だと測定前から決まっているものと、qubit A が $\downarrow$ でqubit B が $\uparrow$ だと測定前から決まっているものが混ざっているだけなのではないか？

箱のなかに黒と白の小さなボールがはいっていて、二人が手を突っ込んで一つずつ取り出し、しっかり握っておく。二人が遠くに離れた時点で、片方が手をひらいて白だったら、もう片方は何百光年先にいても、手を開けば黒になっているに決まっている。手を開く前から決まっているはずの何かを、量子力学では見過ごしているのではないか？

しかし、こういうわけにはいかないことは Bell (1964) 以来よくわかっている。これを次の節で三qubit 系を例にとってみてみよう。

2.4 GHZ状態

qubit 1, qubit 2, qubit 3 が三つある系を考える。状態空間 $\mathcal{H}_{A+B+C}$ の基底は

$$|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \tag{2.4.1}$$

の八つである。以前と同様、qubit 1, 2, 3 のパウリ行列を $\sigma_{x,y,z}^{(1)}$, $\sigma_{x,y,z}^{(2)}$, $\sigma_{x,y,z}^{(3)}$ と書く。どうしても行列で書きたいひとは、がんばって 8×8 行列を書き下してみよう。

さて、Greenberger-Horne-Zeilinger (1989)[3] に従って状態

$$|\Psi\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \tag{2.4.2}$$

---

[1] これを書いていていま適当に検索すると最近 192km 離れたものをつくったらしい、Wengerowsky, Joshi, Steinlechner, et al. “Passively stable distribution of polarisation entanglement over 192 km of deployed optical fibre.” npj Quantum Inf 6 (2020) 5 [arXiv:1907.04864 [quant-ph]] を参照。(色が変わっている部分は印刷前にクリックすればオンライン版の論文に飛びます、以下同様。家からだとお金を払わないと読めない場合でも、大学のゲートウェイ経由で電子ジャーナルのサイトに行くと読めるはずなので、練習としてやってみては如何でしょう。)

[2] Einstein, Podolsky, Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, Phys. Rev. 47 (1935) 777

[3] 原論文は会議の予稿集で手に入れにくい。雑誌に出たのは Greenberger, Horne, Shimony, Zeilinger “Bell’s theorem without inequalities”, Amer. Jour. Phys. 58 (1990) 1131 。この Greenberger さんは面白い人のようで、O. W. Greenberg, D. M. Greenberger, T. V. Greenbergest arXiv:hep-ph/9306225 という論文がある。O. W. Grreenberg さんは quark の color の概念の発見者のひとりで、思い出話が https://www.ias.edu/ideas/2015/greenberg-colorから読める。三人目の Greenbergest さんはおそらく存在しない。2000 年に実験の報告もある: Pan, Bouwmeester, Daniell, et al. “Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger–Horne–Zeilinger entanglement” Nature 403 (2000) 515–519。

を考える。具体的に計算すると、

$$\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_x^{(3)}|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle, \tag{2.4.3}$$
$$\sigma_x^{(1)}\sigma_y^{(2)}\sigma_y^{(3)}|\Psi\rangle = +|\Psi\rangle, \tag{2.4.4}$$
$$\sigma_y^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_y^{(3)}|\Psi\rangle = +|\Psi\rangle, \tag{2.4.5}$$
$$\sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}\sigma_x^{(3)}|\Psi\rangle = +|\Psi\rangle. \tag{2.4.6}$$

であることがわかる。これは、二つ目の式を例にとっていえば、状態 $|\Psi\rangle$ において、A のqubit の x 成分、B のqubit の y 成分、C のqubit の y 成分を測定して $(\mathsf{s}_x^{(1)},\mathsf{s}_y^{(2)},\mathsf{s}_y^{(3)})$ を得たならば、$\mathsf{s}_x^{(1)}\mathsf{s}_y^{(2)}\mathsf{s}_y^{(3)}=+1$ である、もっと具体的にいえば

$$(\mathsf{s}_x^{(1)},\mathsf{s}_y^{(2)},\mathsf{s}_y^{(3)}) = (+1,+1,+1),\ (+1,-1,-1),\ (-1,+1,-1),\ (-1,-1,+1) \tag{2.4.7}$$

のどれかであるということ。

さて、E-P-R にならって、状態 Ψ は、測定する前から、 qubit $1,2,3$ の x,y,z 成分を測定したら $s_{x,y,z}^{(1,2,3)}=\pm1$ のどれが出るか結局は決まっているものの混合に過ぎないのではないか? と考えてみると、すぐに矛盾が生じることがわかる、なぜなら、もしそうだとすると(2.4.4), (2.4.5), (2.4.6) より

$$\mathsf{s}_x^{(1)}\mathsf{s}_y^{(2)}\mathsf{s}_y^{(3)} = \mathsf{s}_y^{(1)}\mathsf{s}_x^{(2)}\mathsf{s}_y^{(3)} = \mathsf{s}_y^{(1)}\mathsf{s}_y^{(2)}\mathsf{s}_x^{(3)} = +1 \tag{2.4.8}$$

であるから、三つかけあわせて

$$\mathsf{s}_x^{(1)}\mathsf{s}_x^{(2)}\mathsf{s}_x^{(3)} = +1 \tag{2.4.9}$$

を得るが、(2.4.3) より

$$\mathsf{s}_x^{(1)}\mathsf{s}_x^{(2)}\mathsf{s}_x^{(3)} = -1 \tag{2.4.10}$$

だから。

三qubit 系を考えなくても、二qubit 系でも $s_{x,y,z}^{(1,2)}$ の測定前での存在を仮定すると、測定結果に関するある不等式を導くことができ、それは量子力学と矛盾することが知られている。これらの不等式は Bell の不等式と呼ばれる。

二qubit 系で不等式を考えるのと、三qubit 系でこのように考えるとのどちらがややこしいかわからないが、複合系の練習としてここではまず三qubit 系で議論してみた。

2.5 二qubit 系での不等式の考察

多分講義でやる時間はないけれど、せっかくなので二qubit 系で Bell の不等式の一例を導出してみよう[4]。

まず量子力学において一般的な事実として期待値について学んでおく。状態空間 $\mathcal{H}$ の状態 $|\psi\rangle$ を長さ 1 にとっておく。観測量 A が固有ベクトル $|i\rangle$ において固有値が a_i だとする。 a_i を得る確率は $|\psi\rangle=\sum_i c_i|i\rangle$ とかいたときに $|c_i|^2$ だった。よって観測量 A の期待値は

$$\langle A\rangle = \sum_i a_i|c_i|^2 \tag{2.5.1}$$

[4]僕はこの議論は大昔ペンローズの「皇帝の新しい心」という一般書を読んでいて知った。(内容もいまから思えばトンデモに近いが、量子力学の一般向けの説明の部分はわるくないと思う。しかしこの日本語訳はひどい。タイトルは「裸の王様」が英語で “Emperor's new clothes” というのの clothes を minds にしたものだと知ったのも随分後で、タイトルの日本語訳もなんとかならなかったのかと思うが...) 最近ペンローズが何に基づいて書いたかしらべたところ、 N. David Mermin, Physics Today **38**, 4, pp.38–47 (1985) だそうである。

であるが、これは実は $(|\psi\rangle, A|\psi\rangle)$ である。なぜなら、

$$(|\psi\rangle, A|\psi\rangle) = \sum_{i,j}(c_i|i\rangle, Ac_j|j\rangle) = \sum_i a_i|c_i|^2 \tag{2.5.2}$$

であるから。これは展開係数 c_i を計算せずに期待値だけもとめるとき便利である。

さて、

$$\sigma(\theta) = (\cos\theta)\sigma_z + (\sin\theta)\sigma_x \tag{2.5.3}$$

を考える。これは (z,x) 平面で角度 θ 方向の角運動量の成分である。

EPR state $|\Psi\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$ に対して

$$\langle\sigma(\theta)^{(1)}\sigma(\phi)^{(2)}\rangle = (\Psi, \sigma(\theta)^{(1)}\sigma(\phi)^{(2)}\Psi) = -\cos(\theta-\phi) \tag{2.5.4}$$

が計算できる。(いい計算練習なので、やってみること!) これは、qubit 1 で方向 θ のqubit を測定した結果の ±1 と、qubit 2 で方向 ϕ のqubit を測定した結果の ±1 の積の期待値が $-\cos(\theta-\phi)$ ということ。まあ、だいたい反対方向を向いているということです。

さて、そこで、qubit 1 に対しては、$\sigma(0)^{(1)}$, $\sigma(120°)^{(1)}$, $\sigma(240°)^{(1)}$ のどれかを 1/3 の確率で、 qubit 2 に対して、$\sigma(0)^{(2)}$, $\sigma(120°)^{(2)}$, $\sigma(240°)^{(2)}$ のどれかを 1/3 の確率で、測定することにする。すると、この測定の期待値は

$$\frac{1}{3}\sum_{\theta=0,120°,240°}\frac{1}{3}\sum_{\phi=0,120°,240°}\langle\psi|\sigma(\theta)^{(1)}\sigma(\phi)^{(2)}|\psi\rangle = \frac{1}{9}\sum\sum -\cos(\theta-\phi) = 0 \tag{2.5.5}$$

である。

ここで、古典的にかんがえて、「もしqubit 1, 2 で $\sigma(\theta)$ を測定したときの結果 $\mathsf{s}_\theta^{(1,2)} = \pm1$」が決まっているとしよう。$\langle\sigma(\theta)^{(1)}\sigma(\theta)^{(2)}\rangle = -1$ から、$s_\theta^{(2)} = -s_\theta^{(1)}$ であって、状態 $|\Psi\rangle$ は

$$(s_0^{(1)}, s_{120°}^{(1)}, s_{240°}^{(1)}) = (+++), (---) \tag{2.5.6}$$

もしくは

$$(s_0^{(1)}, s_{120°}^{(1)}, s_{240°}^{(1)}) = (+--), (-+-), (--+), (-++), (+-+), (++-) \tag{2.5.7}$$

に細分される。場合 (2.5.6) においては、

$$\frac{1}{3}\sum_{\theta=0,120°,240°}\frac{1}{3}\sum_{\phi=0,120°,240°} s_\theta^{(1)}s_\theta^{(2)} = -1, \tag{2.5.8}$$

場合 (2.5.7) においては、

$$\frac{1}{3}\sum_{\theta=0,120°,240°}\frac{1}{3}\sum_{\phi=0,120°,240°} s_\theta^{(1)}s_\theta^{(2)} = -\frac{1}{9}, \tag{2.5.9}$$

だから、場合 (2.5.6) と場合 (2.5.7) の割合が何にせよ、

$$\frac{1}{3}\sum_{\theta=0,120°,240°}\frac{1}{3}\sum_{\phi=0,120°,240°} s_\theta^{(1)}s_\theta^{(2)} < -\frac{1}{9} \tag{2.5.10}$$

であって、量子力学の予言 (2.5.5) と矛盾することがわかる。