

中山優

高次元共形場理論への招待 – 3次元臨界 Ising 模型を解く –

(SGC ライブラリ153) サイエンス社, 東京, vi+167p, 26cm × 18cm, 本体2,200円

[意欲的な学部生、大学院生、専門家向け]

ISSN0386-8257

紹介者: 立川裕二(東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構)

臨界現象およびそのユニバーサリティが、臨界点を記述する共形場理論とその周りの繰り込みによって記述されるということは最近の物理屋にとっては標準的な教養のひとつであるかと思います。というわけで、共形場理論を学びたい、と思って本屋か図書館に行って「共形場理論」という題の本を例えば [1, 2] など手に取りますと、実際は二次元共形場理論に特化した本で三次元以上の共形場理論は全く説明されていないことが普通です。これは初学者からすると不思議なことです。我々がはじめて習う臨界現象の典型例は例えば気相液相の間の相転移の臨界点ではないでしょうか。これは $\mathbb{Z}_2$ 対称性をもつユニバーサリティクラスで、同じクラスに属する標準的な模型としてイジング模型があります。これらは次元によらず考えることができますが、もっとも身近なものは我々の住む三次元での共形場理論であるはずですが、しかし、なぜ二次元についての本ばかりあるのでしょうか。

端的には、二次元では共形場理論は解けるけれども、三次元以上では解けないと思われていたからでしょう。イジング模型は二次元においては厳密解が前世紀から知られていますが、三次元では厳密解は知られていません。また、二次元の共形場理論は、対称性が無限次元に拡大するため、それを利用してしばしば厳密に解けることも、前世紀から知られています。一方で、三次元以上の共形場理論は、到底そのままでは解けない、というのが少なくとも私が学生だった今世紀はじめ頃までの思い込みではあったかと思います。対称性は有限次元だから、理論を決定するほどの強い制限が掛かる筈が無く、三次元の共形場理論を理論的に調べる方法には、実現する具体的なモデルを選んで、 ϵ 展開などの摂動展開とその巧い足し上げで何とか調べるか、モンテカルロなどで数値シミュレーションするか、どちらかしか無い。というのが通念であったかと思います。ですので、三次元以上の共形場理論に関して本を書こうにも書きようがない、というのが実情ではなかったかと思います。

そんな中、2008 年に [3] においてはじめて登場したのが数値的共形ブートストラップ法です。共形場理論において、 $\langle ABCD \rangle$ という四点相関関数を計算する際に、 $(AB)(CD)$ と計算する場合と $A(BC)D$ と計算する場合が一致せよという式を書き下しますと、複雑な連立方程式系になります。このこと自体は 1970 年代から知られていたのですが、上記論文はこの方程式系を不等式系と思うことで色々な情報を取り出しうるという画期的な指摘を行いました。(私は幸運にも当時著者の一人によるセミナーを聞いて、あまりに新しい方法のため全く判らなかった記憶があります。) その後しばらくして、この連立不等式系は線形計画法やその拡張である半正定値計画法を用いて効率的に数値的に解けることがあきらかになり、この方法で 2012 年には三次元のイジング模型は十分な精度で解かれてしまいました [4]。2019年12月になって、同様に三次元の $O(2)$ 模型も非常に良い精度で解かれています [5]。

さて、背景の説明が長くなりましたが、私の畏友の中山君によるこの本は、このような急発展を遂げた三次元以上の共形場理論と共形ブートストラップ法を基礎から解説した現時点では私の知る限り全世界で唯一の成書です。英語では [6, 7] などレビュー論文はいくつか出ていますが、教科書として出版されたものは無いのではないかと思います。です

ので、急成長中のこの分野に参入したい、そこまではいかなくとも概要を知っておきたいという研究者には最適です。また、共形場理論の基礎的な点の解説も、著者の深い理解と知識に裏打ちされた、非常に明快なもので、若い学生から古参の教員まで、手に取って得るものの多い一冊だと思います。さらに、そこここに挟まれた研究の歴史に関する挿話も読んでいて飽きさせず、何より著者を髣髴とさせる文体が読者を誘います。この書評をご覧になって、まだ中山君のこの本を未読の方は、是非、少なくとも手に取って眺めてみることをお勧めいたします。それにより、この魅力的な分野を研究する日本語を解する方が増えることを願います。

といいますのは、私が arXiv をみている限りでは、共形ブートストラップは世界的には案外流行っている話です。しかし、日本でこの分野に手を出している人はごくごく少数です。残念に思っているのです。勿論、流行を追いかけるのが良いというわけでは決してなく、自分が若い頃からやっていた話を堅実に綿密に仕上げてゆくというのも研究のスタイルではありますが、共形ブートストラップをやっている人が日本ではほとんど全くいないというのも少々極端なのではないでしょうか。そんな中、この分野の初期から発展に寄与し、後進を育てている中山君がこの本を書いたというのは有り難いことだと思います。

おしまい、本書はサイエンス社のSGCライブラリの一冊ですが、このシリーズではほぼ毎月、質の優れた日本語のモノグラフが出版されています。この内容を、日本語を解する読者のみで独占しておくのは、人類全体での知識の共有という観点からは、全く勿体無い話です。似たような例として、日本数学会の機関誌「数学」は良質なレビュー論説が載りますが、こちらはアメリカ数学会から英訳が“Sugaku Expositions”として出ています [8]。SGC ライブラリに関しても、日本物理学会及び関連学会の援助もしくは斡旋で、全巻を系統だって英訳するわけにはいかないものではないでしょうか。

References

- [1] Di Francesco, Mathieu, Sénéchal, “[Conformal Field Theory](#)”, Springer, 1997
- [2] 江口, 菅原 “[共形場理論](#)”, 岩波書店, 2015
- [3] Rattazzi, Rychkov, Tonni, Vichi, “Bounding Scalar Operator Dimensions in 4D CFT,” [JHEP 0812 \(2008\) 031](#) [[arXiv:0807.0004 \[hep-th\]](#)].
- [4] El-Showk, Paulos, Poland, Rychkov, Simmons-Duffin, Vichi, “Solving the 3D Ising Model with the Conformal Bootstrap,” [Phys. Rev. D 86 \(2012\) 025022](#) [[arXiv:1203.6064 \[hep-th\]](#)].
- [5] Chester, Landry, Liu, Poland, Simmons-Duffin, Su, Vichi, “Carving Out OPE Space and Precise O(2) Model Critical Exponents,” [arXiv:1912.03324 \[hep-th\]](#).
- [6] Simmons-Duffin, “[The Conformal Bootstrap](#),” [arXiv:1602.07982 \[hep-th\]](#).
- [7] Poland, Rychkov, Vichi, “The Conformal Bootstrap: Theory, Numerical Techniques, and Applications,” [Rev. Mod. Phys. 91 \(2019\) 015002](#) [[arXiv:1805.04405 \[hep-th\]](#)].
- [8] <https://www.ams.org/journals/suga/>