

数学と超対称ゲージ理論

立川裕二 (東京大学理学部物理学科)*

2012年8月13日

1. はじめに

場の量子論、特に超対称ゲージ理論の研究から、厳密数学における予想があらわれ、それが後にきちんと定式化、証明される、ということがあります。規模の大きいものでは、ミラー対称性と Seiberg-Witten の monopole 方程式が有名でしょう。もっと小さな予想が得られることもよくあり、数学で丁度最近まったく別の経緯で証明されたことが自然に場の量子論の研究から出てくる、ということもしばしばあります。

また、場の量子論の計算結果は現実の素粒子物理の実験結果と非常によく一致します。数学者はこれを聞いて、「厳密に定義できていないのに何故そもそも計算が出来るのか」と驚くことがあります。場の量子論が一体数学的になんであるかがわからなくとも、実験で測られる量を理論的に計算するアルゴリズム自体は厳密に書き下されていますので、真面目な理論物理屋はそれを計算するのです。

例えば、電子の異常磁気能率 a_e という量は、微細構造定数 $\alpha \sim 1/137$ に関する漸近級数で計算できますが、今年ようやく α^5 の項の計算が完了し、実験による測定と見事に一致しています [AHKN12]。また、種々の中間子の質量は、「強い力の結合定数」 $\alpha_s \sim 0.1$ の関数として求められますが、これは漸近級数として計算すると収束性が悪すぎるため、経路積分という無限次元積分を、ある意味リーマン積分を定義したように有限次元和として近似して頑張って極限操作をして計算します。これは上の異常磁気能率の計算よりさらに計算量が必要ですので、世界最速のスーパーコンピューター等をつかって計算がなされており、これもここ数年でようやく実験結果を再現するようになりました、例えば [Kro12] を参照ください。ミレニアム問題は、実質この極限操作が収束することを数学的に証明せよという問題ですが、極限を取る前の途中の数字で十分現実にあっているわけです。

このように、実験結果も説明し、純粹数学にもいろいろ影響を与えるのですから、場の量子論自体が何か全うなききちんと定義された数学にできるであろう、というのは当然期待されることです。勿論、場の量子論の定式化の試みは長い間行われてきているのですが、実際に理論物理屋が素粒子標準理論で実験と合わせる為にするような計算をその中で実際に展開出来るような数学的枠組みで、かつ、ミラー対称性等をその枠組みから導きだせるようなもの、はまだないので、それを考えたいというわけです。

以下では、おこがましいですがまず 2章で「場の量子論」を数学的に定義しようと試み、素粒子論の標準模型をこの枠組みのなかで述べます。次に 3章で超対称性をもつ理論を導入し、おしまいには 4章で、そこから数学的な予想がどのように取り出されるかを説明したいと思います。

ところで、物理的現実には「場の量子論の圏」のある特定の対象であって、大抵の素粒子物理学者はその特定の対象の性質を調べます。しかし、取り出される数学の予想

2000 Mathematics Subject Classification: 81T40, 81T45, 81T60

キーワード: physics, quantum field theory, supersymmetry

* e-mail: yuji.tachikawa@ipmu.jp

は、「場の量子論の圏」自体の性質を別の既に定義された圏 \mathcal{C} に関手的に移したものであるように思われます。ですから、この小文では、「場の量子論の圏」の対象の間の関係に重点を置いて説明したいと思います。

また、万が一物理屋の方がこの文章を読んだ場合に備えて一言申しますと、物理屋むけの場の量子論の教科書は物理屋むけとしては全く現状で構わないと思っています。しかし、数学者が読めるようには書けていないので、そこを何とかしたいと思っています。勿論経路積分の存在証明など、本質的に難しいところをすぐに解決できるとは思いませんが、きちんと数学的に定式化された枠内での数学的予想という形に物理屋の知っている場の量子論のいろいろな事実を書き直そう、というわけです。

2. 場の量子論の枠組み

2.1. D 次元の場の量子論

「 G 対称性を持つ D 次元の場の量子論」 Q は二つ組 (\mathcal{V}, Z) で、 \mathcal{V} は \mathbb{C} -線形空間、 Z は境界のないコンパクト実 D 次元スピン多様体 X とその上の異なる点 x_1, \dots, x_k 、及び X 上の接続つき主 G 束 $W \rightarrow X$ に対して線形写像

$$Z(W \rightarrow X; x_1, \dots, x_k) : \mathcal{V}^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{C} \quad (2.1)$$

を対応させるもので、次の条件を満たすものです。

- \mathcal{V} の元は演算子と呼ばれます。 \mathcal{V} は自然数/2 で filter 付けされており: $\mathcal{V} = \bigcup_{d \in \mathbb{N}/2} \mathcal{V}_d$ 、また $\mathcal{V}_0 = \mathbb{C} \cdot 1$ 、各 \mathcal{V}_d は $G \times \mathfrak{so}(D)$ の有限次元表現です。
- \mathcal{V} 上には「演算子積展開」と呼ばれる非可換非結合な積が沢山入っています。
- $Z(X; x_1, \dots, x_k)$ は相関関数と呼ばれます。 $W \rightarrow X$ と $W' \rightarrow X'$ との等長で G -同変な写像で x_i が x'_i に移ると $Z(X; x_1, \dots, x_k) = Z(X'; x'_1, \dots, x'_k)$ 。 $Z(X; x_1, \dots, x_k)$ は x_i について連続、また X の計量および主 G 束の接続の連続変形についても連続。また、 $v \in \mathcal{V}^{\otimes(k-1)}$ に対して

$$Z(X; x_1, x_2, \dots, x_k)(1 \otimes v) = Z(X; x_2, \dots, x_k)(v). \quad (2.2)$$

- 特に点がない場合も許され、 $1 \in \mathcal{V}^{\otimes 1} = \mathbb{C}$ に対して $Z(W \rightarrow X)(1)$ は単に $Z(W \rightarrow X)$ と書かれ、分配関数と呼ばれます。
- 以上の Z の定義はすこし狭すぎるので、拡張して、 Z は「 k 点付き D 次元スピン多様体上の接続付き主 G 束」の族 $W \rightarrow U$ に対して、内積および内積と整合する接続付きの \mathbb{C} -束 $L \rightarrow U$ を対応させ、さらに線形写像 $Z(W) : \mathcal{V}^{\otimes k} \rightarrow \Gamma(L, U)$ を与えるもの、とする必要があります。勝手な族 $W \rightarrow U$ に対して、対応する \mathbb{C} -束が自明であるような Q を「アノマリがない」と言います。そのばあいは上記のように簡略化することが出来ます。
- その他まだまだ沢山ここには書ききれないいろいろな条件があります。

特に、 $D = 1$ の場合は普通の量子力学に帰着します、すなわち、何かヒルベルト空間 \mathcal{H} があって、 \mathcal{V} は \mathcal{H} 上の作用素の空間の部分空間であり、特に $H \in \mathcal{V}$ という元があって、 S^1_β を一周 β の S^1 とすると、 $v \in \mathcal{V}$ に対して $v(x) = e^{xH} v e^{-xH}$ として、

$$Z(X; x_1, \dots, x_k)(v_1 \otimes \dots \otimes v_k) = \text{tr}_{\mathcal{H}} e^{-\beta H} v_1(x_1) v_2(x_2) \dots v_k(x_k). \quad (2.3)$$

また、Wightman および Osterwalder-Schrader の公理系は、 X が特に \mathbb{R}^4 の場合に限って公理系を書き下したものと考えられます。

二つの「場の量子論」 $Q = (\mathcal{V}, Z)$ と $Q' = (\mathcal{V}', Z')$ が同値であるとは、線形な全単射 $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ があって、これのもとで Z が Z' にうつることだとしましょう。

「 D 次元の場の量子論」 $Q = (\mathcal{V}, Z)$ 自体の族を考えることも重要です。族ふたつ $Q_{u \in U}$ と $Q'_{u' \in U'}$ が与えられた際、それが同値であるとは、連続な全単射 $f: U \rightarrow U'$ があって、 $Q_u \simeq Q'_{f(u)}$ となることだとしましょう。

部分群 $H \subset G$ に対し、「 G 対称性をもつ D 次元の場の量子論」 Q は「 H 対称性をもつ D 次元の場の量子論」と言うことができます。特に、 H が一点からなる自明な群の場合、「 H 対称性をもつ D 次元の場の量子論」を単に「 D 次元の場の量子論」と呼びます。

また、「 G' 対称性をもつ D 次元の場の量子論」 $Q' = (\mathcal{V}', Z')$ と「 G'' 対称性をもつ D 次元の場の量子論」 $Q'' = (\mathcal{V}'', Z'')$ が与えられた場合、場の理論の直積「 $G' \times G''$ 対称性をもつ D 次元の場の量子論」 $Q' \times Q'' = (\mathcal{V}, Z)$ が次のように定義されます：

- $\mathcal{V} = \mathcal{V}' \otimes \mathcal{V}''$ 、但し filter づけは足し合わされるようにする: $\mathcal{V}'_{d'} \otimes \mathcal{V}''_{d''} \subset \mathcal{V}_{d'+d''}$ 。
- X 上の接続付き主 $G' \times G''$ 束 $W \rightarrow X$ から、 G' 束 $W' \rightarrow X$ と G'' 束 $W'' \rightarrow X$ が定まるので、

$$Z(W \rightarrow X; x_1, \dots, x_k) = Z'(W' \rightarrow X; x_1, \dots, x_k) Z''(W'' \rightarrow X; x_1, \dots, x_k)。$$

また、 Q' と Q'' が共に「 G 対称性をもつ D 次元場の量子論」の場合、 $Q' \times Q''$ は「 $G \times G$ 対称性をもつ D 次元の場の量子論」になりますが、対角部分群 $G \subset G \times G$ を取って $Q' \times Q''$ を「 G 対称性をもつ D 次元の場の量子論」と言うことが出来ます、これを $Q' \times_G Q''$ と書きましょう。

2.2. 場の量子論の変種

以上のように、通常物理屋が必要とする場の量子論は多様体 X 上にリーマン計量を必要とします。しかし、公理系をすこし変形して $Q = (\mathcal{V}, Z)$ の $Z(X)$ が、多様体 X の位相にのみ依る、微分構造にのみ依る、複素構造のみに依るようなものを考えることもできます。歴史的に、微分構造にのみよる場の量子論のことを位相的場の量子論と呼びます。Donaldson 不変量は四次元の位相的場の量子論の典型例です。二次元の位相的場の量子論の公理系は Atiyah によって与えられました。二次元の複素構造にのみ依る場の量子論は通常二次元共形場理論と呼ばれ、これの数学的公理化は局所的には頂点作用素代数、大局的には Segal の公理系で与えられます。

通常場の量子論は実解析的難しさがありますが、これらの変種はそれぞれ位相的、微分構造的、複素構造的難しさをもちますから、数学者の興味によってそれらが別個に調べられてきたのも自然です。しかしながら、場の量子論の正しい定式化は、一般に「 $\times \times$ 構造に依存する D 次元の場の量子論」が $\times \times$ によらず定式化され、 $\times \times$ を特殊化すると、Atiyah や Segal の公理系、頂点作用素代数の公理系、Wightman 公理系等が一斉に得られるようなものであるべきでしょう。

2.3. 自明な理論、自由場の理論

最も簡単な理論は (\mathcal{V}, Z) を $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 = \mathbb{C} \cdot 1$ と取り、 $Z(X)(1) = 1$ と定めたものです。これは勝手な G に対し「 G 対称性をもつ D 次元の場の量子論」です。これを trivial と書きましょう。

また、 G が \mathbb{C} -線形空間 V にユニタリに作用すると、 V を用いて自由場の理論と呼ばれる「 G 対称性をもつ D 次元場の量子論」が数種厳密に構成できます。

2.3.1. 自由ボゾン理論

自由ボゾン理論 $B(G, V) = (\mathcal{V}, Z)$ については、 \mathcal{V} は V を用いて書け、 Z は $Z(W \rightarrow X) = 1/\det \Delta$ で与えられます。但し $E = V \times_G W$ を V に伴う X 上の接続つきベクトル束として、 $\Delta: \Gamma(E, X) \rightarrow \Gamma(E, X)$ をその共変微分より定まるラプラシアンとし、 \det は適切な意味で定めるとする。

2.3.2. 自由フェルミオン理論

一方、自由フェルミオン理論を定めるには、 $\mathfrak{so}(D)$ のスピン表現の順不同二つ組 S, S' で $(S \otimes S' \otimes \mathbb{R}^D)^{\mathfrak{so}(D)}$ が一次元であるものを選ぶ必要があります。 $D = 4n$ だとこのような順不同二つ組は実質一通りですが、 $D = 4n + 2$ だと二種類あります。すると、自由フェルミオン理論 $F(G, V, (S, S'))$ が定まります。 \mathcal{V} は V, S, S' を用いて書け、 Z は $Z(W \rightarrow X) = \det \mathcal{D}$ 、但し \mathcal{D} は (S, S') に対応する X 上のスピン束および W に随伴するベクトル束 $V \times_G W$ から作った Dirac 作用素です。以下、 $D = 4n$ の場合は (S, S') の選び方は一通りですから省略して単に $F(G, V)$ と書くことにします。

2.4. ゲージ理論

G のコンパクト単純リー群、 G' を群とします。すると、「 $G \times G'$ 対称性をもつ D 次元場の量子論」 $Q = (\mathcal{V}, Z)$ に対して、开区間 $U = \mathbb{R}_{>0}$ に依存する「 G' 対称性をもつ D 次元場の量子論」の族の同型類 $(Q/G)_{u \in U} = (\mathcal{V}', Z')_{u \in U}$ を定めることができます、これがゲージ理論です。 $Z'(X)_{u \in U}$ は経路積分を用いて次のように定義されます。簡単のため G' は自明とします。 \mathcal{M}_X を接続付き主 G 束 $W \rightarrow X$ のモジュライ空間とし、 $d\text{vol}$ をその上の自然な測度とする。 \mathcal{M}_X 上の点 $W \rightarrow X$ に対し、接続の曲率を F と書くと、 X の計量、正の数 α 、 \mathfrak{g} の Killing 形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いて接続の作用

$$S_\alpha(W \rightarrow X) = \int_X \frac{1}{\alpha} \langle F, \star F \rangle \quad (2.4)$$

が定まる。すると

$$Z'_\alpha(X) = \int_{\mathcal{M}_X} Z(W \rightarrow X) e^{-S_\alpha(W \rightarrow X)} d\text{vol}. \quad (2.5)$$

上記の無限次元積分をきちんと定義するのは大問題です。 \mathcal{M}_X 上の測度 $d\text{vol}$ 自体は定義できないが、測度の1パラメタ族 $d\text{vol}_\alpha \stackrel{\text{“=”}}{=} e^{-S_\alpha(W \rightarrow X)} d\text{vol}$ 自体は定義できると物理屋は思っています。

一つの方法は、 $Z'_\alpha(X; x_1, \dots, x_k)$ を $V^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{C}$ なる線形写像として定義するのを放棄して、まずは α の形式的冪級数として

$$Z'(X; x_1, \dots, x_k) : V^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{C}[[\alpha]] \quad (2.6)$$

と定義するのが物理屋としては第一歩で、これをきちんと数学的に定式化したのが Costello の教科書 [Cos11] です。物理屋はその形式的冪級数に無理矢理実数 α を代入してやります。

もう一つは、経路積分を安直にリーマン積分を定義したときのように有限近似をして極限をとって定義しようと試みることができます。問題は極限が取れることを証明することが非常に困難なところにあります。無理矢理スーパーコンピュータで計算してやると、極限は存在しそうであることと、現実の物理とあうことが知られているのは上に述べました。

さて、 Q が「 $G \times G'$ 対称性をもつ D 次元場の量子論」であるばあい、「 D 次元場の理論」の 2 パラメタ族が

$$((Q/G)_{u \in \mathbb{R}_{>0}}/G')_{u' \in \mathbb{R}_{>0}}, \quad ((Q/G')_{u' \in \mathbb{R}_{>0}}/G)_{u \in \mathbb{R}_{>0}} \quad (2.7)$$

のふたつ定義できますが、この二つの族は自然に同値になると思われるので、これを

$$(Q/G \times G')_{u \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}} \quad (2.8)$$

と書くことにしましょう。

また、特に $D = 4$ の場合、1 パラメタ族 $(Q/G)_{\alpha \in \mathbb{R}_{>0}}$ は自然に上半平面 $\tau = \theta/2\pi + \sqrt{-1}/\alpha \in H$ でパラメタ付けされる 2 パラメタ族 $(Q/G)_{\tau \in H} = (\mathcal{V}', Z')_{\tau}$ に

$$Z'_{\tau}(X) = \int_{\mathcal{M}_X} Z(W \rightarrow X) \exp \left[\int_X \alpha \langle F, \star F \rangle + \sqrt{-1} c^{-1} \theta \langle F, F \rangle \right] \text{dvol}_{\mathcal{M}_X} \quad (2.9)$$

として拡張できます。但し、 c は勝手なスピノ多様体 X と主 G 束 $W \rightarrow X$ に対して $\int_X \langle F, F \rangle$ が $\in c\mathbb{Z}$ であるような最小の正実数として選びました。すると $(Q/G)_{\tau \in H}$ は $\tau \rightarrow \tau + 1$ に対して不変な族となります。

2.5. 標準模型と Higgs 粒子

ここまで言葉を準備すると、この世を記述する標準模型がどんなものが説明することができます。この世の素粒子、ひいてはそれから構成されている読者のあなたもこれを書いている僕も、ある「4次元の場の量子論」 SM で記述されます。

そのためには、まずコンパクト群 $\text{Spin}(10)$ の 16 次元既役スピノル表現 $\text{Spin}(10) \rightarrow \text{U}(\mathcal{S})$, $\mathcal{S} \simeq \mathbb{C}^{16}$ を取り、自由フェルミオン理論 $F(\text{Spin}(10), \mathcal{S} \oplus \mathcal{S} \oplus \mathcal{S})$ を考えます。 $\text{Spin}(10)$ の自然な部分群 $\text{U}(5)$ をとり、そのブロック対角な部分群 $\text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ をとります。この $\text{SU}(2)$ の既役二次元表現を T として、自由ボソン理論 $B(\text{SU}(2), T)$ を考えます。

そして、4次元量子論の複素 3 パラメタ族

$$[(F(\text{Spin}(10), \mathcal{S} \oplus \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}) \times B(\text{SU}(2), T)) / \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1))_{u \in U_0}] \quad (2.10)$$

但し $U_0 = H \times H \times H$ を考える。この実 6 パラメタ族は、もっとパラメタの多い族 $SM_{u \in U}$, $U_0 \subset U$ に埋め込まれており、現実を記述する標準模型はそのある一つ 現実 $\in U$ における対象 $SM_{\text{現実}}$ です。

今年、LHC による実験で、Higgs 粒子と思われる粒子が見つかったというニュースが大々的に流れたのは皆さんもご存知かと思いますが、これは、理論的に現実には上記の $B(\text{SU}(2), T)$ という因子があるだろうと Higgs さんが予言していた [Hig64] が、40 年を経てようやく実験的に確認されたということです。

3. 超対称場の量子論

さて、これまで一般の場の量子論を述べてきましたが、そろそろ超対称場の理論を議論しましょう。超対称場の理論はそもそも $D \leq 10$ 次元でしか存在しえず、また $\text{Spin}(D)$ のスピノルの構造、およびほぼ等価ですが $KO^{-D}(pt)$ の性質に支配されるので、この小文では一般の $D \leq 10$ で議論するのは放棄して、 $D = 4$ に限ることにします。4次元超対称場の理論には $k = 1, 2, 4$ に対して「 $\mathcal{N} = k$ 超対称な 4次元場の理論」とよばれるものがありますので、順に説明します。また、以下簡単のため「4次元」という形容は略します。

3.1. $\mathcal{N} = 1$ 超対称場の理論

「 $\mathcal{N} = 1$ 超対称場の量子論」 $Q = (\mathcal{V}, Z)$ は「場の量子論」であって、いろいろな性質を追加で満たすものです。条件のうちひとつだけを述べると、

- \mathcal{V} は $\mathbb{N}/2$ による filter づけに加えて、独立に $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 次数づけが入り、filter を $1/2$ だけあげる $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が奇な作用 $d : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ で $d^2 = 0$ なものがある。

すると、 d を用いて Q の chiral ring と呼ばれる

$$R(Q) = H(\mathcal{V}, d)^{\text{so}(4)} \quad (3.1)$$

を定義できます。上で、一般の「場の量子論」 $Q = (\mathcal{V}, Z)$ の \mathcal{V} には沢山の非可換非結合積が入っていると書きましたが、これらの積は R 上ではひとつの結合的な一般には非可換な積を定め、 $R(Q)$ は \mathbb{C} -代数になります。 Q の「真空のモジュライ空間」 $\mathcal{M}(Q)$ を代数多様体としては

$$\mathcal{M}(Q) = \text{Spec Center } R(Q) \quad (3.2)$$

で定めます。これまで X はコンパクトとしてきましたが、 X がコンパクトでない場合は、 $p \in \mathcal{M}(Q)$ に対して

$$Z(X, p; x_1, \dots, x_k) : \mathcal{V}^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{C} \quad (3.3)$$

を定めることが出来ます。 $\mathcal{M}(Q)$ は X の非コンパクト性にともなう境界条件を与えると思ってください。

3.2. $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の理論

次に、「 G 対称性をもつ $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の量子論」 Q は、「 G 対称性をもつ $\mathcal{N} = 1$ 超対称場の理論」であり、「 $G \times \text{SU}(2)$ 対称性をもつ場の理論」であって、さらにいろいろな条件を満たすものです。この場合、書かなかった公理系から、vacuum moduli $\mathcal{M}(Q)$ には Coulomb 枝、Higgs 枝と呼ばれる特別な部分空間 $\mathcal{C}(Q)$ と $\mathcal{H}(Q)$ があることが従います。 $\mathcal{H}(Q)$ は hyperkähler G -空間となります。一方、 $\mathcal{C}(Q)$ は Donagi の意味 [Don97] での正則可積分系 $\mathcal{I}(Q) \rightarrow \mathcal{C}(Q)$ を定め、また、 $\mathcal{C}(Q)$ の複素次元 r を理論 Q の階数といいます。 $\mathcal{C}(Q)$ には被覆 $\bigcup_i U_i$ があって、各 U_i 上には平坦座標 $\iota_i : U_i \hookrightarrow \mathbb{C}^r$ という構造が入ります。

3.2.1. 自由な $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の理論

コンパクト群 G と、その擬実表現 $V \simeq \mathbb{H}^n$ をとります。(すなわち、準同形 $G \rightarrow \mathrm{Sp}(V)$ が与えられている。) このとき、 $G \times \mathrm{SU}(2)$ の V への作用で、 G の作用はそのまま、 $\mathrm{SU}(2)$ の作用が自明であるものをそのまま V と書き、また、 $\mathrm{SU}(2)$ の作用が V への自然な $\mathrm{Sp}(V) \times \mathrm{Sp}(1)$ 作用を用いて定めたものを V' と書くことにしましょう。

$$H(G, V) = B(G \times \mathrm{SU}(2), V') \times F(G \times \mathrm{SU}(2), V) \quad (3.4)$$

は $G \times \mathrm{SU}(2)$ 対称性をもつ自由な4次元場の理論ですが、 $\mathcal{N} = 2$ 超対称な場の理論になります。これは擬実表現 V の half-hypermultiplet と呼ばれます。特に V_0 を G のユニタリ表現として $V = V_0 \oplus \bar{V}_0$ である場合、表現 V_0 の hypermultiplet と呼ばれます。 $\mathcal{C}(H(G, V))$ は一点で、 $\mathcal{H}(H(G, V)) = V$ です。

特に、0次元四元数ベクトル空間に G が自明に作用している場合、「 G 対称性をもつ $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の量子論」の自明な例になります。これも trivial と書きましょう。

3.2.2. $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論

G をコンパクト単純リー群として、 Q が「 $G \times G'$ 対称性をもつ $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の量子論」とします。これに対して、「 G' 対称性をもつ $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の理論」の複素1パラメタ族 $(Q//G)_{\tau \in H}$ が

$$(Q//G)_{\tau \in H} = ((Q \times_G B(G, \mathfrak{g}_\mathbb{C}) \times_G F(G, \mathfrak{g}_\mathbb{C}))/G)_{\tau \in H} \text{ のある適切な変形} \quad (3.5)$$

として定義されます。クーロン枝とヒッグス枝に関しては次の性質を満たします:

- $\mathcal{H}((Q//G)_\tau) = \mathcal{H}(Q)//G$ 、ただし左辺はハイパーケーラー商として。
- $\mathcal{C}((Q//G)_\tau) = \mathcal{C}(Q) \times (\mathfrak{g}_\mathbb{C}/G_\mathbb{C})$ 、但し代数多様体として。可積分系 $\mathcal{I}(Q//G)_\tau \rightarrow \mathcal{C}(Q//G)_\tau$ は τ に依存する。

特に、 $H(G, V)//G$ の平坦座標に関しては、少なくともひとつのまい部分集合 $U_0 \subset \mathcal{C}$ があり、その上の平坦座標の値域はカノニカルに G の複素 Lie 環のカルタン部分環と同一視できます: $\iota_0 : U_0 \hookrightarrow \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ 。

3.3. 超共形指数

さて、 $(\beta, R) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{SO}(4)$ でパラメタされる4次元リーマン多様体 $X_{\beta, R}$ および、さらにその上の主 G' 束 $W_{\beta, R, \mu} \rightarrow X_{\beta, R}$ で $\mu \in G'$ によるものを

$$W_{\beta, R, \mu} = \mathbb{R} \times S^3 \times G' / \sim \quad \text{但し} \quad (t, x, f) \sim (t + 2\pi\beta, Rx, \mu f) \quad (3.6)$$

とさだめます。 G' 対称性をもつ $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論 Q に対して、 $Q(W_{\beta, R, \mu})$ は $\mathbb{R}_{>0} \times \mathrm{SO}(4) \times G'$ 上の関数を定め、これを Q の超共形指数と呼びます。構成より、関数は $\mathrm{SO}(4) \times G'$ の随伴作用で不変なので、カルタントーラス $\mathbb{R}_{>0} \times T^2 \times T^{\mathrm{rank} G'}$ 上の関数でワイル不変なものと思うことが多いです。これを $Z_{SCI}(Q)(p, q, t; \mu) = Q(W_{\beta, R, \mu})$ と書きましょう。ただし、 $t = e^{-\beta}$ 、 p, q は $\mathbb{R}_{>0} \times T^2$ の適切な座標、 $\mu \in T^{\mathrm{rank} G'}$ 。

特に、 $Q = (H(G \times G', V)//G)_\tau$ に関しては、 Z_{SCI} はあからさまに書き下せ、 τ には依存しません。 $T^{\mathrm{rank} G'}$ 上の関数を、 G' のウェイト格子の群環と同一視すると、

$$Z_{SCI}(Q)(p, q, t) = \left[\prod_{\alpha \in \Delta} \frac{\Gamma(t^2 e^\alpha; p, q)}{\Gamma(e^\alpha; p, q)} \prod_{v_1 \oplus v_2} \Gamma(t e^{v_1} \mu^{v_2}; p, q) \right]_{G, 1} \quad (3.7)$$

です。但し第一の積は G のルート Δ に渡り、第二の積は V のウェイト $v = v_1 \oplus v_2$ についてわたります、ここで $v_{1,2}$ はウェイト v を \mathfrak{g} と \mathfrak{g}' に制限したもので、そして $[\cdots]_{G,1}$ は G のルート格子の群環の $e^0 = 1$ の係数をとる操作で、 $\Gamma(z; p, q)$ は楕円ガンマ関数

$$\Gamma(z; p, q) = \prod_{j,k \geq 0} \frac{1 - z^{-1} p^{j+1} q^{k+1}}{1 - z p^j q^k} \quad (3.8)$$

です。

3.4. 位相的捻り

一般に「 $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の理論」 $Q = (\mathcal{V}, Z)$ に対し、「場の理論」 $\hat{Q} = (\hat{\mathcal{V}}, \hat{Z})$ を次のように定めましょう。まず、 $\hat{\mathcal{V}} = R(Q) = H(\mathcal{V}, d)^{50(4)}$ 。 \hat{Z} は、次のように定めます。スピン構造つきリーマン多様体 X からは、 X 上の主 $\text{Spin}(4) \simeq (\text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R) / \{\pm 1\}$ 束が定まるが、これから主 $\text{SU}(2)_L$ 束 $W \rightarrow X$ を定める。それを用いて、

$$Z'(X) = Z(W \rightarrow X) \quad (3.9)$$

とする。こうすると、 \hat{Q} は X のリーマン計量には依存せず、微分構造のみに依存します [Wit88]。 \hat{Q} を、 Q の位相的捻りと呼びます。特に、 $Q = (\text{trivial} // \text{SU}(2))_\tau$ の位相的捻りが Donaldson 不変量です。

一般に、 $Q = [H(G, V) // G]_\tau$ に対して位相的捻り \hat{Q} の分配関数 $\hat{Z}(X)$ は、 X 上の反自己双対 G 接続の上の積分でかけます。これは、無限次元積分 (2.5) が有限次元積分に局所化するのだと思われています。

数学でいう Seiberg-Witten 不変量は、 $G = \text{U}(1)$ およびその自然な一次元表現 V に対し、 $Q' = (H(G, V \oplus \bar{V}) // \text{U}(1))_\tau$ の位相的捻り \hat{Q}' です。位相的に捻る前の Q が Q' にほぼ帰着するというのが物理での Seiberg-Witten 理論 [SW94a] で、これをもとに、Witten は Donaldson 不変量 \hat{Q} は Seiberg-Witten 不変量 \hat{Q}' に帰着する、と提唱したのでした。

3.5. Nekrasov 分配関数

また、 X 自身に等長変換群 M が作用する場合、 S を $H_M(pt)$ の商体として、 $\hat{Q}(X)$ は $\mathbb{C} \otimes S$ に値をとるように拡張できます。特に $X = \mathbb{C}^2$ に $M = S^1 \times S^1$ を作用させた場合のものを Nekrasov の分配関数と呼びます。この場合 $\mathbb{C} \otimes S = \mathbb{C}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ と書くのが普通です。Nekrasov の分配関数は $\mathbb{C}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ に値をとる関数 $\hat{Z}(\mathbb{C}^2, p)$ ただし $p \in \mathcal{C}(Q)$ です。

特に $Q = (H(G, \rho) // G)_\tau$ に関しては、上記のように $\mathcal{C}(Q)$ の開集合で $U_0 \hookrightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ なるものが取れるので、Nekrasov 分配関数は $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の開集合上の $\mathbb{C}(\epsilon_1, \epsilon_2)$ に値をとる関数を与えます。これの $q = e^{i\tau}$ の形式的冪級数としての厳密な数学的定義は [NY03] に与えられており、 G のインスタントンモジュライ上の同変積分で書けます。

4. S 双対性、Gaiotto 構成と数学

ゲージ理論の二つの族 Q_τ と $Q'_{\tau'}$ が、 $\tau' = -1/\tau$ 等の大胆な変換で同値になる場合を二つの族の S 双対性と言います。これは物理屋には驚きです。なぜなら、場の量子論は通常はまず $\alpha = 1/\text{Im}\tau$ の $\alpha = 0$ 回りで (形式的) 冪級数として導入されますので、 $\alpha = +\infty$ のまわりで $1/\alpha$ で展開できるとは思っても見なかったからです。

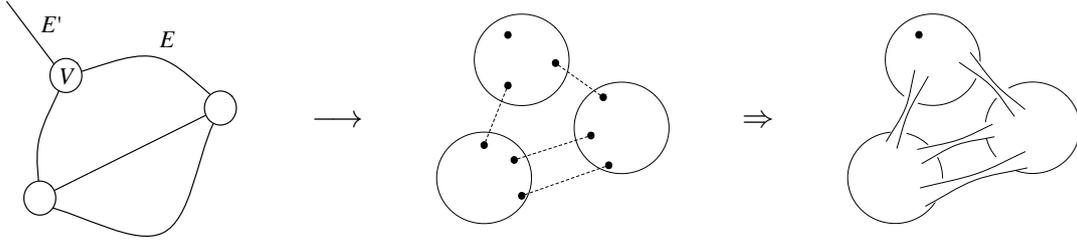


図 1: 三価グラフ。 E は内辺で E' は外辺である。また、対応する点つきリーマン面。

4.1. S 双対性の基本的な例

$\mathcal{N} = 2$ 超対称場の量子論における S 双対性のはじめの例は 1994 年に Seiberg と Witten が見出しました [SW94b]。 $\text{Spin}(8)$ の既役実 8 次元表現には 3 種類ありますので V, S, C とします。 $\text{SU}(2)$ の既役複素 2 次元表現を T と書きましょう、これは擬実表現です。すると、 $V \otimes_{\mathbb{R}} T$ は $\text{Spin}(8) \times \text{SU}(2)$ の擬実表現になります。 S, C についても同様。

そこで、 $\text{Spin}(8)$ 対称性をもつ $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論の族 $(Q_{V,S,C})_{\tau \in H}$ を

$$(Q_V)_{\tau \in H} = [H(\text{Spin}(8) \times \text{SU}(2), V \otimes_{\mathbb{R}} T) // \text{SU}(2)]_{\tau/2 \in H} \quad (4.1)$$

と定めましょう、 Q_S, Q_C についても同様。すると、

$$(Q_V)_{\tau} = (Q_V)_{\tau+2}, \quad (Q_S)_{\tau} = (Q_S)_{\tau+2}, \quad (Q_C)_{\tau} = (Q_C)_{\tau+2} \quad (4.2)$$

であり、さらに

$$(Q_V)_{\tau} = (Q_S)_{-1/\tau} = (Q_C)_{1/(1-\tau)} \quad (4.3)$$

となります。

4.2. Gaiotto 構成

この関係式では、 $\text{Spin}(8)$ の triality が使われているので、どのように一般化すべきかは長らく謎でした。正しい一般化を発見したのは Gaiotto です [Gai09]。その論文では、一般の $\text{SU}(N)$ 型に関する構成が述べられていますが、簡単のため $\text{SU}(2)$ 型の場合のみ述べましょう。

三価グラフ Γ とは、頂点の集合と辺の集合で、各頂点は三つの辺につながっており、各辺は一つまたは二つの頂点につながっているものとします。一つの頂点にのみつながっている辺を外辺、二つの頂点につながっている辺を内辺と呼びます。図 1 を参照。

さらに、各内辺に対し上半平面の点に対応させる飾り $\tau: \{E\} \rightarrow H$ を考え、飾り付き三価グラフ (Γ, τ) を考えます。これに対し、 $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論を以下のように対応させます。各辺 E に対し、複素 2 次元空間 $T_E \simeq \mathbb{C}^2$ を導入し、 $\text{SU}(T_E)$ を考えます。そこで

$$G = \prod_{E:\text{内辺}} \text{SU}(T_E), \quad G' = \prod_{E:\text{外辺}} \text{SU}(T_E) \quad (4.4)$$

とします。各頂点 V に対し、つながっている三つの辺を $E_{V,1}, E_{V,2}, E_{V,3}$ とし、

$$T_{\Gamma} = \bigoplus_V T_{E_{V,1}} \otimes_{\mathbb{C}} T_{E_{V,2}} \otimes_{\mathbb{C}} T_{E_{V,3}} \quad (4.5)$$

を考えます。これは $G \times G'$ の擬実表現になります。そこで、 G' 対称性をもつ $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論の族を $\mathcal{G}(\Gamma)_\tau$ を

$$\mathcal{G}(\Gamma)_\tau = (H(G \times F, T_\Gamma) // G)_\tau \quad (4.6)$$

で定義します、ここで、 $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論を定義する際に、先に述べたように、 G の各単純成分ごとに上半平面の点がひとつ指定できることを使い、右辺の τ を Γ の飾りと同定することにしました。

さて、飾り付き三価グラフ (Γ, τ) は自然にリーマン面のパンツ分解を与えているとすることができます。すなわち、各頂点に対し、三点 p_1, p_2, p_3 付きの \mathbb{CP}^1 で、かつ、 p_i が $z_i = 0$ であるような局所座標 z_1, z_2, z_3 がつけられたものを導入します。内辺 E が頂点 V_1 と V_2 につながっているならば、それらに対応する \mathbb{CP}^1 の点 p, p' および局所座標 z, z' を取り、 $zz' = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau(E)}$ とすれば、点付きリーマン面 $C(\Gamma, \tau)$ ができます。図 1 を参照してください。

すると、Gaiotto の主張は、次のようになります。 n 点つき種数 g のリーマン面のモジュライ空間を $\mathcal{M}_{g,n}$ とすると、それをパラメタ空間とする $SU(2)^n$ 対称性をもつ $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論の族

$$\mathcal{Q}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n} \quad (4.7)$$

がある。パンツ分解 Γ を固定すると、それに対応した $\mathcal{M}_{g,n}$ の境界 D_Γ があり、その近傍を $U_\Gamma \subset \mathbb{C}^{\dim \mathcal{M}_{g,n}}$ とし、 D_Γ は $0 \in \mathbb{C}^{\dim \mathcal{M}_{g,n}}$ で与えられるものとする。すると、上記族を U_Γ に制限したものは、ゲージ理論の族 $\mathcal{G}(\Gamma)_\tau$ 、 $\tau \in H^{\dim \mathcal{M}_{g,n}}$ を $e^{\pi i \cdot} : H \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて $\mathbb{C}^{\dim \mathcal{M}_{g,n}}$ 上の族と思ったものと同値である。

この構成をつかうと、前節の $\text{Spin}(8)$ 対称性をもつゲージ理論に関する主張 $(Q_V)_\tau = (Q_S)_{1/\tau}$ は、

$$\text{Spin}(8) \supset \text{Spin}(4) \times \text{Spin}(4) \simeq [\text{SU}(2)_A \times \text{SU}(2)_B] \times [\text{SU}(2)_C \times \text{SU}(2)_D] \quad (4.8)$$

という部分群に制限すれば、 $\mathcal{M}_{0,4}$ 上の族の二つのパンツ分解に関する

$$\mathcal{G}(\text{A} \text{---} \text{B} \text{---} \text{C} \text{---} \text{D})_\tau = \mathcal{G}(\text{A} \text{---} \text{D} \text{---} \text{B} \text{---} \text{C})_{-1/\tau} \quad (4.9)$$

という等価性であることが判ります。

また、飾り付きグラフが二つ (Γ', τ') , (Γ'', τ'') 与えられた場合、 Γ' の外辺 E' と Γ'' の外辺 E'' を同一視し内辺 E としたものを Γ とし、飾りを $\tau(E) = \tau_0$ 、その他の内辺については τ' および τ'' で与えるものとしましょう。すると、 $\mathcal{N} = 2$ ゲージ理論の段階では、

$$\mathcal{G}(\Gamma)_\tau = [(\mathcal{G}(\Gamma')_{\tau'} \times_{\text{SU}(T_E)} \mathcal{G}(\Gamma'')_{\tau''}) // \text{SU}(T_E)]_{\tau(E)} \quad (4.10)$$

という操作になります。

この操作は、リーマン面のモジュライに依存する超対称理論の族に関する言明になります。すなわち、 $\mathcal{Q}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$ という族を境界因子 $\mathcal{M}_{g',n'} \times \mathcal{M}_{g'',n''} \subset \mathcal{M}_{g,n}$ (但し $g = g' + g''$, $n = n' + n'' - 2$) の近傍に制限した族

$$\mathcal{Q}_{g,n} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathcal{M}_{g',n'} \times \mathcal{M}_{g'',n''} \quad (4.11)$$

は、

$$\left[(\mathcal{Q}_{g',n'} \times_{\text{SU}(2)} \mathcal{Q}_{g'',n''}) // \text{SU}(2) \right] \rightarrow \mathbb{C} \times \mathcal{M}_{g',n'} \times \mathcal{M}_{g'',n''} \quad (4.12)$$

という族と同値である。

一言でいえば、Gaiotto の構成は、一種の 2 次元共形場理論で、その値域が \mathbb{C} 上のベクトル空間の圏でなく、4 次元の $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の理論の圏であるようなものを与えるのです。

4.3. Gaiotto 構成から導かれる現在の厳密数学における関係式

Gaiotto 構成自体はまだ現在の意味での厳密数学にはなっていませんが、4 次元の $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の理論の圏から既にきちんと定義されている圏への関手をとってやることによって、いろいろ現在の意味での厳密数学における関係式を取り出すことができます。以下三例をあげます。

4.3.1. 共形ブロックとの関係

$\mathcal{N} = 2$ 超対称理論の $\mathcal{M}_{g,n}$ 上の族がありますので、これの Nekrasov 分配関数をとると、 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上の直線束の切断が得られます。しかも、 $\mathcal{M}_{g,n}$ のパンツ分解 Γ に伴う境界因子の近くでは、この $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論の族は明示的な表示 $\mathcal{G}(\Gamma)_\tau$ をもちましたから、Nekrasov 分配関数はインスタントンモジュライの上の同変積分としてあからさまにかけます。また、 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上の直線束の構造の詳細は $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論の公理系等からいろいろしらべることが出来、これは 2 次元共形場理論の文脈で、Virasoro 代数の共形ブロックとして知られているものにほかならないことがわかります。

よって、 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論の公理系が整備され、いろいろな事実が証明された暁には、ここから自動的に、共形ブロックを境界因子近傍に制限したものはインスタントンモジュライ上の同変積分によって書ける、という数学的言明が従います [AGT10]。

4.3.2. Macdonald 多項式およびその楕円変形との関係

Nekrasov 分配関数は τ に依存しましたが、超共形指数は τ に依存しません。すると、族 $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$ に対して、その超共形指数は単にひとつの関数 $Z_{g,n}^{SCI}(p, q, t; \mu)$ を与えます、但し $\mu \in T^n$ 。しかし、上で述べた合成則から、これらの関数は Atiyah の公理を満たす 2 次元位相的場の理論を定めることがわかります。但し、2 次元面の点を境界 S^1 と思い、各 S^1 に対応するベクトル空間は $\text{SU}(2)$ のカルタントーラス上で $\mathbb{C}(p, q, t)$ に値をとる関数のなす空間とします。この 2 次元の位相的場の理論の構造定数は、 $p = 0$ とすると $\text{SU}(2)$ 型 Macdonald 多項式を用いて書けることが知られており、 $p \neq 0$ とすると、さらに Macdonald 多項式の楕円変形を与えることが判っています [GRR12]。

位相的場の理論の結合則は式 (4.9) で与えられるものが基本です。あからさまに書き下すと、これは

$$Z(p, q, t; u, v; x, y) = \oint \frac{\Gamma(t^2 z^{\pm 2})}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \Gamma(tu^{\pm 1} v^{\pm 1} z^{\pm 1}; p, q) \Gamma(tx^{\pm 1} y^{\pm 1} z^{\pm 1}; p, q) \frac{dz}{z} \quad (4.13)$$

が

$$Z(p, q, t; u, v; x, y) = Z(p, q, t; u, x; v, y) \quad (4.14)$$

を満たす、ということですが、これは丁度物理屋がこの式を必要になったときに、数学で全く独立に [vdB11] で示されました。但し、楕円ガンマ関数の複号は全ての組み合わせについてかけるものとします。

4.3.3. ハイパーケーラー商との関係

また、 $\mathcal{Q}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$ の Higgs 枝 \mathcal{H} を取ることも出来ます。これも τ に依存しませんから、前節同様位相的場の理論を与えることとなりますが、通常の位相的場の理論と異なり、値域がハイパーケーラー多様体のなす圏となります。これについては昨年 G. Moore と共同で [MT11] を書きましたので、それに詳細は譲ります。これも式 (4.9) に相当する結合則が基本ですが、これは ハイパーケーラー Spin(8)-空間として、

$$(V \otimes_{\mathbb{R}} T) // \text{SU}(2) = (S \otimes_{\mathbb{R}} T) // \text{SU}(2) \quad (4.15)$$

であるということと等価です。但し、 V, S は Spin(8) の二つの異なる実既約 8 次元表現。これは、両辺とも $\mathfrak{so}(8)_{\mathbb{C}}$ の極小冪零軌道になることから従います。

4.4. Gaiotto 構成の背後にある 6 次元理論

さて、4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称理論を議論していたはずなのに、どうして 2 次元の位相的場の理論や共形場理論が出てきたのでしょうか。この背後には、6 次元 $\mathcal{N} = (2, 0)$ 理論の存在があります。この 6 次元理論の数学者むけ紹介は、例えば [Wit09] を参照してください。

一般に、 D 次元場の量子論 $Q = (\mathcal{V}, Z)$ と、 $d < D$ 次元のリーマン多様体 M に対して、 $(D - d)$ 次元の場の量子論 $Q_M = (\mathcal{V}_M, Z_M)$ を

$$Z_M(X) = Z(M \times X) \quad (4.16)$$

で定義することが出来ます。非常に安直ですね。すると、6 次元理論からはじめて、2 次元リーマン多様体 C が与えられると、4 次元理論がつくれる。しかし、これでは、 C の計量の詳細によってしまいます。

さて、「6 次元 $\mathcal{N} = (2, 0)$ 超対称場の量子論」 Q とは、「 $\text{Sp}(2) \simeq \text{Spin}(5)$ 対称性をもつ 6 次元場の量子論」でさらにいろいろ条件をみたますものですが、ADE 分類があると信じられています。すなわち、そのような Q は、何か $G = A_n, D_n, E_n$ に対して Q_G である。

Q_G と、2 次元リーマン多様体 C に対して、「4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の量子論」 $Q_{G,C}$ を次のように定義します。「4 次元 $\mathcal{N} = 2$ 超対称場の量子論」は「 $\text{SU}(2)$ 対称性をもつ 4 次元量子論」であったことを思い出すと、 X を 4 次元リーマン多様体として、主 $\text{SU}(2)$ 束 $W \rightarrow X$ にたいして、 $Q_{G,C}(W \rightarrow X)$ を定義しないとイケません。しかし、結果が C の複素構造にのみよるようにしたい。そのため、Witten の位相的捻りにならって、半捻り [GMN09] をします。2 次元リーマン多様体 C から、主 Spin(2) 束 $R \rightarrow C$ を作り、 $X \times C$ 上の主 $\text{SU}(2) \times \text{Spin}(2)$ 束 $W \times R \rightarrow X \times C$ を考えます。ここで、

$$\text{SU}(2) \times \text{Spin}(2) \simeq \text{Spin}(3) \times \text{Spin}(2) \hookrightarrow \text{Spin}(5) \quad (4.17)$$

を用いて、これを主 Spin(5) 束と思うと、 Q_G に食わせることが出来るので、

$$Q_{G,C}(W \rightarrow X) = Q_G(W \times R \rightarrow X \times C) \quad (4.18)$$

と定義します。すると、ここに書かなかった「6 次元 $\mathcal{N} = (2, 0)$ 超対称場の理論」の公理系の帰結として、 $Q_{G,C}$ は C の複素構造のみによることが判ります。

さらに、この構成は点付きリーマン面についても行うことが出来、これによって族

$$\mathcal{Q}_G \rightarrow \mathcal{M}_{g,n} \quad (4.19)$$

が得られます。特に $G = A_1$ の場合は、前節で紹介したものになるのです。

謝辞

この小文にあるような定式化の試みに至るには、特に、IPMU に着任してから、Alexey Bondal にいろいろな場の量子論に関する質問を日々してもらった事、また、昨年8月の土屋昭博先生主催の勉強会で話をした事、また、今年四月から、IPMU で齋藤恭司先生主催で、数学者向けの $\mathcal{N} = 2$ 場の量子論という連続セミナーをほぼ毎週やらせてもらった事、また、長谷川浩司先生に秋の数学会にてこういう講演をする機会を頂いた事、それぞれの機会にいろいろ反省したことが重要でした。以上、この場を借りてお礼を申し上げます。

参考文献

- [AGT10] Luis F. Alday, Davide Gaiotto, and Yuji Tachikawa, *Liouville Correlation Functions from Four-Dimensional Gauge Theories*, *Lett. Math. Phys.* **91** (2010), 167–197, [arXiv:0906.3219 \[hep-th\]](#).
- [AHKN12] Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita, and Makiko Nio, *Tenth-Order QED Contribution to the Electron $g - 2$ and an Improved Value of the Fine Structure Constant*, [arXiv:1205.5368 \[hep-ph\]](#).
- [Cos11] Kevin Costello, *Renormalization and effective field theory*, *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. 170, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [Don97] Ron Y. Donagi, *Seiberg-Witten Integrable Systems*, [arXiv:alg-geom/9705010](#).
- [Gai09] Davide Gaiotto, $\mathcal{N} = 2$ Dualities, [arXiv:0904.2715 \[hep-th\]](#).
- [GMN09] Davide Gaiotto, Gregory W. Moore, and Andrew Neitzke, *Wall-Crossing, Hitchin Systems, and the WKB Approximation*, [arXiv:0907.3987 \[hep-th\]](#).
- [GRR12] Davide Gaiotto, Leonardo Rastelli, and Shlomo S. Razamat, *Bootstrapping the Superconformal Index with Surface Defects*, [arXiv:1207.3577 \[hep-th\]](#).
- [Hig64] Peter W. Higgs, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, *Phys.Rev.Lett.* **13** (1964), 508–509.
- [Kro12] Andreas S. Kronfeld, *Twenty-First Century Lattice Gauge Theory: Results from the QCD Lagrangian*, [arXiv:1203.1204 \[hep-lat\]](#).
- [MT11] Gregory W. Moore and Yuji Tachikawa, *On 2D TQFTs Whose Values are Holomorphic Symplectic Varieties*, [arXiv:1106.5698 \[hep-th\]](#).
- [NY03] Hiraku Nakajima and Kota Yoshioka, *Lectures on Instanton Counting*, [arXiv:math/0311058](#).
- [SW94a] N. Seiberg and Edward Witten, *Monopole Condensation, and Confinement in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, *Nucl. Phys.* **B426** (1994), 19–52, [arXiv:hep-th/9407087](#).
- [SW94b] ———, *Monopoles, Duality and Chiral Symmetry Breaking in $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric QCD*, *Nucl. Phys.* **B431** (1994), 484–550, [arXiv:hep-th/9408099](#).
- [vdB11] Fokko J. van de Bult, *An elliptic hypergeometric integral with $W(F_4)$ symmetry*, *Ramanujan J.* **25** (2011), no. 1, 1–20, [arXiv:0909.4793 \[math.CA\]](#).
- [Wit88] Edward Witten, *Topological Quantum Field Theory*, *Commun. Math. Phys.* **117** (1988), 353.
- [Wit09] ———, *Geometric Langlands from Six Dimensions*, [arXiv:0905.2720 \[hep-th\]](#).