

駒場現代物理学(2020)第10,11回講義ノート

0 まえおき

d 次元イジング模型は、 d 次元の格子点 \vec{x} に古典的なスピン自由度 $s(\vec{x}) = \pm 1$ があるとして、配位 $\{s(\vec{x})\}$ が起こる確率が

$$P_{\{s(\vec{x})\}} = Z(J)^{-1} \prod_{\vec{x}, \vec{y} \text{ は隣り合う}} e^{Js(\vec{x})s(\vec{y})} \quad (0.1)$$

であたえられるというものだった。全部の確率を足すと 1 のはずなので、

$$Z(J) = \sum_{\{s\}} \prod_{s \text{ と } s' \text{ 隣接する}} e^{Jss'} \quad (0.2)$$

である。この $Z(J)$ を系の分配関数 (partition function) という。格子点の数を N とすると、ふつう $N \gg 0$ では

$$Z(J) \sim e^{NF(J)} \quad (0.3)$$

とふるまう。 $F(J)$ は自由エネルギーと呼ばれる。¹

分配関数もしくは等価だが自由エネルギーがわかれば系の熱力学的量は何でも計算できることが知られている。 J が一般の値だと、分配関数は J に関して滑らか、無限回微分可能だが、相転移点では $Z(J)$ が有限回しか微分出来なくなることも知られている。そのあたりの一般論も重要だが、熱統計力学の教科書で勉強してください。今回は数理的な話に終始します。

1 1次元イジング模型

まずは 1 次元のイジング模型からはじめましょう。 N 格子点あるとして、スピンを $s_1, s_2, \dots, s_N = \pm 1$ とし、

$$Z(J) = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} \prod_i e^{Js_i s_{i+1}} \quad (1.1)$$

である。ただし $s_{N+1} := s_1$ と定めた。これを計算しよう。ここで $T_{ss'} = e^{Jss'}$ は $s, s' = \pm 1$ なので 2×2 の行列だと思える:

$$T = \begin{pmatrix} e^{+J} & e^{-J} \\ e^{-J} & e^{+J} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

ただし一行目、一列目は $s, s' = +1$ に、二行目、二列目は $s, s' = -1$ に対応させた。 T は qubit に作用していると思える。すると上の (1.1) の和の一部分 $\sum_{s'} e^{Jss'} e^{Js's''}$ は丁度行列 T を二回掛けていることに相当するので

$$\sum_{s'} e^{Jss'} e^{Js's''} = (T^2)_{ss''} \quad (1.3)$$

¹通常ここでいう $F(J)/J$ を自由エネルギーと言いますが、まあ...

となる。これにより (1.1) の s_2, \dots, s_N の和はすぐとれて

$$Z(J) = \sum_{s_1} (T^N)_{s_1, s_{N+1}} \quad (1.4)$$

となる。 $s_{N+1} := s_1$ だったから

$$Z(J) = \text{tr} T^N. \quad (1.5)$$

トレースを取るには T を対角化すればよい。 T の固有ベクトルはどうみても

$$T \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = (e^J + e^{-J}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = (e^J - e^{-J}) \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

であるので、

$$T \sim \begin{pmatrix} e^J + e^{-J} & 00 \\ 00 & e^J - e^{-J} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

となり、

$$Z(J) = (e^J + e^{-J})^N + (e^J - e^{-J})^N \quad (1.8)$$

である。 $N \gg 0$ とすると第二項は無視出来て

$$Z(J) \sim (e^J + e^{-J})^N \quad (1.9)$$

これを $= e^{NF(J)}$ と書くと、

$$F(J) = \log(e^J + e^{-J}) \quad (1.10)$$

となって、これは J の滑らかな関数である。というわけで相転移は起きない。

1次元古典格子系が qubit ひとつという単純な量子力学系になった。

2 2次元イジング模型

2.1 復習

2次元イジング模型の分配関数は $M \times N$ の格子にあるとして

$$\begin{aligned} Z(J, J') = & \sum_{s_{1,1}=\pm 1} \sum_{s_{1,2}=\pm 1} \cdots \sum_{s_{1,N}=\pm 1} \\ & \sum_{s_{2,1}=\pm 1} \sum_{s_{2,2}=\pm 1} \cdots \sum_{s_{2,N}=\pm 1} \\ & \vdots \\ & \sum_{s_{M,1}=\pm 1} \sum_{s_{M,2}=\pm 1} \cdots \sum_{s_{M,N}=\pm 1} \\ & \prod_{i=1}^M \prod_{j=1}^N e^{J s_{i,j} s_{i,j+1}} e^{J' s_{i,j} s_{i+1,j}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

である。ただし周期境界条件をつかうこととし、

$$s_{M+1,j} := s_{1,j}, \quad s_{i,N+1} := s_{i,1} \quad (2.2)$$

と定める。ただし、縦方向と横方向の結合の強さをかえた。

前回の Kramers-Wannier 変換をやりなおすと、 $Z(J, J')$ と $Z(\tilde{J}, \tilde{J}')$ は

$$(J, J') \leftrightarrow (\tilde{J}, \tilde{J}') \quad (2.3)$$

のもとで²

$$Z(J, J') = (2 \sinh 2J)^{NM/2} (2 \sinh 2J')^{NM/2} Z(\tilde{J}, \tilde{J}') \quad (2.4)$$

ただし

$$\sinh 2J \sinh 2\tilde{J}' = 1, \quad \sinh 2J' \sinh 2\tilde{J} = 1 \quad (2.5)$$

で関係づく。そのため、相転移点は

$$J = \tilde{J} \iff \sinh 2J \sinh 2J' = 1 \quad (2.6)$$

のところにありと思われる。関係式 (2.5) は

$$e^{-2J} = \tanh \tilde{J}', \quad e^{-2J'} = \tanh \tilde{J} \quad (2.7)$$

ともかける。

2.2 方針

以下、分配関数を次の順序で計算する:

1. N qubit 系への書き換える。
→ $2^N \times 2^N$ 行列の対角化に帰着する。
2. これを $2N$ 個のフェルミオンの系へ書き換える。
→ $2N \times 2N$ 行列の対角化に帰着する。
3. これを離散フーリエ変換する。
→ 2×2 行列の対角化へ帰着する。

2.3 量子系への書き換え

二次元イジングを一次元イジングのときと同じトリックで解こう。そのために、 $s_{i,j}$ で i を固定して $j = 1, \dots, N$ を動かしたセット

$$(s_{\bullet,1}, s_{\bullet,2}, \dots, s_{\bullet,N}) \quad (2.8)$$

を 2^N 種類の値をとるひとつの添え字だと思おう。 $s_{\bullet,j} = \pm 1$ が j 番めの qubit の

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

に対応していると思うと、qubit が N 個あることになる。 $s_{\bullet,j}$ は

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

² $M \times N$ の格子に周期的境界条件をつけて Kramers-Wannier 変換をすると以下の式はおおよそ正しいが微妙にウソである。 $N, M \rightarrow \infty$ の極限では問題はないのであるが。ここの微妙にウソなところにも実はトポロジカルな面白い問題が潜んでいるのだが、今回は省略する。

の j 番めの qubit での固有値である。

まず上の (2.1) の

$$\mathcal{T} := \prod_{j=1}^N e^{J' s_{\bullet,j} s_{\star,j}} \quad (2.11)$$

という部分を考える。これは添え字 (s_1, s_2, \dots, s_N) と $(s'_1, s'_2, \star, s'_N)$ をもつので、 $2^N \times 2^N$ の行列だと思える。ただし $s_j := s_{\bullet,j}$, $s'_j := s_{\star,j}$ と略記した。

各 j に対しては単に上の T (1.2) で J を J' にしたもの

$$T' = \begin{pmatrix} e^{J'} & e^{-J'} \\ e^{-J'} & e^{J'} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

があるだけで、

$$\mathcal{T}_{(s_1, s_2, \dots, s_N), (s'_1, s'_2, \star, s'_N)} = T'_{s_1, s'_1} T'_{s_2, s'_2} \cdots T'_{s_N, s'_N} \quad (2.13)$$

ということ。

Qubit N 個の状態空間

$$\underbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^2}_{N \text{ 回}} \quad (2.14)$$

に対して作用しているとおもうと

$$\mathcal{T} = T'^{(1)} T'^{(2)} \cdots T'^{(N)} \quad (2.15)$$

ということ。いま $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して

$$e^{K\sigma_x} = \begin{pmatrix} \cosh K & \sinh K \\ \sinh K & \cosh K \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

だから、

$$\tanh K = e^{-2JB} \quad (2.17)$$

として

$$T' = (2 \sinh 2J)^{1/2} e^{K\sigma_x}. \quad (2.18)$$

(比例定数は両辺の \det をとればわかる。) よって

$$\mathcal{T} = (2 \sinh 2J)^{N/2} e^{K \sum_{j=1}^N \sigma_x^{(j)}}. \quad (2.19)$$

同様に、上の (2.1) の

$$\mathcal{S} := \prod_{j=1}^N e^{J s_{\bullet,j} s_{\bullet,j+1}} \quad (2.20)$$

の部分はどうか? σ_z の ± 1 の固有値が s_z だったから、まず $(j, j+1)$ に関する qubit 二つについて考えると、これは $e^{J \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)}}$ である。かけあわせて、

$$\mathcal{S} := \prod_{j=1}^N e^{J \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)}} \quad (2.21)$$

ということがわかった。結局

$$Z(J, J') = \text{tr}(\mathcal{TS})^M = (2 \sinh 2J)^{NM/2} \text{tr} \left(e^{J \sum_j \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)}} e^{K \sum_j \sigma_x^{(j)}} \right)^M \quad (2.22)$$

と書き直せた。非自明な部分は

$$W(J, K) := \text{tr} \left(e^{J \sum_j \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)}} e^{K \sum_j \sigma_x^{(j)}} \right)^M \quad (2.23)$$

である。大きな括弧内は $2^n \times 2^n$ 行列である。これが対角化できて、固有値がわかれば、その M 乗の和をすれば分配関数が出る。

二次元古典格子系が、一次元の qubit 列の問題に書き直された。一般に $d+1$ 次元古典格子系は d 次元量子格子模型に書き換えられることが知られている³。

2.4 量子系に書き換えた後の Kramers-Wannier 変換

上記の (2.17) は (2.7) と実は同じで、 $K = \tilde{J}$ である。Kramers-Wannier 変換はそうすると

$$W(J, K) = W(K, J) \quad (2.24)$$

すなわち

$$\text{tr} \left(e^{J \sum_j \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)}} e^{K \sum_j \sigma_x^{(j)}} \right)^M = \text{tr} \left(e^{K \sum_j \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)}} e^{J \sum_j \sigma_x^{(j)}} \right)^M \quad (2.25)$$

ということで、臨界点は $J = K$ にある。

この等式は純代数的に理解出来る。いま

$$Z^{(j)} := \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)}, \quad X^{(j)} := \sigma_x^{(j)} \quad (2.26)$$

とすると、

- $Z^{(j)}$ たちは互いに交換し、それぞれ固有値は ± 1 。
- $X^{(j)}$ たちも互いに交換し、それぞれ固有値は ± 1 。
- $Z^{(j)}$ と $X^{(j')}$ は

$$Z^{(j)} X^{(j')} = \begin{cases} -X^{(j')} Z^{(j)} & (j' = j, j+1) \\ +X^{(j')} Z^{(j)} & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (2.27)$$

を満たす。

そこで

$$\tilde{Z}^{(j)} := X^{(j+1)}, \quad \tilde{X}^{(j)} := Z^{(j)}, \quad (2.28)$$

としてやると、これはチルダなしの $Z^{(j)}$, $X^{(j)}$ とおなじ交換関係を満たす。よって

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(e^{J \sum_j Z^{(j)}} e^{K \sum_j X^{(j)}} \right)^M &= \text{tr} \left(e^{J \sum_j \tilde{Z}^{(j)}} e^{K \sum_j \tilde{X}^{(j)}} \right)^M \\ &= \text{tr} \left(e^{K \sum_j \tilde{X}^{(j)}} e^{J \sum_j \tilde{Z}^{(j)}} \right)^M = \text{tr} \left(e^{K \sum_j Z^{(j)}} e^{J \sum_j X^{(j)}} \right)^M \end{aligned} \quad (2.29)$$

より、(2.25) が示された⁴。

³M. Suzuki, "Relationship between d -Dimensional Quantal Spin Systems and $(d+1)$ -Dimensional Ising Systems: Equivalence, Critical Exponents and Systematic Approximants of the Partition Function and Spin Correlations", *Progress of Theoretical Physics*, 56 (1976) 1454 など参照。

⁴ここの周期境界条件のもとではちょっとだけウソである。というのは、 $\prod Z^{(i)}$ は自動的に $= +1$ だが、

2.5 鈴木-Trotter 公式

このままでも解けるのだけれど、少々簡単化するため、 $\underline{J} := JM, \underline{K} := KM$ を固定して M を大きくする極限を考えよう。すると

$$\underline{W}(\underline{J}, \underline{K}) := \lim_{M \rightarrow \infty} \text{tr} \left(e^{\frac{1}{M} \underline{J} \sum_j \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)}} e^{\frac{1}{M} \underline{K} \sum_j \sigma_x^{(j)}} \right)^M \quad (2.30)$$

をかんがえることになるが、鈴木-Trotter 公式⁵

$$\lim_{M \rightarrow \infty} (e^{A/M} e^{B/M})^M = e^{A+B} \quad (2.31)$$

というものがあるので、

$$\underline{W}(\underline{J}, \underline{K}) = \text{tr} \left(e^{\underline{J} \sum_j \sum_j \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)} + \underline{K} \sum_j \sigma_x^{(j)}} \right) \quad (2.32)$$

ということになる。これによって問題は

$$H = \underline{J} \sum_j \sum_j \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)} + \underline{K} \sum_j \sigma_x^{(j)} \quad (2.33)$$

という spin-chain ハミルトニアンに対角化に帰着した。

鈴木-Trotter 公式自体は $e^{A/M} = 1 + A/M + O(M^{-2})$ なので

$$e^{A/M} e^{B/M} = 1 + \frac{A}{M} + \frac{B}{M} + O(M^{-2}) = e^{(A+B)/M} + O(M^{-2}) \quad (2.34)$$

各項の誤差が $O(M^{-2})$ だから、 M 乗して

$$(e^{A/M} e^{B/M})^M = e^{A+B} + O(M^{-1}) \quad (2.35)$$

ということ。

2.6 フェルミオン系

唐突だが、エルミート演算子 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{2N}$ で

$$\psi_a \psi_a = 1 \quad (2.36)$$

だが

$$\psi_a \psi_b = -\psi_b \psi_a \quad (2.37)$$

を満たすものを考える。このような互いに反交換する演算子をフェルミオンという。上二つの式は

$$\psi_a \psi_b + \psi_b \psi_a = 2\text{id}_{ab} \quad (2.38)$$

と書くのが便利である。ただし id は単位行列。

⁵ $X^{(i)}$ は固有値 ± 1 の両方をもつので。修正法は昔から知られている。最近の自分の論文 Hsieh-Nakayama-YT “On fermionic minimal models” [arXiv:2002.12283](https://arxiv.org/abs/2002.12283) の Supplementary material のところに正しい式が書いてあります。

⁵M. Suzuki, “Generalized Trotter’s formula and systematic approximants of exponential operators and inner derivations with applications to many-body problems”, *Comm. Math. Phys.* 51 (1976) 183-190 など参照。

$N = 1$ の場合は

$$\psi_1 = \sigma_y, \quad \psi_2 = \sigma_x \quad (2.39)$$

などと取れば良い。 $N = 2$ の場合は、qubit を 2 つ用意して

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sigma_y^{(1)} \\ \psi_2 &= \sigma_x^{(1)} \\ \psi_3 &= \sigma_z^{(1)} \sigma_y^{(2)} \\ \psi_4 &= \sigma_z^{(1)} \sigma_x^{(2)} \end{aligned} \quad (2.40)$$

と取れば良く、 $N = 3$ の場合はさらに qubit をもうひとつ用意して

$$\begin{aligned} \psi_5 &= \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_y^{(3)} \\ \psi_6 &= \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_x^{(3)} \end{aligned} \quad (2.41)$$

と定めれば良い。一般にはこの調子で

$$\begin{aligned} \psi_{2k-1} &= \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \dots \sigma_z^{(k-1)} \sigma_y^{(k)} \\ \psi_{2k} &= \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \dots \sigma_z^{(k-1)} \sigma_x^{(k)} \end{aligned} \quad (2.42)$$

と定めれば良い。これらは 2^N 次元の状態空間に作用する。

さて、

$$i\psi_1\psi_2 = \sigma_z^{(1)} \quad (2.43)$$

であるので、 $i\psi_1\psi_2$ の固有値は ± 1 である。同様に

$$i\psi_{2k-1}\psi_{2k} = \sigma_z^{(k)} \quad (2.44)$$

であるので、

$$H = i \sum_{k=1}^N m_k \psi_{2k-1} \psi_{2k} = \sum_k m_k \sigma_z^{(k)} \quad (2.45)$$

の固有値は

$$\pm m_1 \pm m_2 \pm m_3 \dots \pm m_N \quad (2.46)$$

の 2^N 個である。

一般に実反対称行列 M_{st} に対して

$$H(M) = \frac{i}{2} \sum_{s,t} M_{st} \psi_s \psi_t = \frac{i}{2} \vec{\psi}^T M \vec{\psi} \quad (2.47)$$

はエルミートである。これの固有値は次のようにもとめられる。

定理 2.6.1 上記 $H(M)$ は $2^N \times 2^N$ 行列であるが、その固有値は $2N \times 2N$ 行列 iM_{ab} の固有値を $\pm m_1, \dots, \pm m_k$ とすると

$$\pm m_1 \pm m_2 \pm m_3 \dots \pm m_N \quad (2.48)$$

の 2^N 個で与えられる。

これは次のようにわかる。まず、 U を $2N \times 2N$ の実回転行列、すなわち各列ベクトルの長さが 1 で互いに直交するようなものとする。これは

$$U^T U = U U^T = \text{id} \quad (2.49)$$

を満たす。すると

補題 2.6.2

$$\psi'_s = \sum_a U_{sa} \psi_a \quad (2.50)$$

と定めると ψ'_s たちは ψ_s たちと同様の交換関係をみたす。

実際、

$$\psi'_s \psi'_t + \psi'_t \psi'_s = \sum_{a,b} U_{sa} U_{tb} (\psi_a \psi_b + \psi_b \psi_a) = \sum_{a,b} U_{sa} U_{tb} 2\text{id}_{ab} = 2\text{id}_{st}. \quad (2.51)$$

これより次の重要な事実がわかる:

補題 2.6.3 $H(U^T M U)$ と $H(M)$ は同じ固有値を持つ。

何故なら、

$$H(U^T M U) = \frac{i}{2} \vec{\psi}^T U^T M U \vec{\psi} = \frac{i}{2} \vec{\psi}'^T M \vec{\psi}' \quad (2.52)$$

だが、 ψ_a たちと ψ'_s たちは同じ代数関係をみたすので。

というわけで、反対称行列 M を実回転行列 U を用いて $U^T M U$ と変換して、なるべく簡単にすればよい。

補題 2.6.4 勝手な実反対称行列 M は適切な回転行列 U をもちいて

$$U^T M U = \begin{pmatrix} 0 & +m_1 & & & & & & & \\ -m_1 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & +m_2 & & & & & \\ & & -m_2 & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & +m_3 & & & \\ & & & & -m_3 & 0 & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix} =: \tilde{M} \quad (2.53)$$

と取れる。ここで、 $\pm m_k$ は iM の固有値である。

この補題を示す前に、先に定理 2.6.1 を示してしまおう: 補題 2.6.3 より、 $H(\tilde{M})$ の固有値をもとめればよいが、

$$H(\tilde{M}) = \frac{i}{2} \vec{\psi}'^T \tilde{M} \vec{\psi}' = \sum_k i m_k \psi_{2k-1} \psi_{2k} \quad (2.54)$$

であり、これは (2.45) で既に調べたように (2.46) を固有値に持つ。これが示したいことだった。

補題 2.6.4 を占めそう。まず実反対称行列 M_{st} に対して iM_{st} はエルミートだから、固有値と固有ベクトルがとれる。固有値は \pm のペアで出る。というのは、

$$\sum_t iM_{st}w_t = +mw_s \quad (2.55)$$

ならば、複素共役をとって

$$\sum_t iM_{st}\bar{w}_t = -m\bar{w}_s \quad (2.56)$$

なので。さらに w_s を実部と虚部に分けて $w_s = u_s + iv_s$ と書くと、

$$\sum_t M_{st}u_t = -mv_s, \quad \sum_t M_{st}v_t = +mu_s \quad (2.57)$$

が得られる。 (w_s) と (\bar{w}_s) は直交するので、 (u_s) と (v_s) も直交する。これが $\pm m_k$, $k = 1, \dots, N$ に対してあるので、添え字をつけて

$$\sum_t M_{st}(u_k)_s = -m_k(v_k)_s, \quad \sum_t M_{st}(v_k)_s = +m_k(u_k)_s \quad (2.58)$$

となる。ベクトル \vec{u}_k, \vec{v}_k は長さ 1 で互いに直交するようにしておく。すると

$$U = \left(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2, \dots, \vec{u}_N, \vec{v}_N \right) \quad (2.59)$$

は

$$U^T U = \text{id} \quad (2.60)$$

で、(2.58) は

$$MU = U \begin{pmatrix} 0 & +m_1 & & & & \\ -m_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & +m_2 & & \\ & & -m_2 & 0 & & \\ & & & & 0 & +m_3 & \ddots \\ & & & & -m_3 & 0 & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} =: \tilde{M} \quad (2.61)$$

ということになり、左から U^T をかけて $U^T M U = \tilde{M}$ が示された。

2.7 Jordan-Wigner 変換、結論

さて、我々はイジング模型のハミルトニアン (2.33) を対角化したいのだった。再掲すると

$$H = \underline{J} \sum_j \sum_j \sigma_y^{(j)} \sigma_y^{(j+1)} + \underline{K} \sum_j \sigma_z^{(j)} \quad (2.62)$$

である。ただし (2.33) に比較して $\sigma_z \rightarrow \sigma_y$, $\sigma_x \rightarrow \sigma_z$ という書き換えをおこなった。これをフェルミオン系のハミルトニアン (2.47) に書き換えて解いてしまおうというのである。

と書くと

$$F(\underline{J}, \underline{K}) = \log 2 + \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \log \cosh |\underline{K} - \underline{J}e^{-2\pi is/N}| \quad (2.72)$$

これを $N \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$F(\underline{J}, \underline{K}) = \log 2 + \int_0^{2\pi} \log \cosh |\underline{K} - \underline{J}e^{-i\ell}| \frac{d\ell}{2\pi} \quad (2.73)$$

ということがわかった。

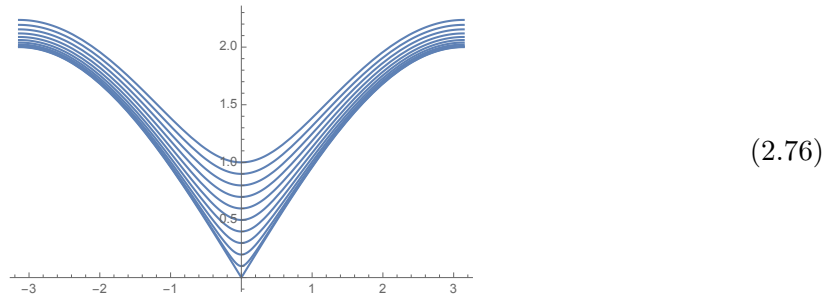
$$|\underline{K} - \underline{J}e^{-i\ell}| = \sqrt{(\underline{J} - \underline{K})^2 + \underline{J}\underline{K}(2 \sin \frac{\ell}{2})^2} \quad (2.74)$$

だから、被積分関数は $\underline{J} \neq \underline{K}$ だと滑らかだが $\underline{J} = \underline{K}$ だと $\ell = 0$ で尖る。これより、 $F(\underline{J}, \underline{K})$ はそこで無限回微分可能でなくなる。

参考の為

$$\sqrt{(2 \sin \frac{\ell}{2})^2 + \epsilon^2} \quad (2.75)$$

を $\epsilon = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ で図示すると



となる。横軸は $-\pi < \ell < \pi$ 。

ここまでは二十世紀半ばの話であるが、さらにすこし拡張して

$$H = \underline{J} \sum_j \sum_j \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j+1)} + \underline{K} \sum_j \sigma_x^{(j)} + \underline{K}' \sum_j \sigma_z^{(j)} \quad (2.77)$$

とした模型はごく最近も実験の論文がでていた⁷。

3 3次元イジング模型

は1次元、2次元のようには厳密に解かれていません。聴衆の皆さんのなかのどなたかが
教員になって似たような講義をするときには解かれているかもしれませんが...

⁷ [arXiv:2005.13302](https://arxiv.org/abs/2005.13302), [arXiv:2005.13772](https://arxiv.org/abs/2005.13772), [arXiv:2006.12956](https://arxiv.org/abs/2006.12956) が最近の実験の論文。最近ようやく E_8 からくる八種の励起が全部見えたそうである。 E_8 とどう関係があるかという数理的な話についてははじめての実験的測定 [arXiv:1103.3694](https://arxiv.org/abs/1103.3694) のあとに数学者向けに書かれた [arXiv:1012.5407](https://arxiv.org/abs/1012.5407) が理論物理屋にもわかりやすくまとまっていると思う。