

2023年度「現代物理学」レポート問題

諸連絡:

1. 以下の課題のうち、いくつか解答してください。
2. 成績評価は次の通りです。二つきちんと解いていれば、少なくとも良とします。優、優上が欲しい人は、追加で問題を解く、問題をより丁寧に解く、問題を拡張する、等してください。それらの出来を総合的に評価して、点数にします。(勿論、皆さんで結託して、皆最低限のみ解答することになると、全ての人に優を付けざるを得なくなりますが...そうすると、前期課程の優三割ルールを破ることになり僕は理由書を御上に提出することになります。)
3. 講義の他の参加者と共同で全部もしくは一部の問題を解いても結構ですが、その場合は学生番号何番の誰と一緒にやった/教えた/教えてもらった、等を明記してください。
4. 講義ノート以外につかった参考文献を明示して下さると、僕がいろいろと文献を知ることができて有り難いので、可能ならお願いします。
5. また、講義ノートの誤植を見つけた人はレポートに書くなどして教えてください。深刻度に応じて追加点にしたいと思います。
6. レポートは ITC-LMS から提出してください。
7. PDF ファイルか、Word ファイルか、紙に書いたのを携帯/デジカメで読めるように撮るかスキャナを使うかして画像で送るかしてください。その他のファイル形式は要相談です。
8. 手書きの人は、書き殴るのではなくて、採点する私を哀れんで、せめて僕の手書き講義ノートより遥かに汚いというような字はやめてください。(僕の手書きノートも汚くてすいません。) また、画像ファイルは一頁一ファイルでなく、ひとつのファイルにまとめてください。やりかたが分からない人は、検索エンジンで“jpg を pdf に変換”などを調べてみてください。
9. 締切は 2023/8/1(火)、日本時間 23 時 59 分までとします。(詳細は「科学哲学第二レポート」で検索のこと。)
10. 問題文の意味をなさないところ、おかしいと思うところがあったら、適宜正しいと思うように修正して解答してください。僕にメールで連絡してくれたら、この問題も修正します。

課題 1

講義では球面の接バンドルの中の単位円バンドルのチャーン数が 2 であることを学んだ。一般に一つ穴、二つ穴、... の曲面を考える:



穴の数を g として、これらの曲面の接バンドルの中の単位円バンドルのチャーン数はいくつ? ひとつの方法は、曲面状にベクトル場を描いて(毛が生えている状態を考えて)、それがゼロになる点(つむじ)に対して巻き付き数を計算し、足し挙げれば良い。

講義では符号はきちんと説明しなかったもので、絶対値があれば正解とする。

課題 2

以下パウリ行列

$$\sigma_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いる。

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ なる実数 (x, y, z) に対し、

$$x\sigma_X + y\sigma_Y + z\sigma_Z$$

の固有値が ± 1 であることを示せ。(必要ならば (x, y, z) を極座標であらわすなどせよ。) また、固有ベクトルを求めよ。その際、長さ 1 にすること。

2. 固有値 1 で長さ 1 の固有ベクトルは球面上滑らかに選べるだろうか?
3. いま $|u|^2 + |v|^2 = 1$ なる複素数 (u, v) に対し、その Hopf ファイブレーションでの行き先を

$$(x, y, z) = (2 \operatorname{Re} u\bar{v}, 2 \operatorname{Im} u\bar{v}, |u|^2 - |v|^2)$$

とする。このとき縦ベクトル

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

が $x\sigma_X + y\sigma_Y + z\sigma_Z$ の固有ベクトルであることを確認せよ。固有値はいくつ?

4. 上記 2. と 3. でわかったことの関係述べよ。

課題 3

m, kg, s, A などの定義はフランス革命から現代に至るまで、科学と技術の進展にしたがって改良、変更されてきた。これについて、なんでも調べてまとめること。参考にした文献/インターネット上のリソースは明記すること。

例: フランス革命のときの議論の経緯について詳細に調べる、歴史的経緯を全体について概観する、最新の定義について詳細に記述する、自分が生まれてからの変更ひとつについて議論する、など。

課題 4

講義では Maxwell 方程式の半分はスカラーポテンシャル $\varphi = -A_t$ およびベクトルポテンシャル (A_x, A_y, A_z) に対し

$$F_{\Delta\Box} = \frac{\partial A_{\Box}}{\partial \Delta} - \frac{\partial A_{\Delta}}{\partial \Box} \quad (4.1)$$

と定め

$$E_x = F_{xt}, \quad E_y = F_{yt}, \quad E_z = F_{zt}, \quad (4.2)$$

$$B_x = F_{yz}, \quad B_y = F_{zx}, \quad B_z = F_{xy} \quad (4.3)$$

とすると自動的に出ることを見たと。また、電流密度 (j_x, j_y, j_z) と電荷密度 ρ との結合は

$$S = \dots + \int (A_t \rho + A_x j_x + A_y j_y + A_z j_z) dx dy dz dt \quad (4.4)$$

であることも学んだ。

Maxwell 方程式の残りの半分は C_1, C_2 を定数として次の作用の変分から出すことができる:

$$S[A] = \int [C_1(|E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2) + C_2(|B_x|^2 + |B_y|^2 + |B_z|^2)] dx dy dz dt + \int (A_t \rho + A_x j_x + A_y j_y + A_z j_z) dx dy dz dt. \quad (4.5)$$

すなわち、

$$S[A + \delta A] = S[A] + \int (\blacksquare_t \delta A_t + \blacksquare_x \delta A_x + \blacksquare_y \delta A_y + \blacksquare_z \delta A_z) dx dy dz dt + \dots \quad (4.6)$$

と書いた際に

$$\blacksquare_t = 0, \quad \blacksquare_x = 0, \quad \blacksquare_y = 0, \quad \blacksquare_z = 0 \quad (4.7)$$

が残りの Maxwell 方程式になるのである。

1. C_1, C_2 を未知の定数としたまま、

$$\delta S = S[A + \delta A] - S[A] \quad (4.8)$$

を計算せよ。ただし、 $\rho, j_{x,y,z}$ は $A_{t,x,y,z}$ には依存しないとして

$$\delta(A_t \rho + A_x j_x + A_y j_y + A_z j_z) = \rho \delta A_t + j_x \delta A_x + j_y \delta A_y + j_z \delta A_z \quad (4.9)$$

としてよい。また、

$$\int F_{\Delta\Box} \partial_{\Delta} \delta A_{\Box} dx dy dz dt \quad (4.10)$$

という項は部分積分して

$$- \int (\partial_{\Delta} F_{\Delta\Box}) \delta A_{\Box} dx dy dz dt \quad (4.11)$$

と書き換えること。(部分積分から出る境界項はこういう場合は落としてもよい。)

2. その結果を (4.6), (4.7) と比較し、Maxwell 方程式を導出せよ。皆さんが知っている Maxwell 方程式と係数をあわせるには、 C_1, C_2 はどのような値にすべきか?

課題 5

$0 \leq x < L$ で $x=0$ と $x=L$ が周期的につながっているところを動いている量子力学的粒子を考える。質量は m で電荷は q とし、ベクトルポテンシャル A_x と結合しているとき、エネルギー演算子は

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{q}{\hbar} A_x \right) \right]^2$$

で与えられた。簡単のため A_x は x に依存せず定数とし、波動関数は $\psi(x)$ という複素関数で $\psi(x) = \psi(x+L)$ という周期性をみたすものとする。

(7/25訂正: 上式で赤字の i が抜けていました。)

1. \hat{H} の固有関数は n を整数として $e^{i2\pi nx/L}$ である。固有値を求めよ。
2. q は \hbar の整数倍だった。簡単のため $q = \hbar$ として、横軸を $LA_x = \int_0^L A_x dx$ 、縦軸がエネルギー固有値であるようなグラフを、 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ に対する固有値を同時にプロットしてあらわせ。
3. 円周バンドルの基準切断のとりかえによって $LA_x = \int_0^L A_x dx$ は 2π の整数倍だけずれるが、これは系の物理を次の意味でかえない: 「 \hat{H} の固有値の集合は LA_x を $\pm 2\pi$ することに対して不変である。」これを確認せよ。この際 n はどうなるか?
4. q が勝手な実数だとして、 \hat{H} の固有値の集合が LA_x を $\pm 2\pi$ することによって不変であると要求することから、 q が \hbar の整数倍であることを導け。

課題 6

その他、なんでも講義の内容に多少関係ありそうなことなら数ページ程度にまとめてレポートにしてくれても結構です。

課題 7

近年大学のレポート問題といえば Wikipedia からコピペをするのが問題になっているようであるが、Wikipedia に情報を付加するのであれば文句はないだろう。というわけで、日本語もしくは英語もしくはあなたの好きな言語の Wikipedia の、今回の講義に関係しそうな項目について、既存記事を改良するなり、新規記事を書くなりせよ。Wikipedia は特定の編集に関してのリンクを表示することが出来るので、自分の編集がどれかを明記すること。

課題 8

さらに、直近の話題といえば、Chat-GPT などの AI をつかってレポート問題が解けてしまうのではないかという話がある。今回のこのレポートの問題は AI で解けるだろうか? それについて、いくつか選んで実際にやってみて、レポートしてみるのも面白い。