

駒場現代物理学(2020)第12回講義ノート

1 前回の復習

1.1 古典二次元から量子一次元への変換

古典二次元イジング模型を量子一次元イジング模型

$$H = J \sum_j \sum_j \sigma_y^{(j)} \sigma_y^{(j+1)} + K \sum_j \sigma_z^{(j)} \quad (1.1)$$

に変換した。但し $j = 1, \dots, N$. 前回は J, K のことを $\underline{J}, \underline{K}$ と書いたが、今回は前回の J, K は使わないので、下線は省くことにする。

1.2 フェルミオン演算子での書き直し

次にエルミート演算子 $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{2N}$ で

$$\psi_a \psi_a = 1, \quad \psi_a \psi_b = -\psi_b \psi_a \quad (a \neq b) \quad (1.2)$$

を満たすものを以下のようにつくった:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sigma_y^{(1)} \\ \psi_2 &= \sigma_x^{(1)} \\ \psi_3 &= \sigma_z^{(1)} \sigma_y^{(2)} \\ \psi_4 &= \sigma_z^{(1)} \sigma_x^{(2)} \\ &\vdots \\ \psi_{2k-1} &= \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \dots \sigma_z^{(k-1)} \sigma_y^{(k)} \\ \psi_{2k} &= \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \dots \sigma_z^{(k-1)} \sigma_x^{(k)} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1.3)$$

すると

$$i\psi_{2k-1}\psi_{2k} = \sigma_z^{(k)}, \quad i\psi_{2k}\psi_{2k+1} = \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(k+1)} \quad (1.4)$$

なので量子一次元イジング模型は

$$H = +K \sum_k i\psi_{2k-1}\psi_{2k} + J \sum_k i\psi_{2k}\psi_{2k+1} \quad (1.5)$$

と書き直せた。

1.3 フェルミオン演算子で二次なら解ける

一般に実反対称行列 M_{st} に対して

$$H(M) = \frac{i}{2} \sum_{s,t} M_{st} \psi_s \psi_t = \frac{i}{2} \vec{\psi}^T M \vec{\psi} \quad (1.6)$$

という形を仮定してみる。ただし ℓ は $e^{iN\ell} = 1$ となるような $\ell = \frac{2\pi s}{N}$ の $s = 1, \dots, N$ をとる。すると

$$iM\vec{v} = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{a}e^{i\ell}, \tilde{b}e^{i\ell}, \dots)^T \quad (1.14)$$

で

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K - Je^{-i\ell} \\ -K + Je^{+i\ell} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

となるので、上の 2×2 行列の固有値

$$\pm m_s = \pm |K - Je^{-i\ell}| \quad (1.16)$$

は iM の固有値になる。これを (1.11) にいければもとの H がもとまる、という筋道だった。

2 フェルミオンとボゾンについて

まずはハミルトニアン (1.6) について標準的な物理での解釈をのべておく。 iM の固有値を $\pm m_s$ ($s = 1, \dots, N$) と書くと $H(M)$ の固有値は (1.11) だった。量子力学ではハミルトニアンの固有値をエネルギーと同定する。エネルギーは低いもののほうが実現しやすい。そこで、一番エネルギーの低いものを基底状態 (ground state) や真空 (vacuum) とよび、そこからのエネルギーを考えることが多い。今は基底状態のエネルギーは $E_0 = -\sum m_s$ で、 $H - E_0$ の固有値は

$$\left\{ \begin{matrix} 2m_1 \\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 2m_2 \\ 0 \end{matrix} \right\} + \dots + \left\{ \begin{matrix} 2m_N \\ 0 \end{matrix} \right\} = \sum_{s=1}^N c_s (2m_s) \quad (2.1)$$

の 2^N 個である。但し $\left\{ \begin{matrix} X \\ 0 \end{matrix} \right\}$ は X か 0 かどちらかを選ぶという意味として、 c_s は $0, 1$ のどちらかである。それぞれの s について、 $c_s = 0$ を選んだ場合を「状態 s のモノが無い」、 $c_s = 1$ を選んだ場合を「状態 s のモノが(1個)有る」、と解釈し、 $2(2m_s)$ という状態が選べないので「状態 s にはモノは二つ以上は入らない」という。こういうモノをフェルミオン¹といい、二つ以上入らないことをパウリの排他律という。

別の量子系で、エネルギー固有値が

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \left\{ \begin{matrix} 3e_1 \\ 2e_1 \end{matrix} \right\} & + \left\{ \begin{matrix} 3e_2 \\ 2e_2 \end{matrix} \right\} & + \dots + \left\{ \begin{matrix} 3e_N \\ 2e_N \end{matrix} \right\} = \sum_{s=1}^N c_s a_s \\ e_1 & e_2 & e_N \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (2.2)$$

というふうに、各 s について状態 s には勝手な整数 $c_s \geq 0$ を選べるものもある。これは「各状態 s に c_s 個モノが入っている」と解釈し、このようなモノをボゾン²という。普通の量子力学の講義ではボゾンのほうが先に出てくるが、 $N = 1$ でも固有値が無限個あるので、状態空間がかならず無限次元になってしまって難しいので今回はフェルミオンしかやらなかった。

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Enrico_Fermi の寄与を記念した用語。 -on は粒子を意味する接尾辞。

²https://en.wikipedia.org/wiki/Satyendra_Nath_Bose の寄与を記念した名前。

フェルミオンの交換関係は (1.2) だった。これは

$$\{\psi_a, \psi_b\} := \psi_a \psi_b + \psi_b \psi_a = 2\delta_{ab} \quad (2.3)$$

と書けた。ただし δ_{ab} は $a = b$ のとき 1 で $a \neq b$ のとき 0 と定めた Kronecker のデルタ。ボソンはこれと良く似ているが、(エルミートでない) ϕ_a で

$$[\phi_a, \phi_b^\dagger] := \phi_a \phi_b^\dagger - \phi_b^\dagger \phi_a = 2\delta_{ab} \quad (2.4)$$

から出発して得られる。この式はほとんど正準交換関係そのものである。

特殊相対性理論と量子力学をあわせると、「 360° まわしてはじめてもとに戻るものはボソンである。 720° まわしてはじめてもとに戻るものはフェルミオンである。」という重要な事実が従う。これをスピン統計性定理という。

3 Gapless 系と gapped 系

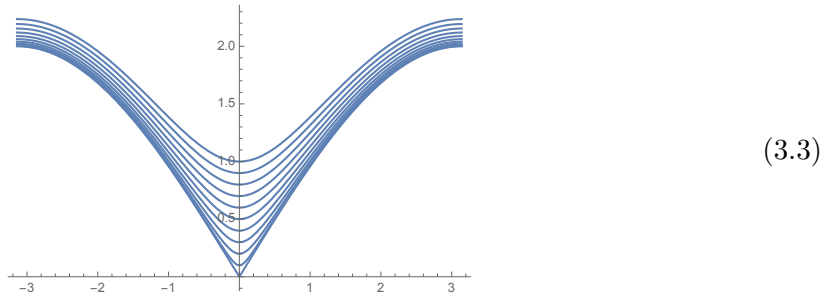
一次元量子イジング模型の $H - E_0$ の固有値 (2.1) についてもう少し考える。 m_s は (2.1) で与えられた。もうすこしあからさまに書くと

$$m_s = \sqrt{(J - K)^2 + JK(2 \sin \frac{\ell_s}{2})^2} \geq |J - K| \quad (3.1)$$

である。ただし $\ell_s = 2\pi s/N$ 。参考の為

$$\sqrt{\epsilon^2 + (2 \sin \frac{\ell}{2})^2} \quad (3.2)$$

を $\epsilon = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ で図示すると



となる。横軸は $-\pi < \ell < \pi$.

$J = K$ がイジング模型の転移点だったが、何が起こるか? $J \neq K$ であれば、 $H - E_0$ の最低固有値は勿論 0 であるが、 $H - E_0$ のその次に小さい固有値は $2|J - K|$ であって N によらない非ゼロの値である。こういう系をギャップがある系、gapped だという。

$J = K$ であれば、 $2m_s = 2J|\sin 2\pi s/N|$ であって、サイト数 N がとても多いとすると s を 1 とか 100 に選べば $2m_s \sim 2J2\pi s/N$ であって、非常に小さい値である。これより、 $H - E_0$ にはゼロに非常に近い固有値がとても沢山あることがわかる。こういう系をギャップが無い系、gapless だという。

4 ごく最近の進展へのコメント

一次元量子イジング模型をすこし拡張して

$$H = J \sum_j \sum_j \sigma_y^{(j)} \sigma_y^{(j+1)} + K \sum_j \sigma_z^{(j)} + K' \sum_j \sigma_y^{(j)} \quad (4.1)$$

とした模型はごく最近も実験の論文がでていた³。これはフェルミオンでは簡単には書き直せなくなる。そのため固有値は (2.1) のような簡単な形では書けなくなる。

それでも、いろいろ興味深い理論があって、 $J = K$ のときにサイト数 N を大きくする極限で H はギャップのある系で、 $H - E_0$ の固有値の下のほうの比が計算できる。

いま、 n 点を一本線で結んだグラフ Γ の各頂点 v に数 c を書き、これを n 次元線形空間と思う。線形写像 M_Γ を

$$M_\Gamma : (c_v) \mapsto (d_v), \quad d_v = 2c_v - \sum_{w \text{ は } v \text{ とつながっている}} c_w \quad (4.2)$$

を考える。例えば n 点が横一列に並んでいると

$$c_1 - c_2 - c_3 - \dots - c_N \quad (4.3)$$

に対して

$$(2c_1 - c_2) - (2c_2 - c_1 - c_3) - (2c_3 - c_2 - c_4) - \dots - (2c_N - c_{N-1}) \quad (4.4)$$

となる。この最小固有値は $2(1 - \cos \pi/(N+1))$ で固有ベクトルは

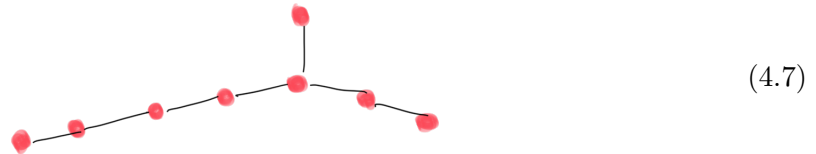
$$\sin \frac{\pi \cdot 1}{N+1} - \sin \frac{\pi \cdot 2}{N+1} - \dots - \sin \frac{\pi \cdot N}{N+1} \quad (4.5)$$

である。固有ベクトルであることの確認は結局の所

$$\sin \frac{\pi(k-1)}{N+1} + \sin \frac{\pi(k+1)}{N+1} = 2 \sin \frac{\pi k}{N+1} \cos \frac{\pi}{N+1} \quad (4.6)$$

という三角関数の和公式から従う。

いまグラフとして E_8 とよばれるものを取る:



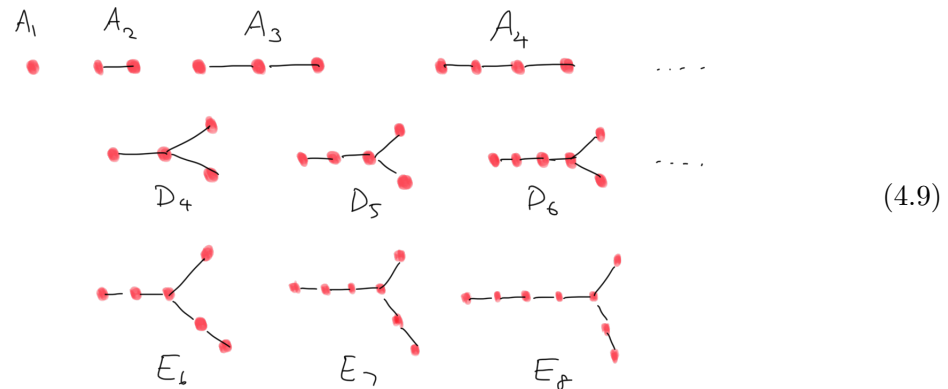
これに対して線形写像 (4.3) の最小固有値は $2(1 - \cos \pi/30)$ で、固有ベクトルは

³arXiv:2005.13302, arXiv:2005.13772, arXiv:2006.12956 が最近の実験の論文。

である。下から順に $m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_8$ と書くと、 $H - E_0$ の(波数 0 に制限した上で、一粒子状態に制限したところの)非ゼロ固有値の下から八つが m_i に比例する、というのが理論的結果である。⁴

E_8 という名前をもうすこしだけ説明しておく。 M_Γ は一般のグラフ Γ について考えられる。(4.4), (4.5) に対応する M の固有値は $2(1 - \cos s\pi/(N+1))$, $s = 1, \dots, N$ で全部正である。

M_Γ の固有値が全部正であるようなグラフは分類されていて以下で尽きる:



下付き添え字は頂点の数で、 A_n と D_n の n はいくらでも大きくとれるが E_n の添え字は $n = 6, 7, 8$ で終わりである。(同様にグラフ E_9, E_{10} 等を定義できるが、 E_9 でゼロ固有値が出て、 E_{10} 以降は負固有値が出る。)

このように $A_{n \geq 1}, D_{n \geq 4}, E_{6,7,8}$ で分類される数理的現象は他にも沢山あって、ADE 分類として知られている。正多面体の分類も一例であって

$$\begin{aligned}
 E_6 &\leftrightarrow \text{正四面体} \\
 E_7 &\leftrightarrow \text{正八面体, 立方体} \\
 E_8 &\leftrightarrow \text{正二十面体, 正十二面体}
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

となる。(A_{2n-1} は平面内に書けてしまう正 n 角形に、 D_n は正 $n-2$ 角形を裏表張合わせた正二面体というものに対応する。) 単純リー代数の分類にも出てくる。

⁴最近ようやく E_8 からくる八種の励起が全部見えたそうである。 E_8 とどう関係があるかという数理的な話についてははじめての実験的測定 [arXiv:1103.3694](https://arxiv.org/abs/1103.3694) のあとに数学者向けに書かれた [arXiv:1012.5407](https://arxiv.org/abs/1012.5407) が理論物理屋にもわかりやすくまとまっていると思う。