数学と超対称ゲージ理論

立川 裕二　　東京大 物理

超対称場の量子論からは色々な数学が取り出されてきた。

- ミラー対称性
- Seiberg-Witten の monopole 方程式
- 他にも色々。例えば、予想[Alday-Gaiotto-YT,2009]:
  $\mathbb{R}^4$ 上の反自己双対 G 接続の枠付きモジュライ空間 $\mathcal{M}_G$ の同変コホモロジー群

$$H^\bullet_{G\times SO(4)}(\mathcal{M}_G)$$

には自然な $W((G_{\mathrm{aff}})^\vee)$ 代数の作用がある。$G = \mathbf{U}(N)$ については証明が arXiv に出ている。[Schiffmann-Vasserot,2012]

なぜこういう予想が場の量子論の考察からあらわれるのか？

もう一例:

$$\oint \frac{\prod_{\pm\pm\pm}\Gamma_{p,q}(tu^{\pm1}v^{\pm1}z^{\pm1})\prod_{\pm\pm\pm}\Gamma_{p,q}(tx^{\pm1}y^{\pm1}z^{\pm1})}{\prod_{\pm}\Gamma_{p,q}(t^2z^{\pm2})\prod_{\pm}\Gamma_{p,q}(z^{\pm2})}\frac{dz}{2\pi iz}$$

は $u \leftrightarrow v$, $x \leftrightarrow y$ だけでなくて $u \leftrightarrow x$ についても対称。但し

$$\Gamma_{p,q}(z) = \prod_{j,k\geq0}\frac{1-z^{-1}p^{j+1}q^{k+1}}{1-zp^jq^k}$$

は楕円ガンマ関数。これは [Rastelli et al.](物理) で 2009 年に予言されたときには [van de Bult](数学) が丁度博士論文に書いていた。

また、実際の素粒子の振舞は場の量子論で良く記述される。

- 電子の異常磁気能率という量は理論と実験が 12 桁一致！

$$a_e = 1\,159\,652\,181.7\ldots \times 10^{-12}$$

- Higgs 粒子がみつかった！

しかし、場の量子論自体は**未定義**として悪名高い。

(以下、場の量子論のことを場の理論といったりゲージ理論といったりしますが、ほぼ同義なので気になさらぬよう)

場の理論の数学的定式化は長らくいろいろあるが、不十分。問題点：

ひとつの場の量子論は (なんとか) 記述できるが、
ふたつ以上の場の量子論の間の関係を看過している

多様体があれば、直積、族、群作用での商、等があるように、
場の量子論があれば、"直積"、族、"群作用での商"、等がある。

多様体の間に射があるように、場の量子論の間にも射がある。

場の量子論の圏がある。
我々を記述している「標準模型」というのは、この圏のひとつの対象。

注意: 位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory) の Atiyah による公理化では、位相的場の理論自体が

$$\text{コボルディズムの圏} \to \text{ベクトル空間の圏}$$

なる関手として定義されている。

これらの関手 =「位相的場の理論」が対象であるような圏が「位相的場の理論の圏」。

いろいろなバージョンがある:

$$\text{位相的場の理論の圏} \subset \text{共形場理論の圏} \subset \text{場の量子論の圏}$$

また

$$\text{超対称場の量子論の圏} \subset \text{場の量子論の圏}$$

数学で既に定義されている圏から場の量子論の圏への関手があるし、
数学で既に定義されている圏への場の量子論の圏からの関手もある。

$$\begin{array}{c} \text{場の量子論の圏} \\ \uparrow \quad \downarrow \\ \text{既にちゃんと定義された圏} \end{array}$$

超対称ゲージ理論から取り出された数学的予想、というのは、
超対称場の量子論の圏における主張が、ある関手によって
数学で既に定義されている圏における主張にうつされたもの。

特に、2009 年の Gaiotto の発見からはじまった最近の進展に重要。

1. 場の量子論とは数学的に何だろうか

2. 超対称場の量子論とは数学的に何だろうか

「d 次元場の量子論」Q とは、
組 $(\mathcal{V}, Z)$ で、$\mathcal{V}$ は filter つき $\mathbb{C}$-「代数」

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{1/2} \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_{3/2} \subset \cdots \subset \mathcal{V}$$

で各 $\mathcal{V}_i$ は $\mathfrak{so}(d)$ の有限次元表現、また Z は k 点付き実 d 次元境界なし有限体積**計量付き**スピン多様体 X に対して 多重線形写像

$$Z(X; x_1, \ldots, x_k) : \mathcal{V}^{\otimes k} \to \mathbb{C}$$

を対応させ、いろいろな条件、たとえば

- X の**計量**の連続変形、点の場所の連続変形について連続
- $Z(X; x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ と $Z(X; x_1, \ldots, x_k)$ は $\mathcal{V}$ の積によって結ばれている

をみたすもの。

「d 次元 S **構造付き**場の量子論」Q とは、
組 $(\mathcal{V}, Z)$ で、$\mathcal{V}$ は filter つき $\mathbb{C}$-「代数」

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{1/2} \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_{3/2} \subset \cdots \subset \mathcal{V}$$

で各 $\mathcal{V}_i$ は有限次元、また Z は k 点付き実 d 次元境界なし
S**構造付き**多様体 X に対して 多重線形写像

$$Z(X; x_1, \ldots, x_k) : \mathcal{V}^{\otimes k} \to \mathbb{C}$$

を対応させ、いろいろな条件、たとえば

- X の S **構造**の連続変形、点の場所の連続変形について連続
- $Z(X; x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ と $Z(X; x_1, \ldots, x_k)$ は
  $\mathcal{V}$ の積によって結ばれている

をみたすもの。

良く使う付加構造としては

次元	構造	名前
$\boldsymbol{d}$	計量	$\boldsymbol{d}$ 次元場の量子論
$\boldsymbol{d}$	共形構造	$\boldsymbol{d}$ 次元共形場理論
$\mathbf{2}$	複素構造	$\mathbf{2}$ 次元共形場理論
$\boldsymbol{d}$	微分構造	$\boldsymbol{d}$ 次元位相的場の量子論

順に「計量場の量子論」「複素構造場の量子論」「微分構造場の量子論」と呼べばよいのでしょうが、歴史的に名前がついてしまっている。

「一般化された d 次元 S 構造付き場の量子論」Q とは、
組 $(\mathcal{V}, Z)$ で、$\mathcal{V}$ は filter つき $\mathbb{C}$-「代数」

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{1/2} \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_{3/2} \subset \cdots \subset \mathcal{V}$$

で各 $\mathcal{V}_i$ は有限次元。実 d 次元境界なしS構造付き多様体 X のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{d,S}$ 上のベクトル束 E があって、Z は

$$Z \in \Gamma(\mathcal{M}_{d,S,k}, \mathcal{V}^{*\otimes k} \otimes \pi^*(E))$$

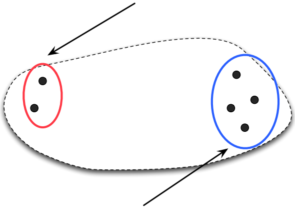
であって、いろいろな条件をみたすもの。ただし

$$\pi : \mathcal{M}_{d,S,k} \to \mathcal{M}_{d,S}$$

2 次元の頂点代数の conformal block の理論等は
一般化された場の量子論。

$\mathcal{V}$ は $\mathbb{C}$-「代数」といったが、単に環でなくて、非可換非結合な積が沢山はいっていて、複雑な公理を満たす。共形場理論の場合は頂点代数の公理に帰着する。

物理的には、$\mathcal{V}$ の生成子 $e_{1,2,\ldots}$ が素粒子の種類に対応する。そこで、時空 X の点 x_1 に粒子 v_1, 点 x_2 に粒子 v_2 , ..., 点 x_k に粒子 v_k があったときに、

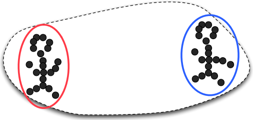


点 x_{k+1} に粒子 v_{k+1}, ..., 点 x_l に粒子 v_l がある確率振幅が

$$Z(X)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_l) \in \mathbb{C}.$$

ただし $v_i \in \mathcal{V}$。

4次元場の量子論として素粒子論の標準模型$= (\mathcal{V}, Z)$ を取り、4次元多様体 X としてこの宇宙を取ってきて、



に相当する

$$Z(X)(v_1, \ldots, v_l)$$

を計算すると、何時間後に右手をあげているか下げているかの確率がわかるわけです。

但し、体を構成する各素粒子について、対応する $v_i \in \mathcal{V}$ をその位置に挿入する。

「d次元の場の量子論」$Q' = (\mathcal{V}', Z'), Q'' = (\mathcal{V}'', Z'')$ に対して、その積 $Q = Q' \times Q''$ を $Q = (\mathcal{V}, Z)$ ただし

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}' \otimes \mathcal{V}''$$

および

$$Z(X) = Z'(X) \otimes Z''(X)$$

で定める。

自明な d次元場の量子論 $\mathbf{triv} = (\mathcal{V}, Z)$ とは、$\mathcal{V} = \mathbb{C}$ で、$Z(X) = 1$。

これは場の量子論の積のもとで恒等元。

コンパクトリー群 G に対して、「G 対称な d 次元場の量子論」Q とは、組 $(\mathcal{V}, Z)$ で、$\mathcal{V}$ は $\mathbb{Z}$ filter つき $\mathbb{C}$-「代数」

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{1/2} \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_{3/2} \subset \cdots \subset \mathcal{V}$$

で各 $\mathcal{V}_i$ は $G \times \mathfrak{so}(d)$ の有限次元表現、また Z は k 点付き実 d 次元境界なし有限体積計量付きスピン多様体 X 上の接続付き主 G 束 $P \to X$ に対して G 不変多重線形写像

$$Z(P) : \mathcal{V}^{\otimes k} \to \mathbb{C}$$

を対応させ、いろいろな条件、たとえば

- 計量の連続変形、G 接続の連続変形、
- 点の場所の連続変形について連続

をみたすもの。

単なる「d次元場の量子論」は、自明な群 $\{e\}$ に対して「$\{e\}$ 対称な d 次元場の量子論」。

$H \subset G$ なら、「G 対称な d 次元場の量子論」$Q = (\mathcal{V}, Z)$ は「H 対称な d 次元場の量子論」$Q' = (\mathcal{V}', Z')$ と思える。

なぜなら、$\mathcal{V}$ が G の表現なら $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$ は H の表現だし、$P \to X$ が主 H 束なら自然に主 G 束 $G \times_H P$ があるので、

$$Z'(P) = Z(G \times_H P)$$

とすればよい。

また、「G' 対称な d 次元場の量子論」$Q' = (\mathcal{V}', Z')$ と「G'' 対称な d 次元場の量子論」$Q'' = (\mathcal{V}'', Z'')$ に対して、その積 $Q' \times Q''$ は「$G' \times G''$対称な d 次元の場の量子論」。

これらの関係は、ベクトル空間の為す圏 (で直和だけ考えて、テンソル積を忘れたものの) 構造に似ている。

勝手なベクトル空間 V は、$\{e\}$ 作用のあるベクトル空間。

$H \subset G$ なら、G 作用のあるベクトル空間 V は、H 作用のあるベクトル空間と思える。

G' 作用のあるベクトル空間 V' および G'' 作用のあるベクトル空間 V'' に対し、$V' \oplus V''$ には $G' \times G''$ 作用がある。

実際、二種の関手

$$B, F : G \text{ 作用付き } \mathbb{C}\text{-ベクトル空間} \to G \text{ 対称な } d \text{ 次元場の量子論}$$

で、ベクトル空間の直和を場の量子論の積にうつすものがある。
$B(V)$ および $F(V)$ をそれぞれ自由ボソン理論、自由フェルミオン理論という。

$B(V) = (\mathcal{V}, Z)$ に対し、$\mathrm{Sym}^\bullet V \subset \mathcal{V}$ で、主 G 束 $P \to X$ に対し $Z(P)$ はベクトル束

$$V \times_G P \to X$$

のラプラシアン Δ を用いて明示的な表式がある:

$$Z(P) = \exp(\zeta'_\Delta(0)).$$

$F(V) = (\mathcal{V}, Z)$ に対し、$\bigwedge^{\bullet}(V \otimes S) \subset \mathcal{V}$、ただし S は $\mathfrak{so}(d)$ のスピノル表現。主 G 束 $P \to X$ に対し $Z(P)$ はベクトル束

$$V \times_G P \to X$$

に伴う Dirac 作用素を用いて明示的な表式がある。

0 次元のベクトル空間 $V = \{0\}$ に対して、$B(V) = F(V) = \mathbf{triv}$。

G 作用のある多様体 M に対して、M/G は (特異点があるかもしれない) 多様体。G 作用は失われる。

同様に、単純リー群 G と「G 対称な d 次元場の量子論」$Q=(\mathcal{V},Z)$ に対して、d次元場の量子論の 1 パラメタ族
$(Q/G)_{\alpha\in\mathbb{R}_{>0}}=(\mathcal{V}'_\alpha,Z'_\alpha)$ が定まる。

ここには経路積分が必要。アイデアは、勝手な接続つき主 G 束
$P\to X$ に対して $Z(P)$ が定まるので、

$$Z'_\alpha(X)=\int_{\mathcal{M}_X} Z(P)\exp\left[-\frac{1}{\alpha}\int_X\langle F,\star F\rangle\right]dvol(\mathcal{M}_X)$$

但し F は P の曲率で、$\star$ は X の計量より定まる Hodge star、$\mathcal{M}_X$ は X 上の接続付き主 G 束のモジュライ空間。

クレイのミレニアム問題は、$(\mathbf{triv}/G)_{\alpha\in\mathbb{R}_{>0}}$ を調べよ、という問題。

また勝手な「d 次元の場の量子論」$\mathcal{Q} = (\mathcal{V}, Z)$ に対し、「d次元の場の量子論」の族 $(\mathcal{Q})_{u\in U}$ で、

- $0 \in U$ に対して $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}$、また
- $T_0 U \simeq (\mathcal{V}_d)^{\mathfrak{so}(d)}$

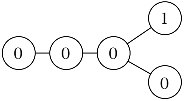
で、$\mathcal{Q}$ を含む勝手な族はこの族の部分族であるようなものが構成できる。

$\mathcal{V}$ がフィルター付きであったのを思い出してください:

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_{1/2} \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_{3/2} \subset \cdots \subset \mathcal{V}$$

ここまで準備すると、**素粒子の標準模型** が何かが説明できる。

- $\mathbf{Spin(10)}$ の 16 次元既約表現 $\boldsymbol{S}$ を取る。ディンキンラベルは



- $\mathbf{Spin(10)} \supset \mathbf{U(5)} \supset \mathbf{U(1)} \times \mathbf{SU(2)} \times \mathbf{SU(3)} = \boldsymbol{G}$ を取る。
- $\mathbf{SU(2)}$ の定義表現 $\boldsymbol{V}$ を取ります。
- $\boldsymbol{F(S \oplus S \oplus S) \times B(V)}$ を $\boldsymbol{G}$ 対称な 4 次元場の量子論だと思う。
- そこで、$\boldsymbol{[(F(S \oplus S \oplus S) \times B(V))/G]_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^3_{>0}}}$ という 3 パラメタ族を考える。

- 族 $[(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{S} \oplus \boldsymbol{S} \oplus \boldsymbol{S}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{V}))/\boldsymbol{G}]_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in\mathbb{R}^3_{>0}}$ では $\mathcal{V}_4^{\mathfrak{so}(4)}$ は 39 次元。
- よって、この族は族 $\boldsymbol{Q}_{u\in U}$ ($\mathbf{dim}_{\mathbb{R}}\, \boldsymbol{U} = \mathbf{39}$) の一部。そこで

$$\text{素粒子の標準模型} = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{u}_{\text{現実}}}$$

ただし $\boldsymbol{u}_{\text{現実}} \in \boldsymbol{U}$ はどこか特定の点。

- $F(S \oplus S \oplus S)$ の部分が物質場 (クォーク、電子等)。
- $B(V)$ の部分が Higgs 場。
- $/G$ の部分が力を運ぶゲージ場 (光、グルオン場、W 粒子 Z 粒子)。
- 数カ月前に Higgs 粒子がみつかった！といって大騒ぎしたのは、$B(V)$ からくる $\mathcal{V}$ の生成子が実験で実際に見つかったということ。
- 小林 -益川は、$F(S \oplus S)$ でなくて $F(S \oplus S \oplus S)$ だと予言したので賞をもらった。
- その他、LHC では　$u_{現実}$ が具体的に U の中でどこかというのを頑張って測定しているのです。

1. 場の量子論とは数学的に何だろうか

2. 超対称場の量子論とは数学的に何だろうか

これまで、$Q = (\mathcal{V}, Z)$ で $Z(X)$ を考える際、X は有限体積としていた。

X が無限体積の場合は、無限に広いところでの境界条件を設定しないといけない。境界条件の空間 M は Q を決めると決まっていて、M を「真空のモジュライ」、M の点を真空という。

だから、X が無限体積で k 点つきの場合、

$$Z(X; p) : \mathcal{V}^{\otimes k} \to \mathbb{C}$$

ただし $p \in M$.

「G 対称な 4 次元 $\mathcal{N}=2$ 超対称場の量子論」$Q=(\mathcal{V},Z)$ とは、「G 対称な 4 次元場の量子論」であって、いろいろ追加条件をみたすもの。その為、次のようなものが取り出せる:

- 真空のモジュライ M の部分空間 $M_{\text{Coulomb}}(Q)$ および $M_{\text{Higgs}}(Q)$。前者は $\mathbb{C}$ 上のアファイン空間、後者はハイパーケーラー。
- $Z(\mathbb{R}^4,p), p\in M$ の変種で、

$$Z_{\text{Nekrasov}}:(M_{\text{Coulomb}}(Q)\text{の稠密開集合})\to(H^\bullet_{SO(4)}[pt]\text{の商体})$$

  という正則関数が定まる。

関手

$$Q\mapsto M_{\text{Coulomb}},\quad Q\mapsto Z_{\text{Nekrasov}},\quad Q\mapsto M_{\text{Higgs}}$$

が面白い。

コンパクトリー群 G とその擬実表現 V に対し、

$$H(V) = B(V) \times F(V)$$

は「G 対称な 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の量子論」。
Hypermultiplet と呼ぶ。

また、「G 対称な 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の量子論」Q に対し、

$$(Q///G)_{\tau \in \text{上半平面}} \equiv$$
$$\left([Q \times B(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \times F(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})]\,/G\right)_{\alpha \in \mathbb{R}_{>0}} \text{をさらに適切に変形したもの}$$

は「4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の量子論」。特に、群 $G \times F$ の擬実表現 V に対し、

$$(H(V)///G)_{\tau \in \text{上半平面}}$$

をは F 対称性をもち、4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論と言う。

$Q \mapsto M_{\mathrm{Higgs}}$ は次の性質を満たす:

- $M_{\mathrm{Higgs}}(Q \times Q') = M_{\mathrm{Higgs}}(Q) \times M_{\mathrm{Higgs}}(Q')$。
- $M_{\mathrm{Higgs}}((Q/\!/\!/G)_\tau) = M_{\mathrm{Higgs}}(Q)/\!/\!/G$、
  但し右辺はハイパーケーラー商。τ に依らない。

すなわち、

$$\mathcal{N} = 2\text{超対称場の理論の圏} \mapsto \text{ハイパーケーラー多様体の圏}$$

なる関手。また、特に、

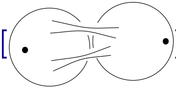
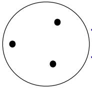
- ハイパーマルチプレット $H(V)$ に対して $M_{\mathrm{Higgs}}(H(V)) = V$。

さて、simply-laced な G に対して、6 次元の超対称場の量子論 $\mathcal{S}_G = (\mathcal{V}, Z)$ で非常に良い性質をもったものがある。k 点つきリーマン面 C と 4 次元のリーマン多様体 X に対して、

$$Z_G[C](X) = \mathcal{S}_G(X \times C)$$

を考えると、これは C に依存する 4 次元の場の量子論 $\mathcal{S}_G[C] = (\mathcal{V}_G[C], Z_G[C])$ を与える。

これは、G^k 対称な 4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の量子論。たとえば

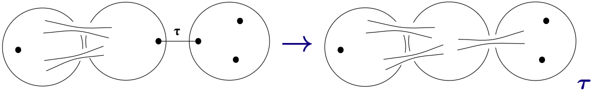
$\mathcal{S}_G[$  $]$, $\mathcal{S}_G[$  $]$

はそれぞれ G^2, G^3 対称である。

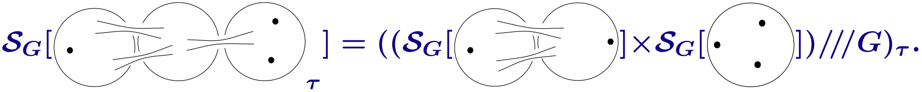
点つきリーマン面が二つ与えられると、二点の局所座標を z, z' として、

$$zz' = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$$

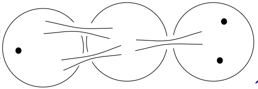
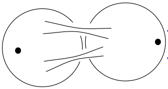
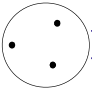
で同一視することで新たなリーマン面が得られる:



このとき、



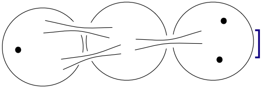
ただし $///G$ はつないだ二点に相当する $G \times G$ の対角部分群について。

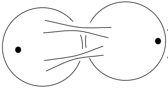
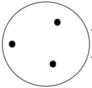
$\mathcal{S}_G[$  ${}_{\tau}] = ((\mathcal{S}_G[$  $] \times \mathcal{S}_G[$  $])///G)_{\tau}$

$C \mapsto \mathcal{S}_G[C]$ は、点つきリーマン面の圏から 「G^k対称な 4 次元 $\mathcal{N} = 2$超対称場の量子論」の圏への関手。

行き先の圏がきちんと定義されていないのが問題。

注意: 「点つきリーマン面の圏」は、点をリーマン面の境界にして、複素構造つきコボルディズムの圏と思ったほうが数学的にはきちんとした定義になるでしょうが、今日のところは割愛。

$\mathrm{Higgs}_G[$  $] =$

$(\mathrm{Higgs}_G[$  $] \times \mathrm{Higgs}_G[$  $])///G$

ただし

$$C \mapsto \mathcal{S}_G[C] \mapsto \mathrm{Higgs}_G[C] = M_{\mathrm{Higgs}}(\mathcal{S}_G[C])$$

これは 複素構造 τ によらない。

$C \mapsto \mathrm{Higgs}_G[C]$ はコボルディズムの圏からハイパーケーラー多様体の圏への関手になる。定義域も値域も定義されている！関手自体も数学的にきちんと構成された (private communication)。

$Q \mapsto M_{\text{Coulomb}}$ は次の性質を満たす:

- $M_{\text{Coulomb}}(Q)$ はアファイン空間。
- $M_{\text{Coulomb}}(Q \times Q') = M_{\text{Coulomb}}(Q) \times M_{\text{Coulomb}}(Q')$。
- $M_{\text{Coulomb}}((Q///G)_\tau) = M_{\text{Coulomb}}(Q) \times \mathbf{Spec}\,\mathbb{C}[\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}]^{G_{\mathbb{C}}}$ 。
  τ に依らない。
- ハイパーマルチプレット $H(V)$ に対して
  $M_{\text{Coulomb}}(H(V)) = \{0\}$。

G 対称な $Q = (\mathcal{V}, Z)$ に対し、$Z_{\mathrm{Nekrasov}}(\mathbb{R}^4, p)$ は $p \in M_{\mathrm{Coulomb}}(Q)$ の有理関数。

もっと一般に、$\mathbb{R}^4$ 上の反自己双対接続つき主 G 束 $P \to \mathbb{R}^4$ に対して、$Z_{\mathrm{Nekrasov}}(P, p)$ を考えて良い。反自己双対接続のモジュライ空間を $\mathcal{M}_G$ と書くと、$[P] \in \mathcal{M}_G$ 依存性と $p \in M_{\mathrm{Coulomb}}(Q)$ 依存性をあわせて

$$Z_{\mathrm{Nekrasov}}(Q) \in H^{\bullet}_{G \times \mathbf{SO}(4)}(\mathcal{M}_G) \otimes_{\mathbb{C}} (M_{\mathrm{Coulomb}}(Q)\text{上の有理関数環})$$

と思うのがよい。

すると、G 対称な Q, Q' に対して、

$$Z_{\text{Nekrasov}}(Q \times Q') = Z_{\text{Nekrasov}}(Q) Z_{\text{Nekrasov}}(Q')$$

また

$$Z_{\text{Nekrasov}}((Q///G)_\tau) = \int_{[\mathcal{M}_G]_\tau} Z_{\text{Nekrasov}}(Q)$$

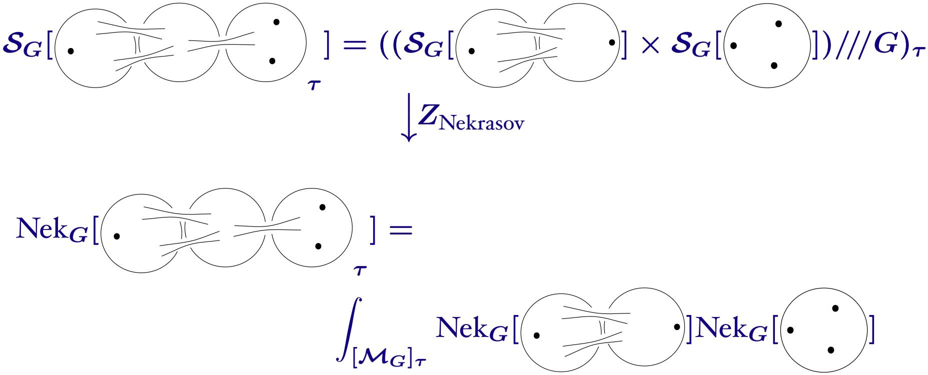
ただし

$$[\mathcal{M}_G]_\tau = \sum_{k \geq 0} e^{2\pi\sqrt{-1}k\tau} [\mathcal{M}_{G,k}] \in H_\bullet(\mathcal{M}_G)$$

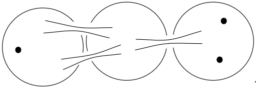
ここで

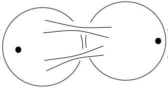
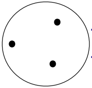
$$\mathcal{M}_G = \prod_{k \geq 0} \mathcal{M}_{G,k}$$

と 2nd Chern 類で分解した。



ただし $\text{Nek}_G[C] = Z_{\text{Nekrasov}}(\mathcal{S}_G[C])$。これは 複素構造 τ による。

$\mathrm{Nek}_G[$  $]_{\tau} =$

$\displaystyle\int_{[\mathcal{M}_G]_\tau} \mathrm{Nek}_G[$  $]\mathrm{Nek}_G[$  $]$

ただし $\mathrm{Nek}_G[C] = Z_{\mathrm{Nekrasov}}(\mathcal{S}_G[C])$。これは 複素構造 τ による。

$\mathrm{Nek}_G[C]$ は、C が種数 $g \geq 1$ で n 点つきだと、$\mathcal{M}_{g,n}$ 上の

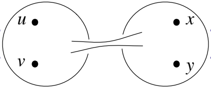
$$H^\bullet_{G\times SO(4)}(\mathcal{M}_G)^{\otimes n} \otimes (\mathbb{C}[\mathfrak{g}_\mathbb{C}]^{G_\mathbb{C}})^{g-1}$$

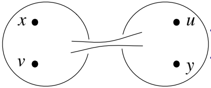
束の切断を定める。この切断の性質は、もとの $\mathcal{S}_G[C]$ の性質をもうすこし考えると、$W(G)$ 代数の共形ブロックの性質そのものであることがわかる。$\Rightarrow H^\bullet_{G\times SO(4)}(\mathcal{M}_G)$ は $W(G)$ の表現であるべし。

はじめの

$$\oint \frac{\prod_{\pm\pm\pm}\Gamma_{p,q}(tu^{\pm1}v^{\pm1}z^{\pm1})\prod_{\pm\pm\pm}\Gamma_{p,q}(tx^{\pm1}y^{\pm1}z^{\pm1})}{\prod_{\pm}\Gamma_{p,q}(t^2z^{\pm2})\prod_{\pm}\Gamma_{p,q}(z^{\pm2})}\frac{dz}{2\pi i z}$$

が $u \leftrightarrow x$ についても対称、というのは、

$\mathcal{S}_{A_1}[$ 

$] = \mathcal{S}_{A_1}[$ 

$]$

というのの両辺の $Z(\ldots)(S^3 \times S^1)$ を取れば現れる。

楕円ガンマ関数の等式をいろいろ示したければ、いくらでも示して欲しい公式がありますのでご連絡ください。

まとめると

- G 対称な場の量子論の圏では直積や G による商が可能。
- G 作用をもつベクトル空間の圏からこの圏への関手 B, F がある。
- 素粒子の標準模型は $[F(S) \times B(V)]/G$ を変形したもの。
- また、G 対称な場の量子論の圏から他のきちんと定義された圏への関手もいろいろある。
- それを使って、場の量子論の圏内の主張をきちんと定義された圏での主張にうつすと、いろいろ数学の予想が得られる。

ということです。ご清聴有り難うございました。