二次元の物理と
四次元の物理の
不思議な関係

立川裕二

3/11/2011

二次元の数理物理と四次元の数理物理の不思議な関係

立川裕二

3/11/2011

- 二次元の共形場理論

  臨界現象を記述。 1984~

- 四次元のゲージ理論のインスタントン

  非摂動効果で重要。 1975~

- 両者に深い関係がある。 2009~

温故知新

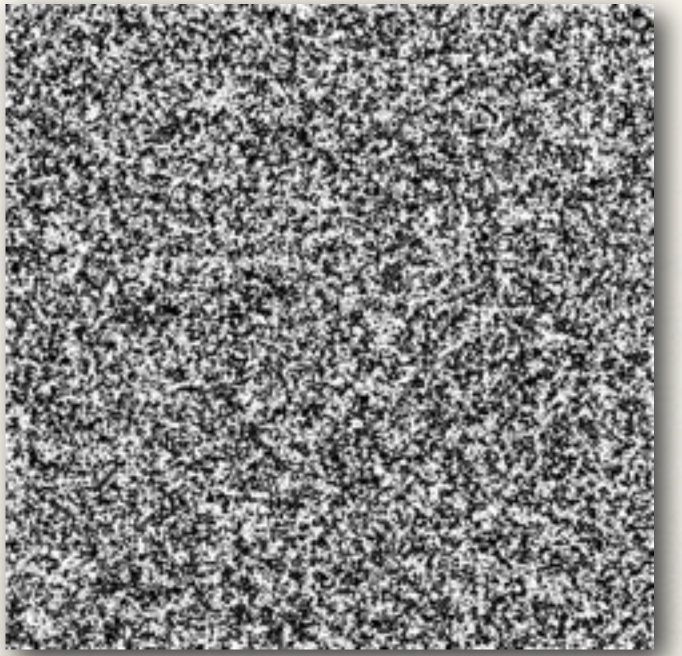
二次元の共形場理論

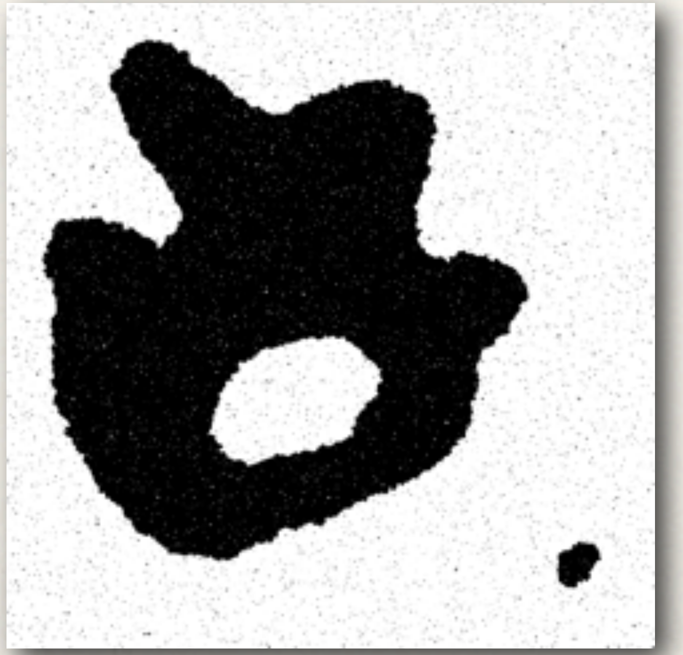
- 簡単な例として、2次元 Ising 模型を考える

$$H = -\sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j$$

- スピン σ は –1 か 1。

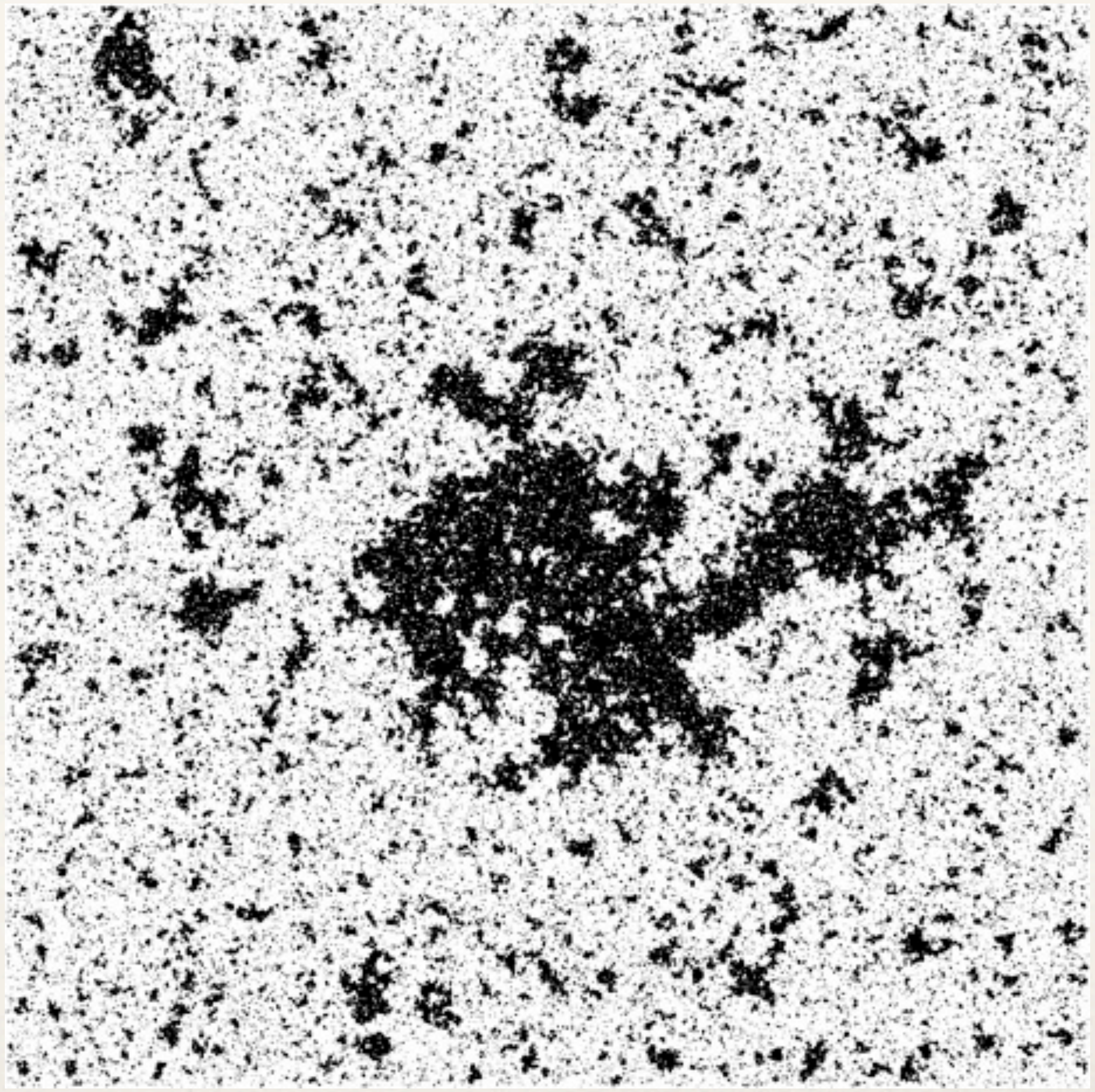
- 高温だとスピンは乱雑に、低温だとスピンは揃う





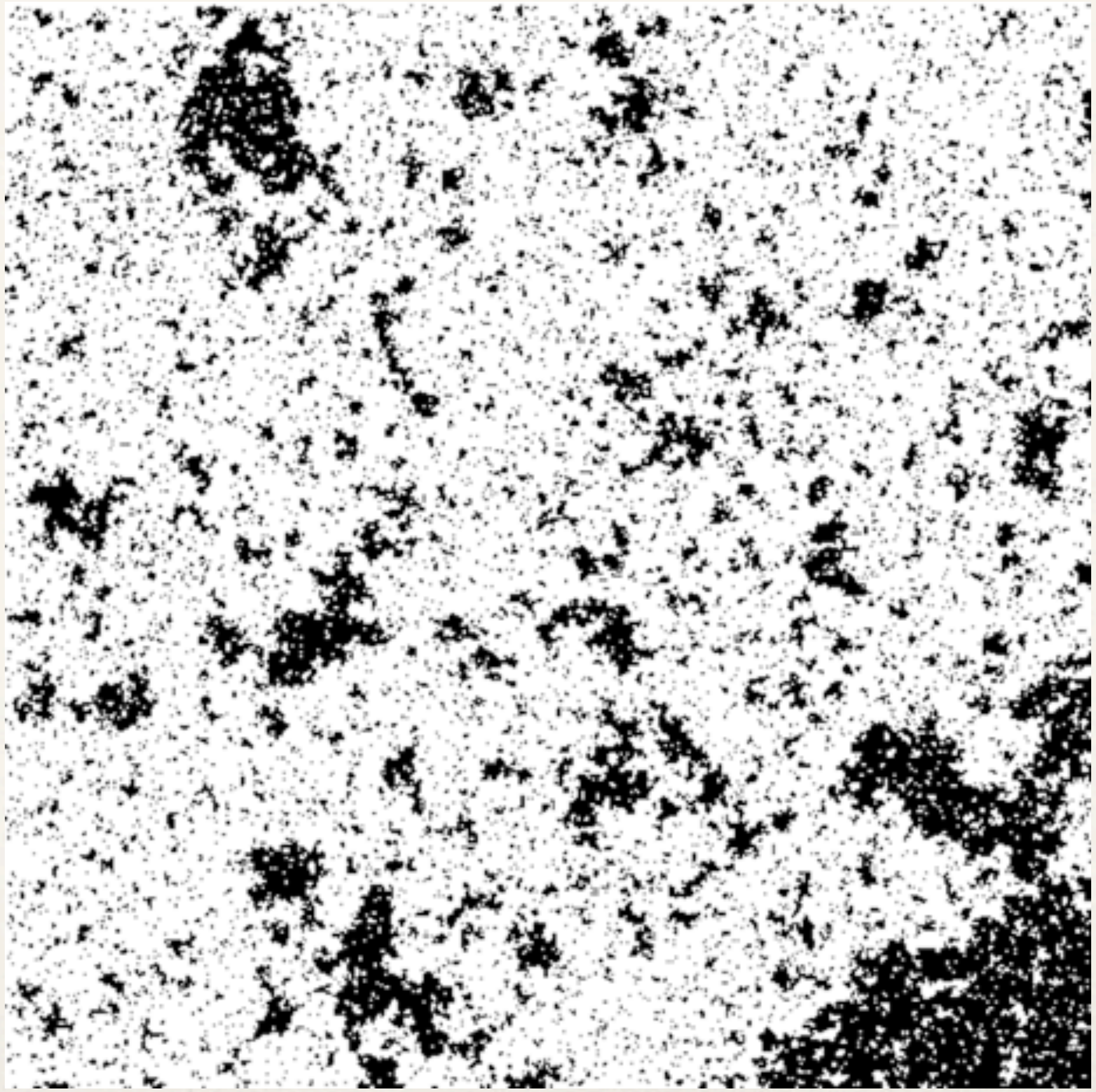
- 丁度相転移が起こる臨界点では、相関長が発散する

- 系は拡大縮小に対して不変になる

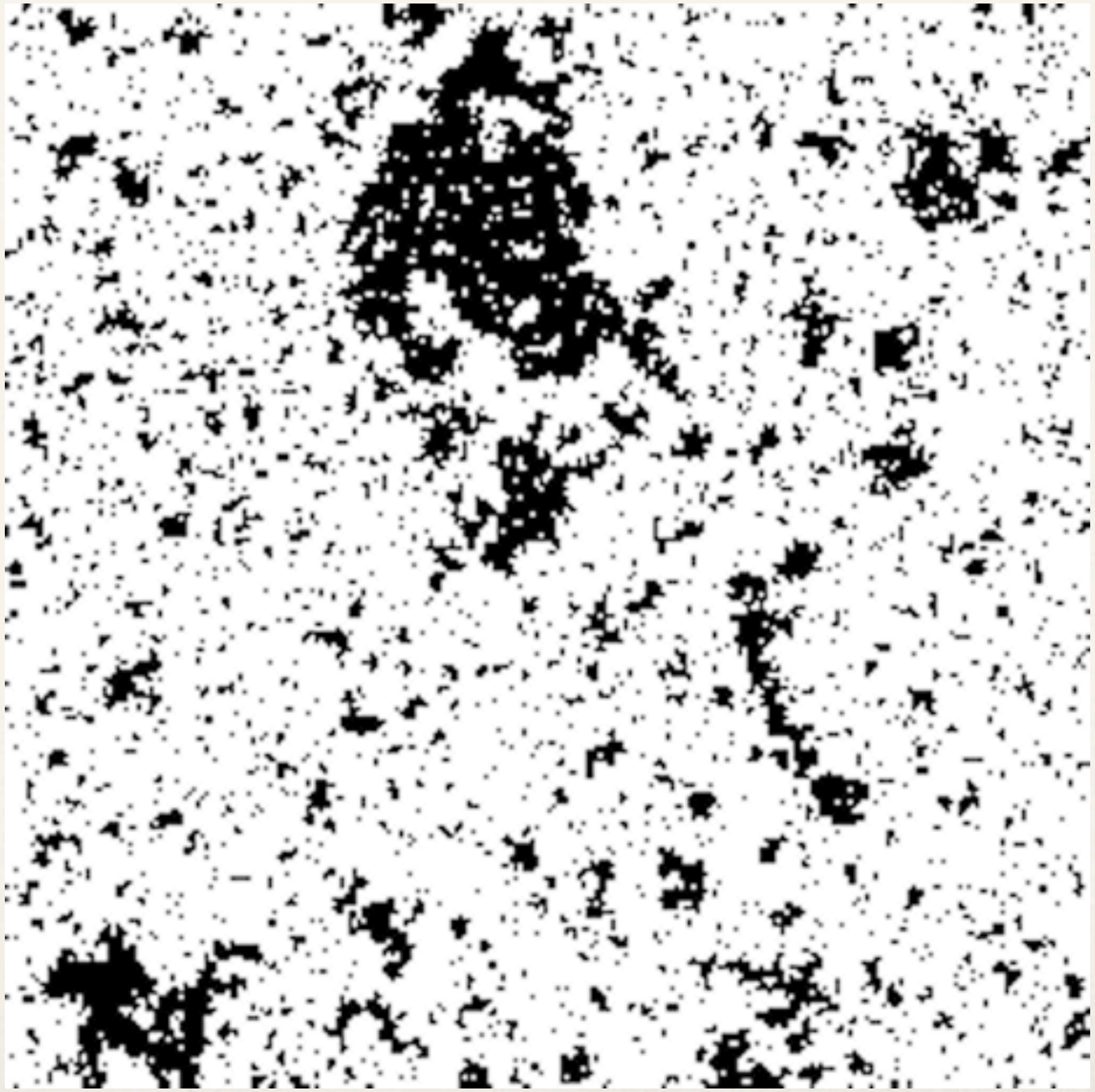


- 丁度相転移が起こる臨界点では、相関長が発散する

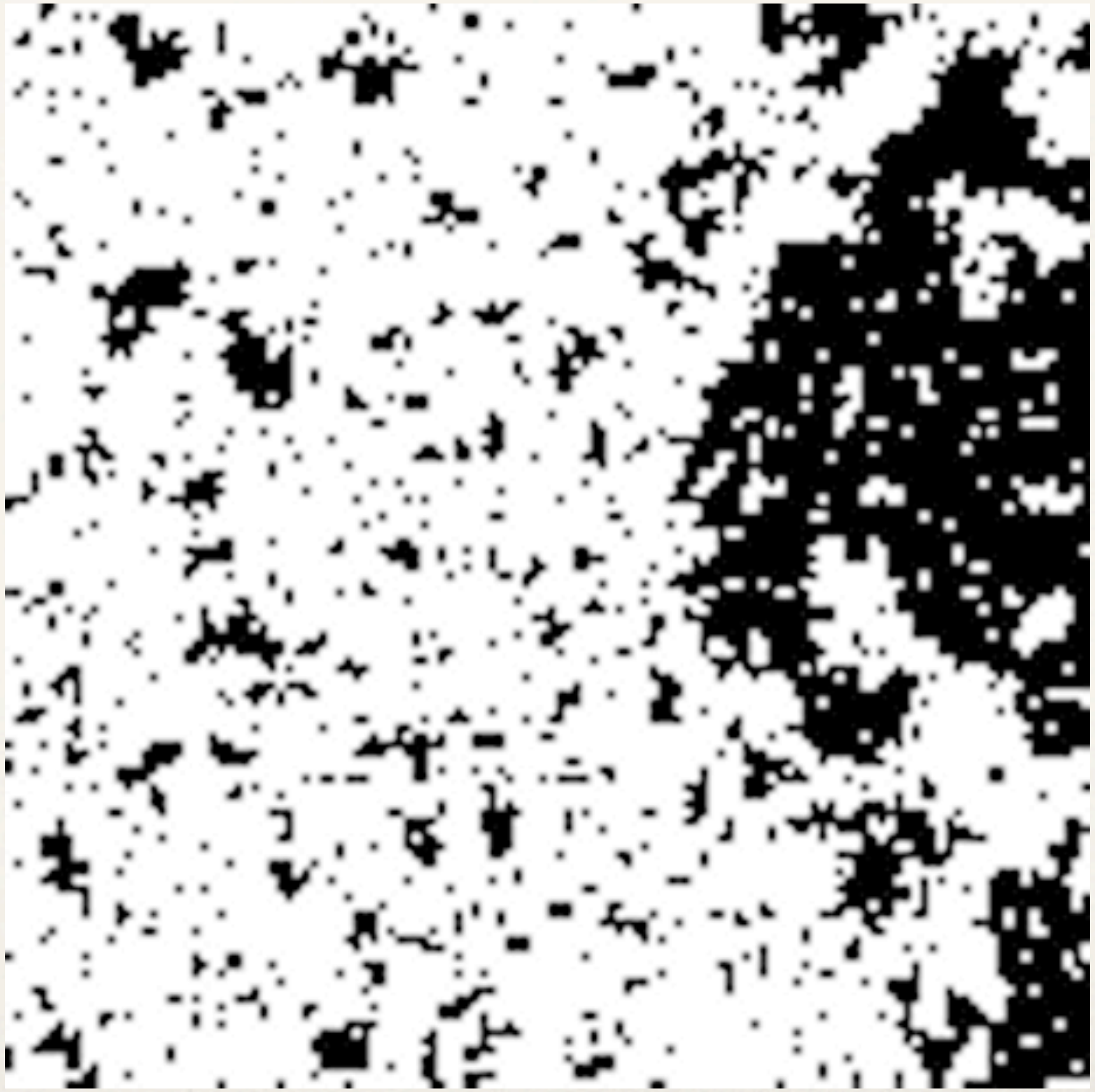
- 系は拡大縮小に対して不変になる



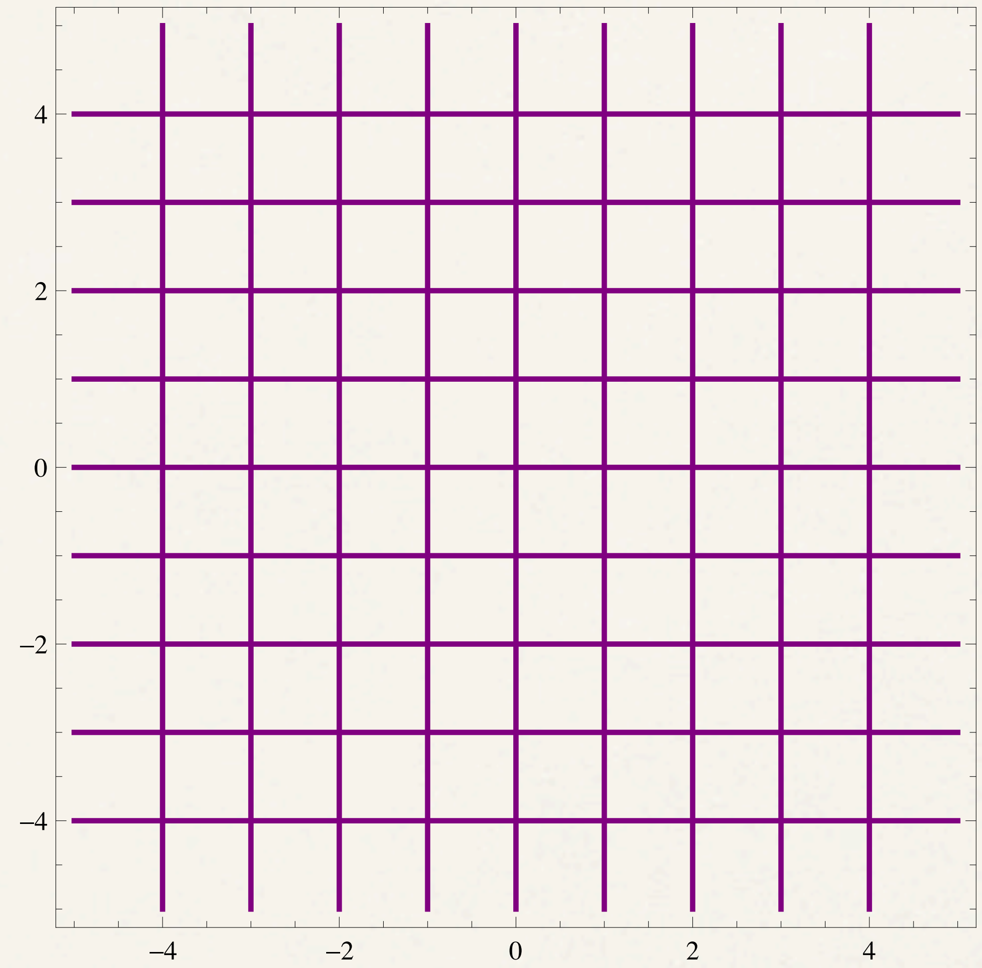
- 丁度相転移が起こる臨界点では、相関長が発散する
- 系は拡大縮小に対して不変になる



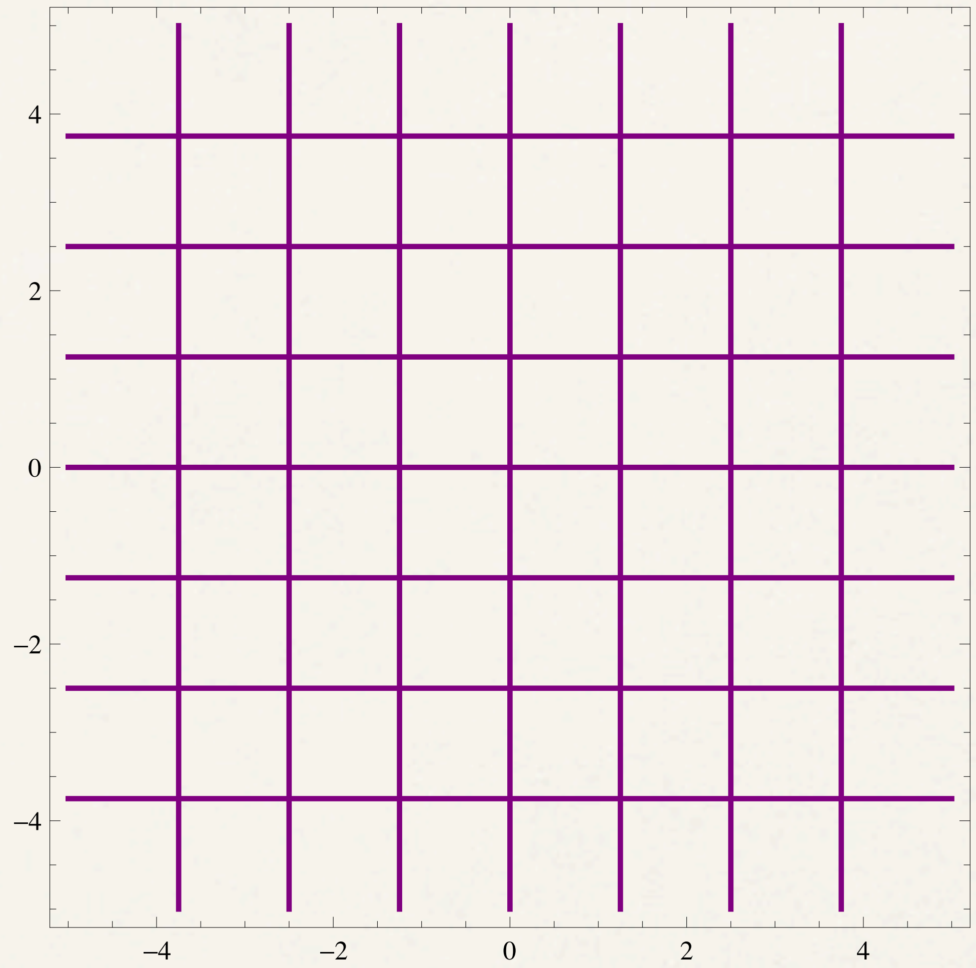
- 丁度相転移が起こる臨界点では、相関長が発散する
- 系は拡大縮小に対して不変になる



- 拡大縮小だけでなく、一般に共形変換に対して不変

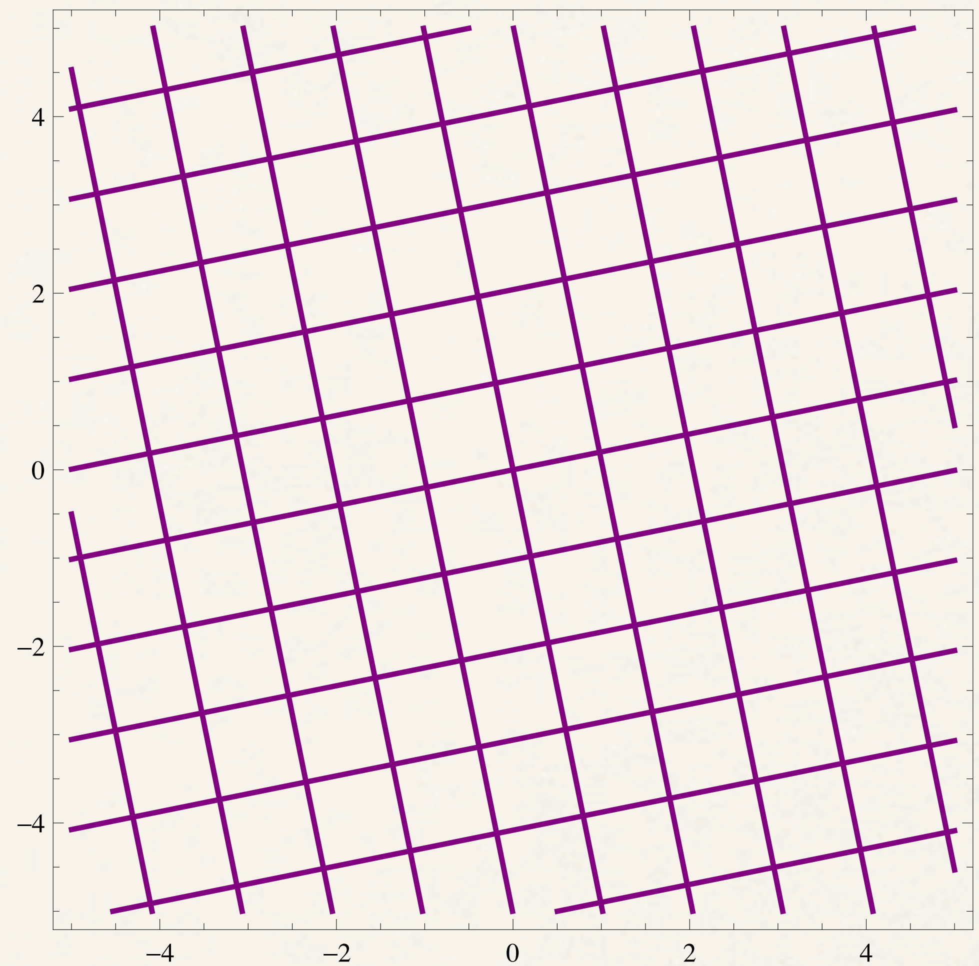


- 拡大縮小だけでなく、一般に共形変換に対して不変



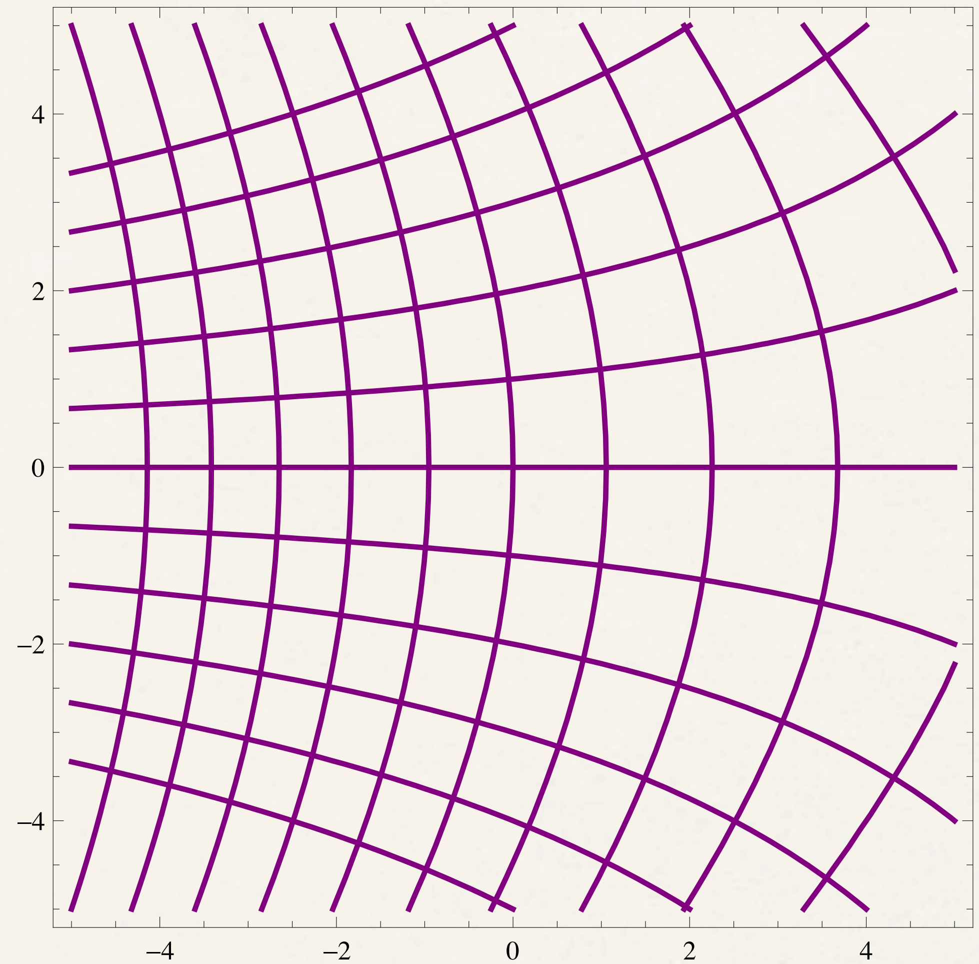
$$z \to e^t z$$

- 拡大縮小だけでなく、一般に共形変換に対して不変



$$z \to e^{i\theta} z$$

- 拡大縮小だけでなく、一般に共形変換に対して不変



$$z \to z + \epsilon z^2$$

- 二次元の共形変換

$$z \to f(z)$$

- $\bar{z}$ に依らなければ良い

- 二次元の微小共形変換

$$z \to z + \sum_n \epsilon_n z^n$$

- ϵ_n に対応して演算子 L_n がある

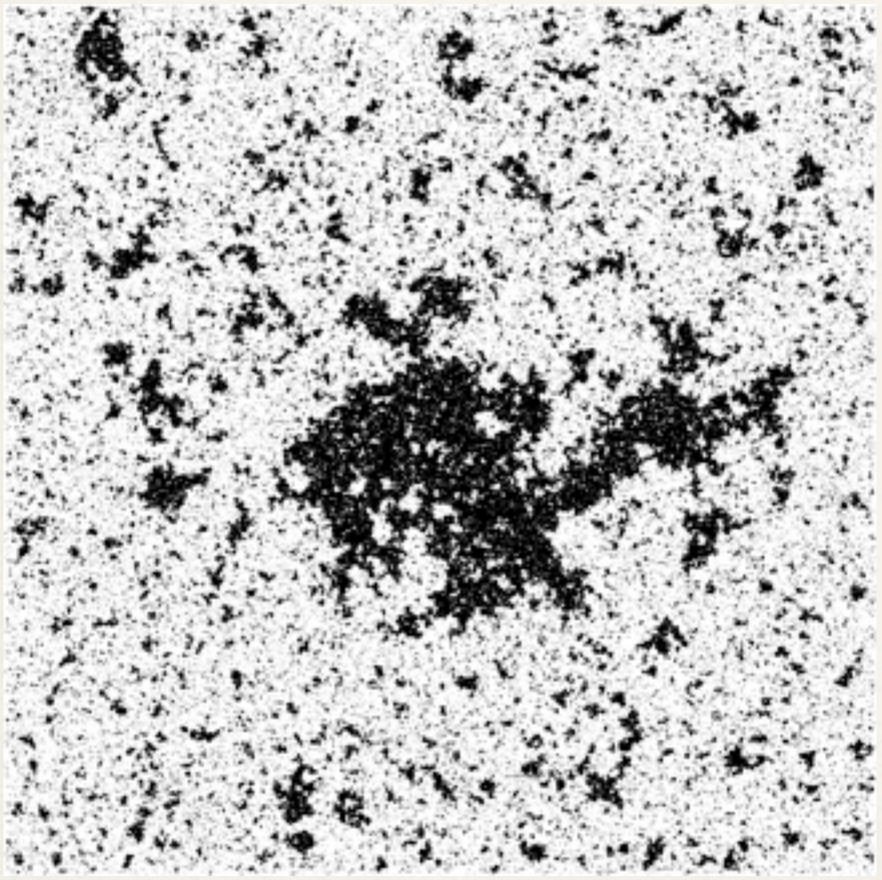
- 交換関係は

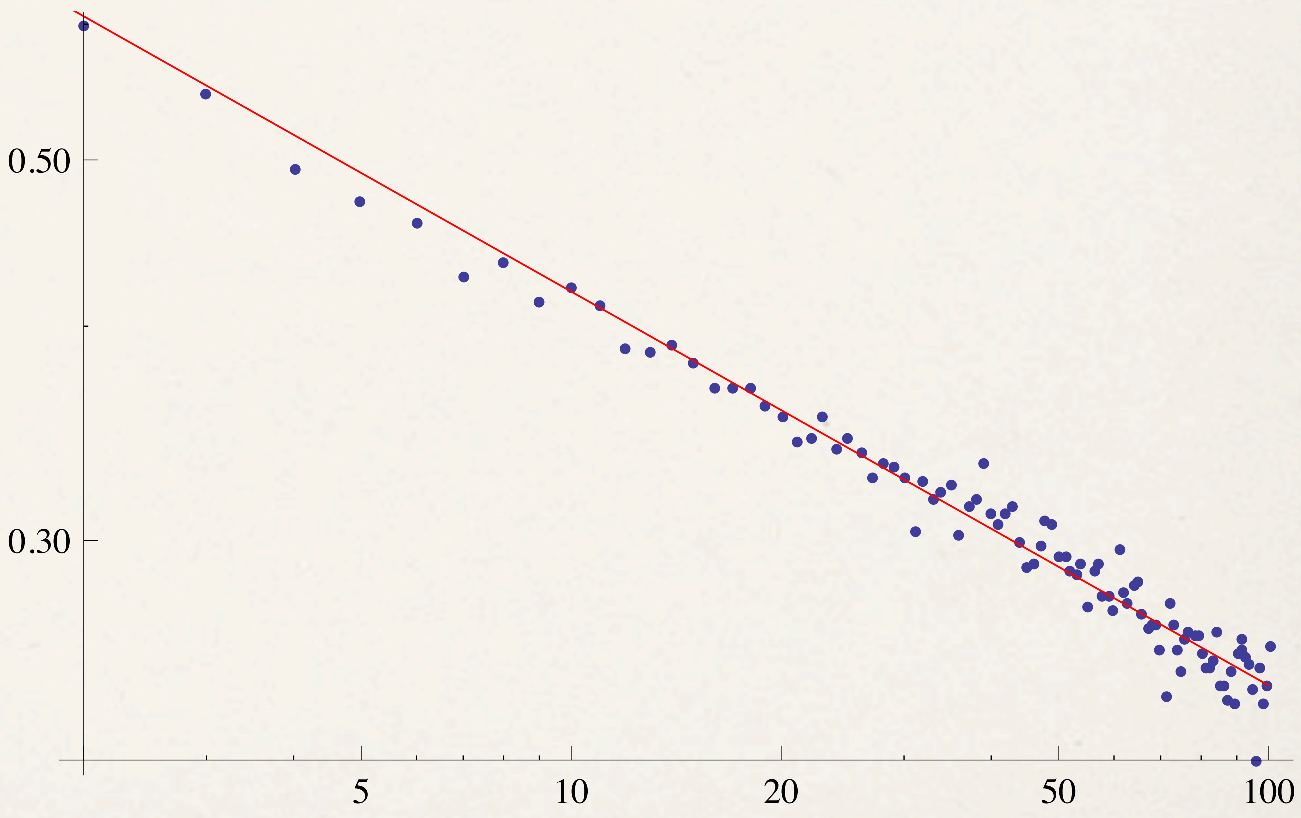
$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)$$

- *c* は中心荷 (central charge) と呼ばれるパラメタ。
- *c* だけで理論はほとんど決まってしまう

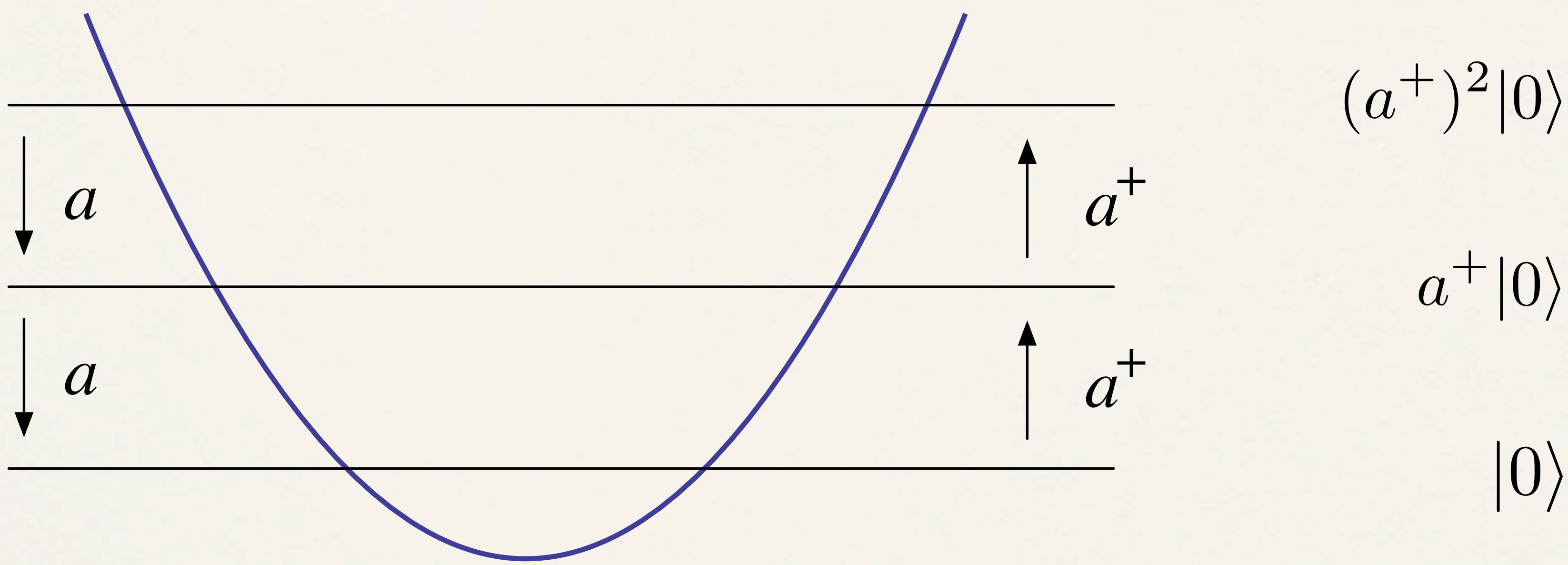
- 例えば、Ising 模型では $c=1/2$

- これから、$\langle\sigma(x)\,\sigma(0)\rangle \sim x^{-1/4}$





- 共形場理論の状態ベクトルを考えるために、
  調和振動子を復習する



$$[a, a^+] = 1$$

- コヒーレント状態: 消滅演算子の「固有状態」

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

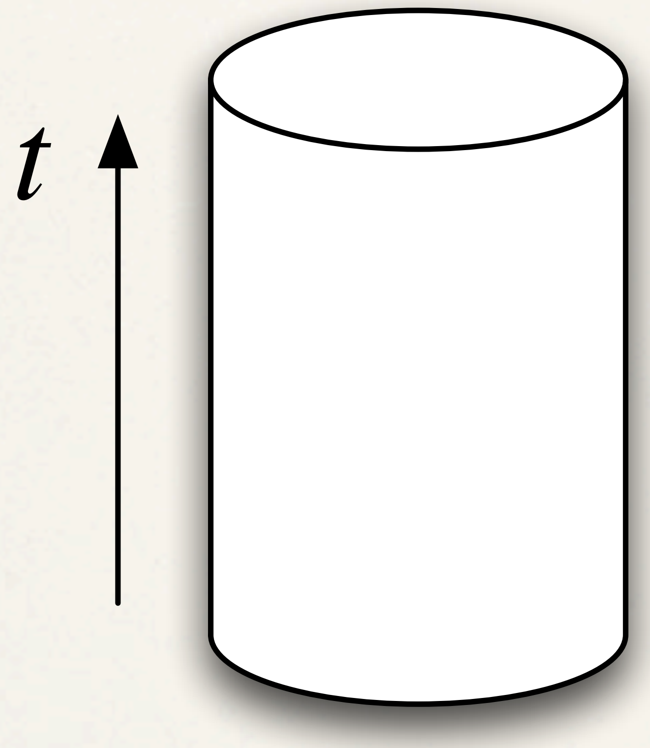
- 具体的に書くのも簡単

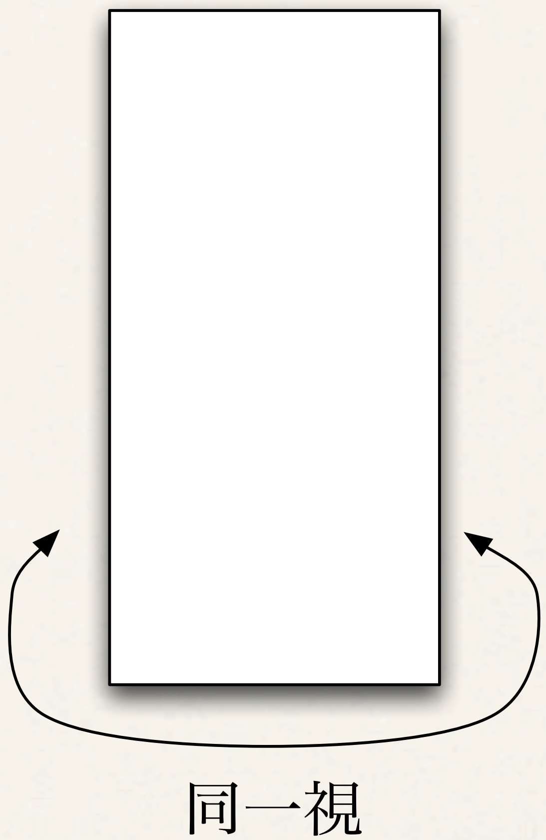
$$\begin{aligned}|\lambda\rangle &= (1 + \lambda a^{+} + \frac{\lambda^2}{2}(a^{+})^2 + \cdots)|0\rangle \\ &= e^{\lambda a^{+}}|0\rangle\end{aligned}$$

- 長さの自乗は

$$\langle\lambda|\lambda\rangle = e^{|\lambda|^2}.$$

- 共形場理論を円柱上で考える



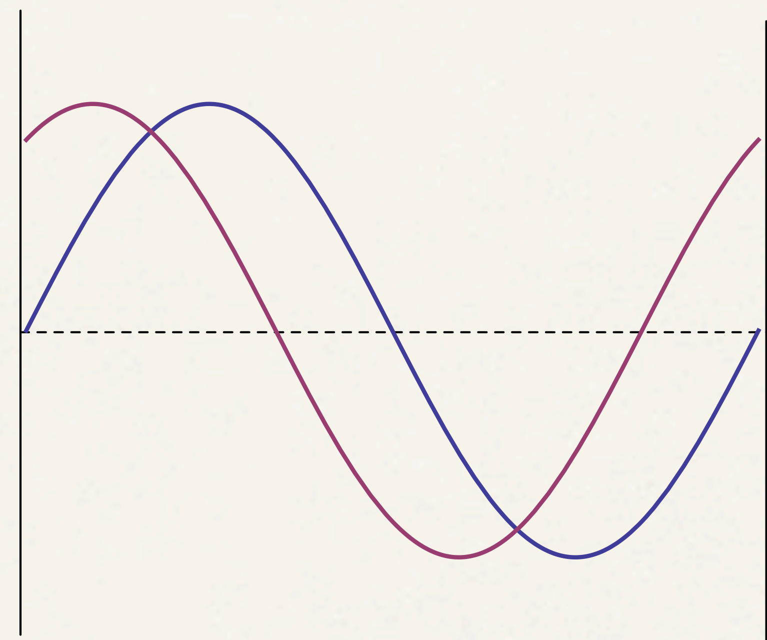


- でも絵を描くのが大変なので周期的境界条件にする

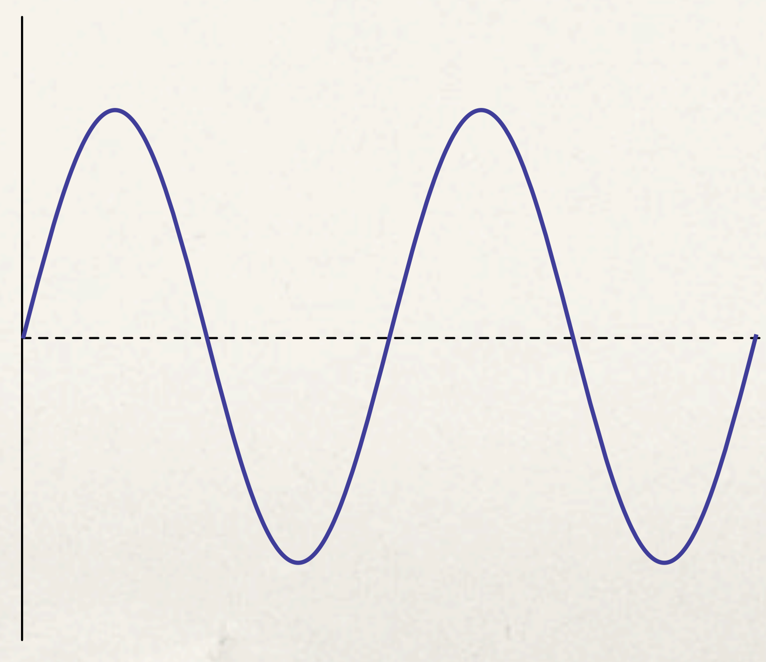
- L_0 がハミルトニアン　　$L_0|E\rangle = E|E\rangle, \quad L_{n\geq 1}|E\rangle = 0$

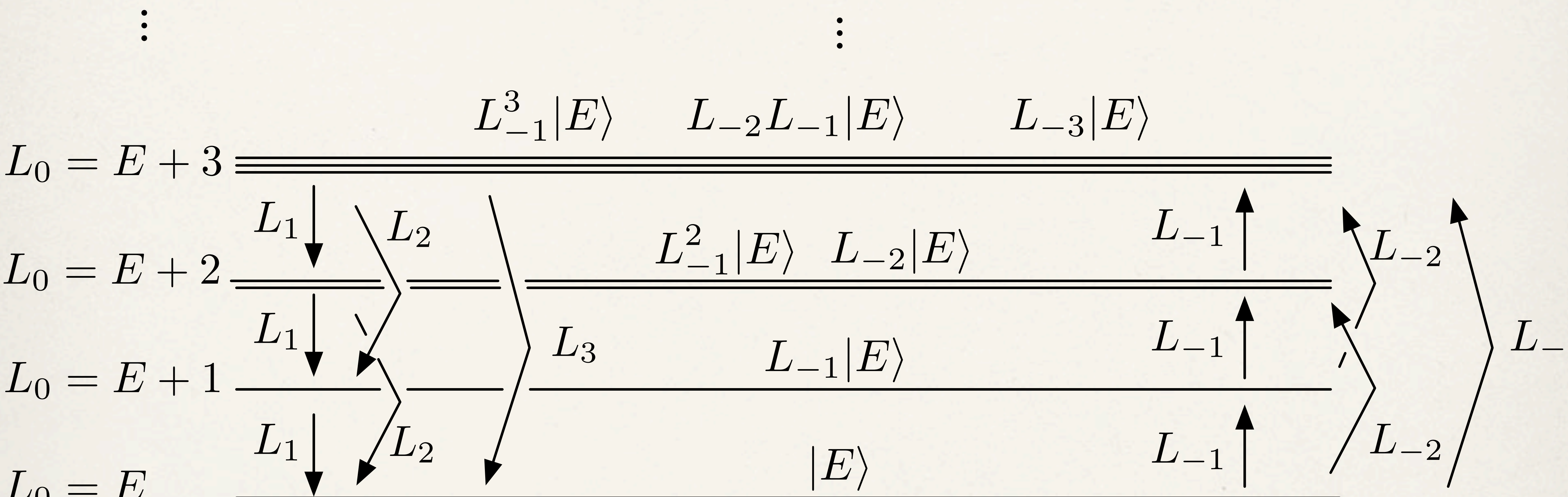
- $L_{-n}\,, L_n$ が波数 n のモードの生成消滅演算子

$(L_{-1})^2|E\rangle$



$L_{-2}|E\rangle$





$\vdots$
$\vdots$
$L_{-1}^3|E\rangle$
$L_{-2}L_{-1}|E\rangle$
$L_{-3}|E\rangle$
$L_0 = E + 3$
L_1
L_2
L_{-1}
L_{-2}
$L_{-1}^2|E\rangle$
$L_{-2}|E\rangle$
$L_0 = E + 2$
L_1
L_3
L_{-1}
L_{-3}
$L_{-1}|E\rangle$
$L_0 = E + 1$
L_1
L_2
L_{-1}
L_{-2}
$|E\rangle$
$L_0 = E$

- コヒーレント状態を考える

$$L_1|q,E\rangle = q|q,E\rangle, \qquad L_{n\geq 2}|q,E\rangle = 0$$

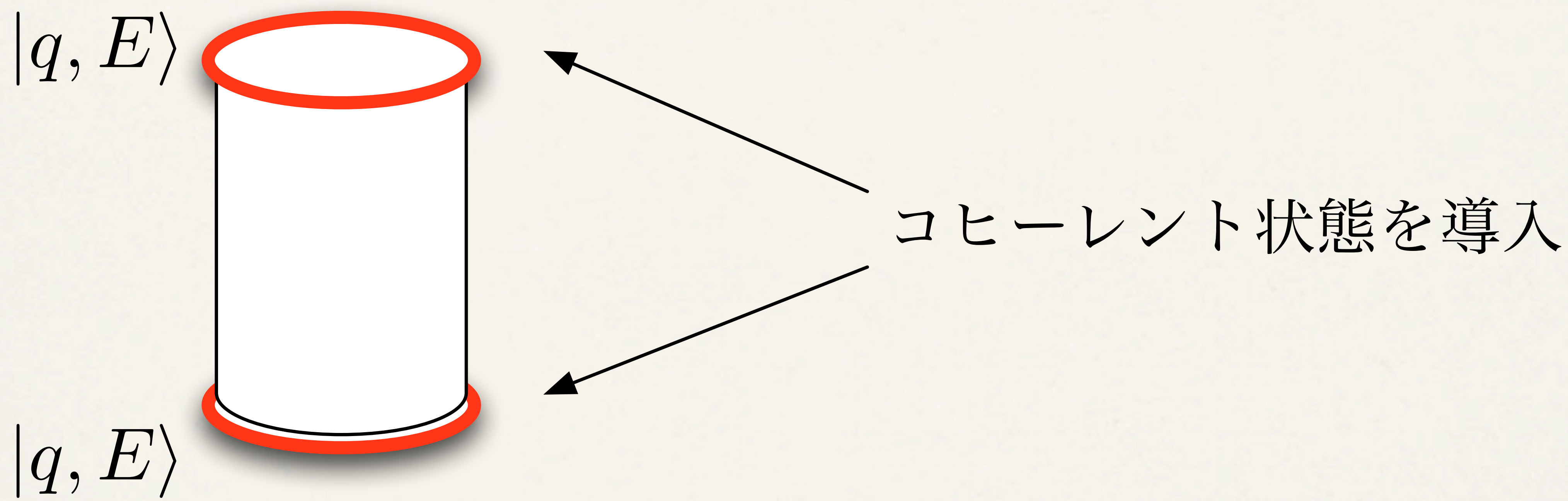
- q でベキ展開して求めることは出来る

$$|q,E\rangle_c = |E\rangle + \frac{q}{2E}L_{-1}|E\rangle + \cdots$$

- 長さの二乗は

$${}_c\langle q,E|q,E\rangle_c = 1 + \frac{q^2}{2E} + \frac{q^4(c+8E)}{4E((1+2E)c-10E+16E^2)} + \cdots$$

- こういう感じです



$$ {}_c\langle q, E | q, E \rangle_c = 1 + \frac{q^2}{2E} + \frac{q^4(c+8E)}{4E((1+2E)c - 10E + 16E^2)} + \cdots $$

四次元のゲージ理論

- 電磁気は Maxwell 方程式で記述される

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = 0$$

- 相対論的には

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

- ゲージ不変性がある

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$$

- A を単に数でなくて行列にする: Yang-Mills 方程式

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ +[A_\mu, A_\nu]$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -[A^\mu, F_{\mu\nu}]$$

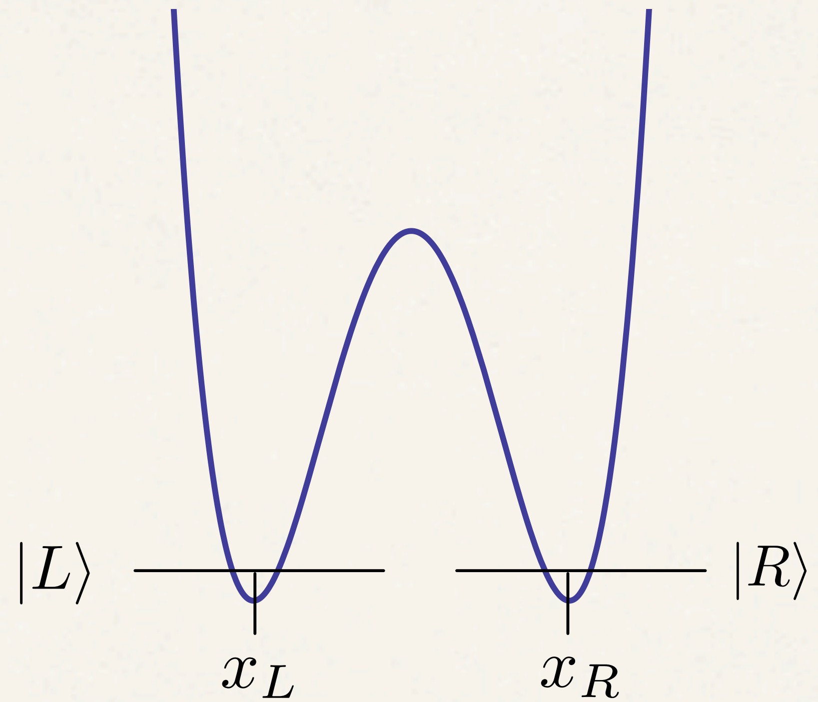
- $n \times n$ のとき SU(n) ゲージ理論という。非線形である。

- ゲージ不変性がある

$$A_\mu \to g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g$$

- 「強い力」は SU(3) ゲージ理論。
- A_μ を量子化したものがグルーオン。
- グルーオンは閉じ込められて遠方に取り出せない。
- 摂動論 ($\hbar$ で冪展開) では閉じ込めは示せない。
- 非摂動効果が重要。

- 二重底井戸では



- WKB 近似を行うと

$$\langle L|H|R\rangle \sim \hbar \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{x_L}^{x_R}\sqrt{2mV(x)}dx\right]$$

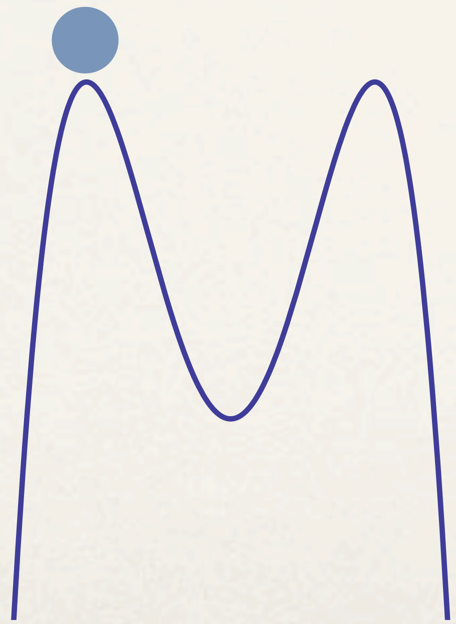
- $\exp(-c/\hbar)$ は $\hbar=0$ では $\hbar$ でテーラー展開できない！

- WKB 近似で利いてくるのは

$$0 = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$0 = \frac{p^2}{2m} - V(x)$$

$$p = \sqrt{2mV(x)}$$



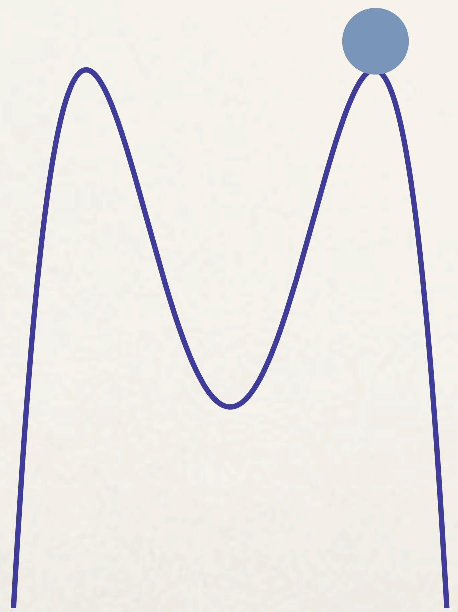
$$\exp(-\frac{S}{\hbar}) = \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{x_L}^{x_R} \sqrt{2mV(x)}dx\right]$$

- WKB 近似で利いてくるのは

$$0 = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$0 = \frac{p^2}{2m} - V(x)$$

$$p = \sqrt{2mV(x)}$$



$$\exp(-\frac{S}{\hbar}) = \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_{x_L}^{x_R}\sqrt{2mV(x)}dx\right]$$

- ゲージ理論の場合

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$
$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -[A^\mu, F_{\mu\nu}]$$

が

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

$$F_{01} = F_{23} \qquad F_{02} = F_{31} \qquad F_{03} = F_{12}$$

になる。解をインスタントンと言う

- 以下簡単のため 2 x 2 行列、SU(2) にする

- ゲージ理論の場合

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$
$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -[A^\mu, F_{\mu\nu}]$$

が

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$
$$\vec{E} = \vec{B}$$

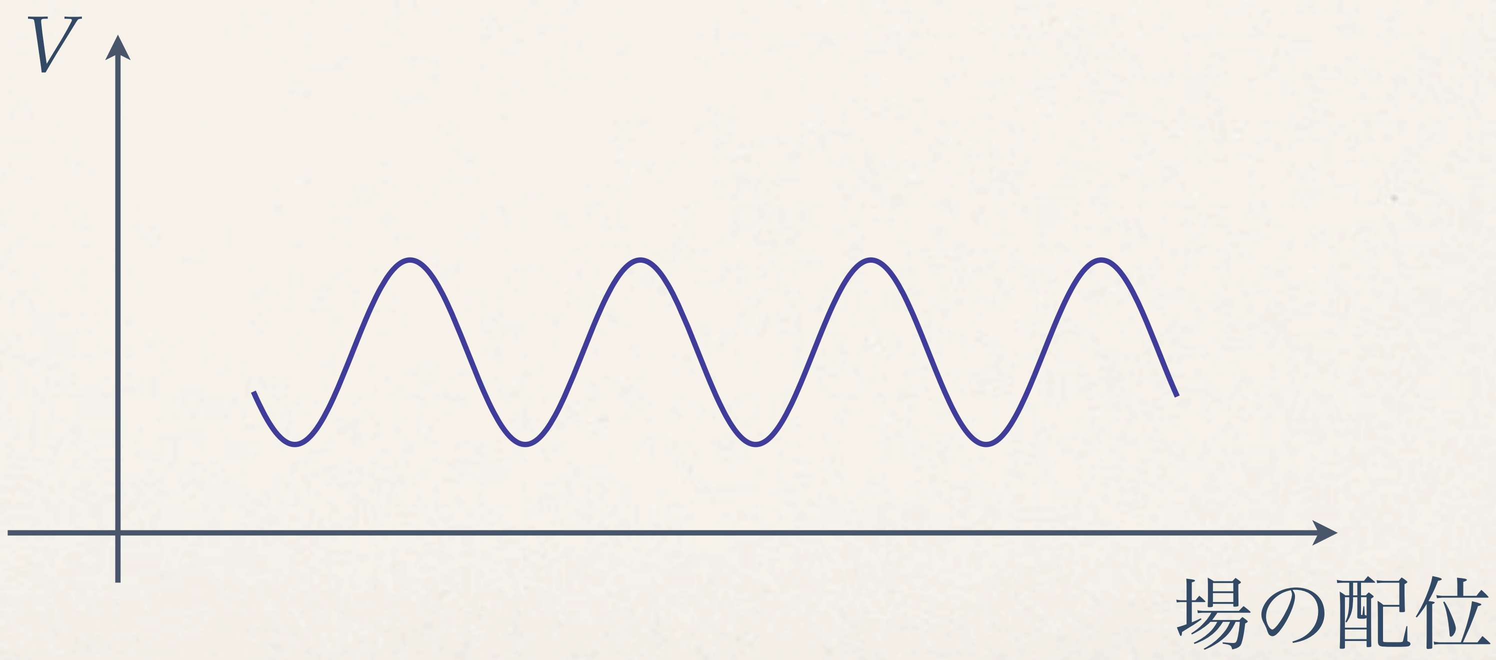
になる。解をインスタントンと言う

- 以下簡単のため 2 x 2 行列、SU(2) にする

- 作用

$$S = \frac{1}{16\pi^2}\int \mathrm{tr}\ F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}d^4x$$

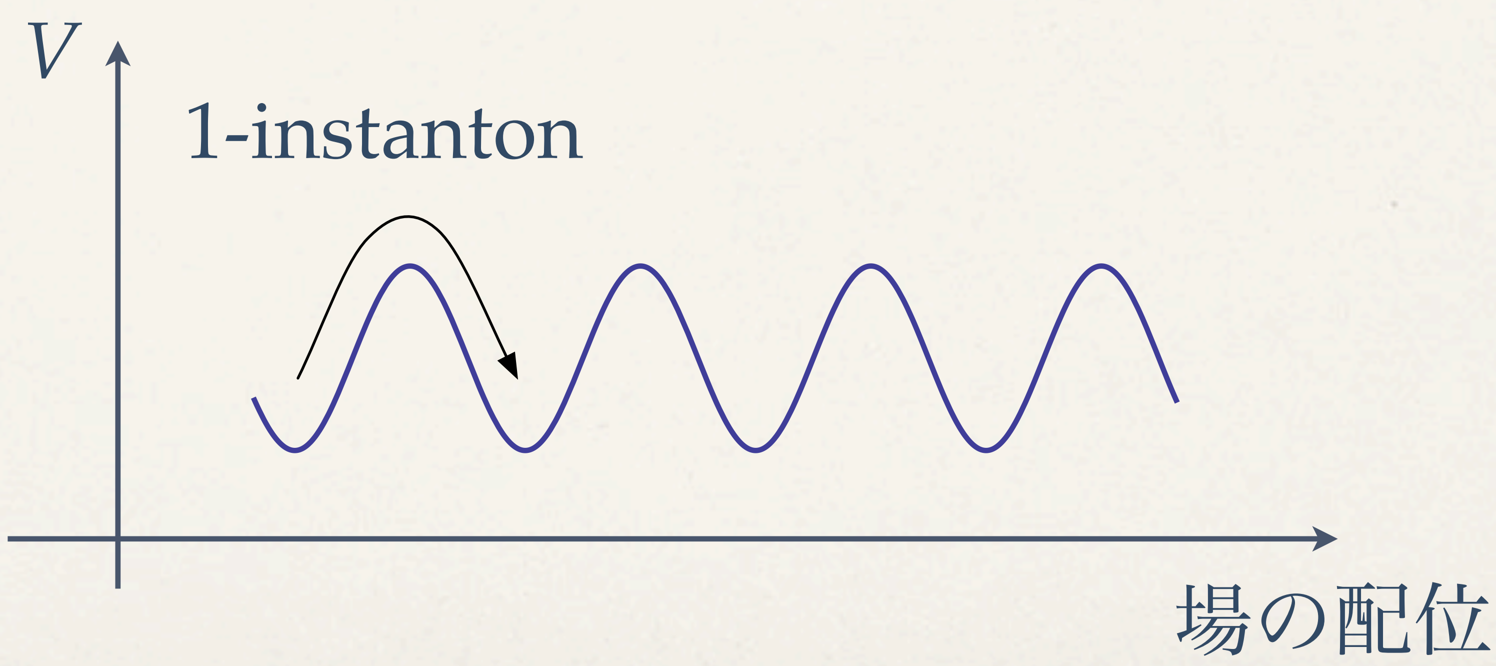
は正の整数になる。インスタントン数と言う。



- 作用

$$S = \frac{1}{16\pi^2}\int \mathrm{tr}\ F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}d^4x$$

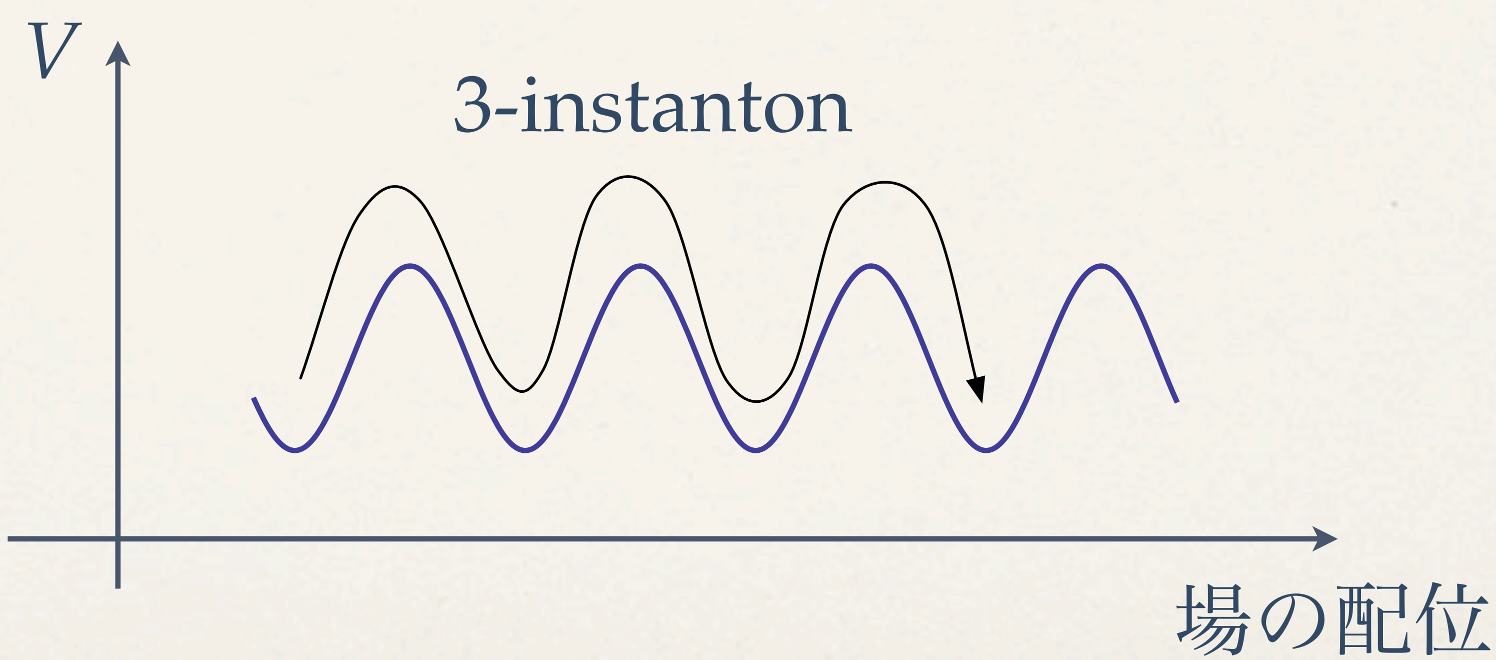
は正の整数になる。インスタントン数と言う。



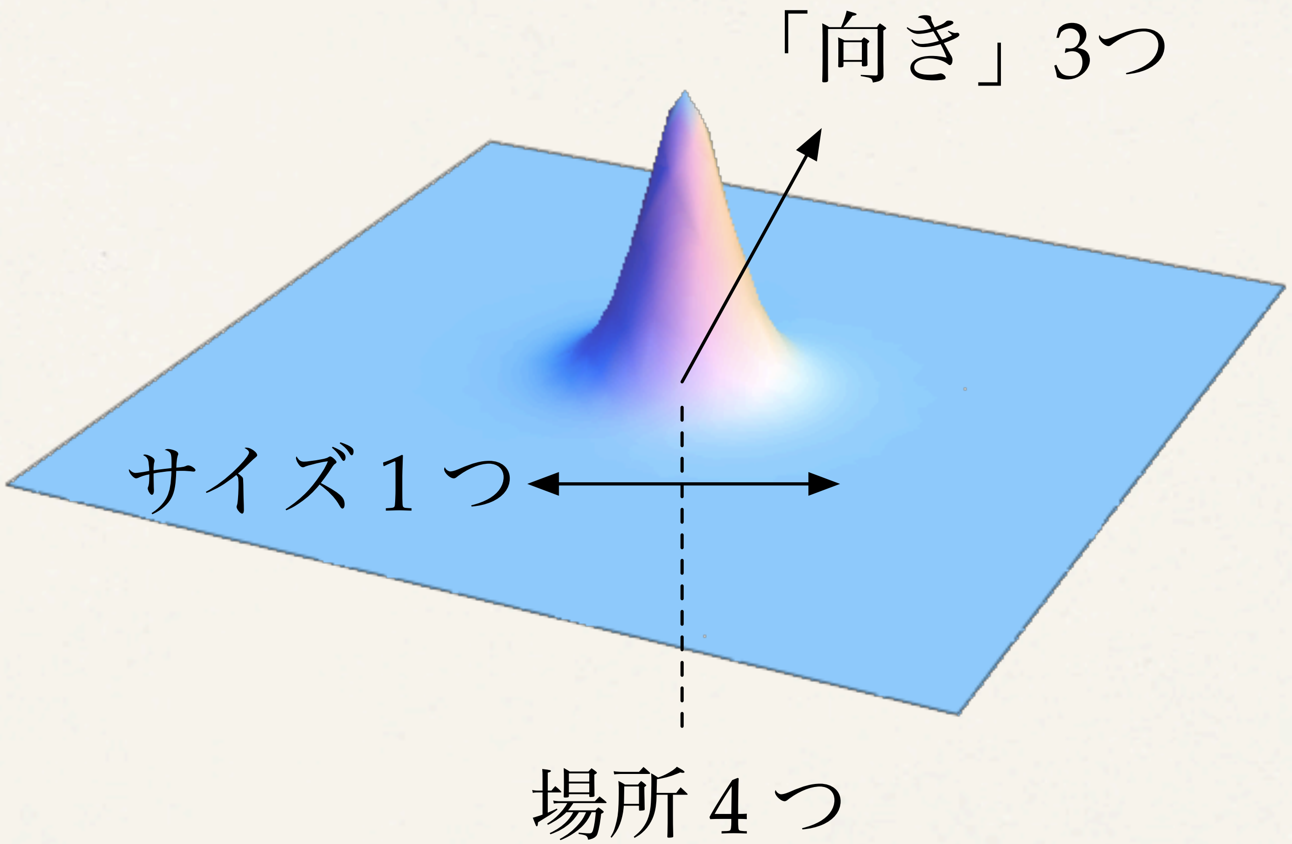
- 作用

$$S = \frac{1}{16\pi^2}\int \mathrm{tr}\ F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}d^4x$$

は正の整数になる。インスタントン数と言う。

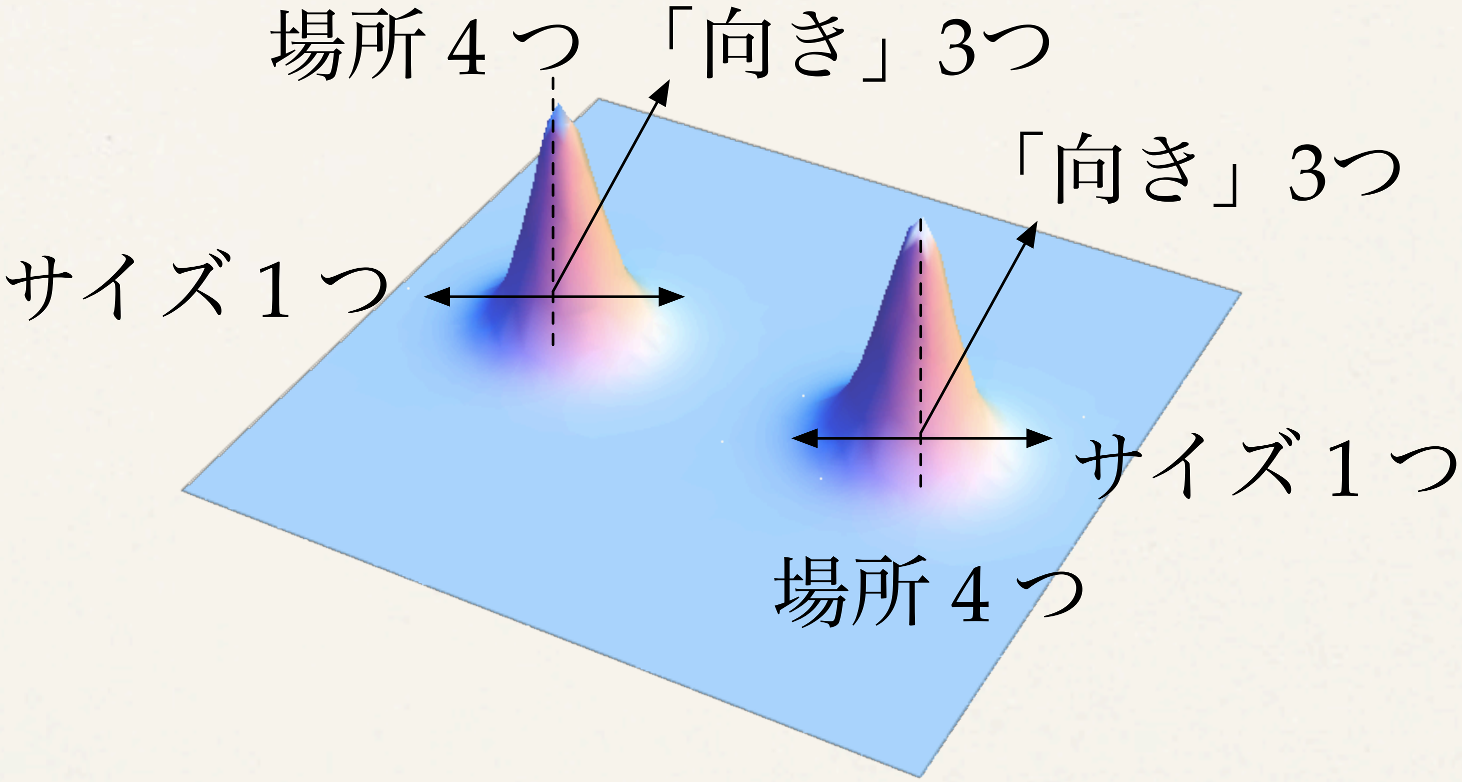


- 1-instanton には 8 パラメタある:

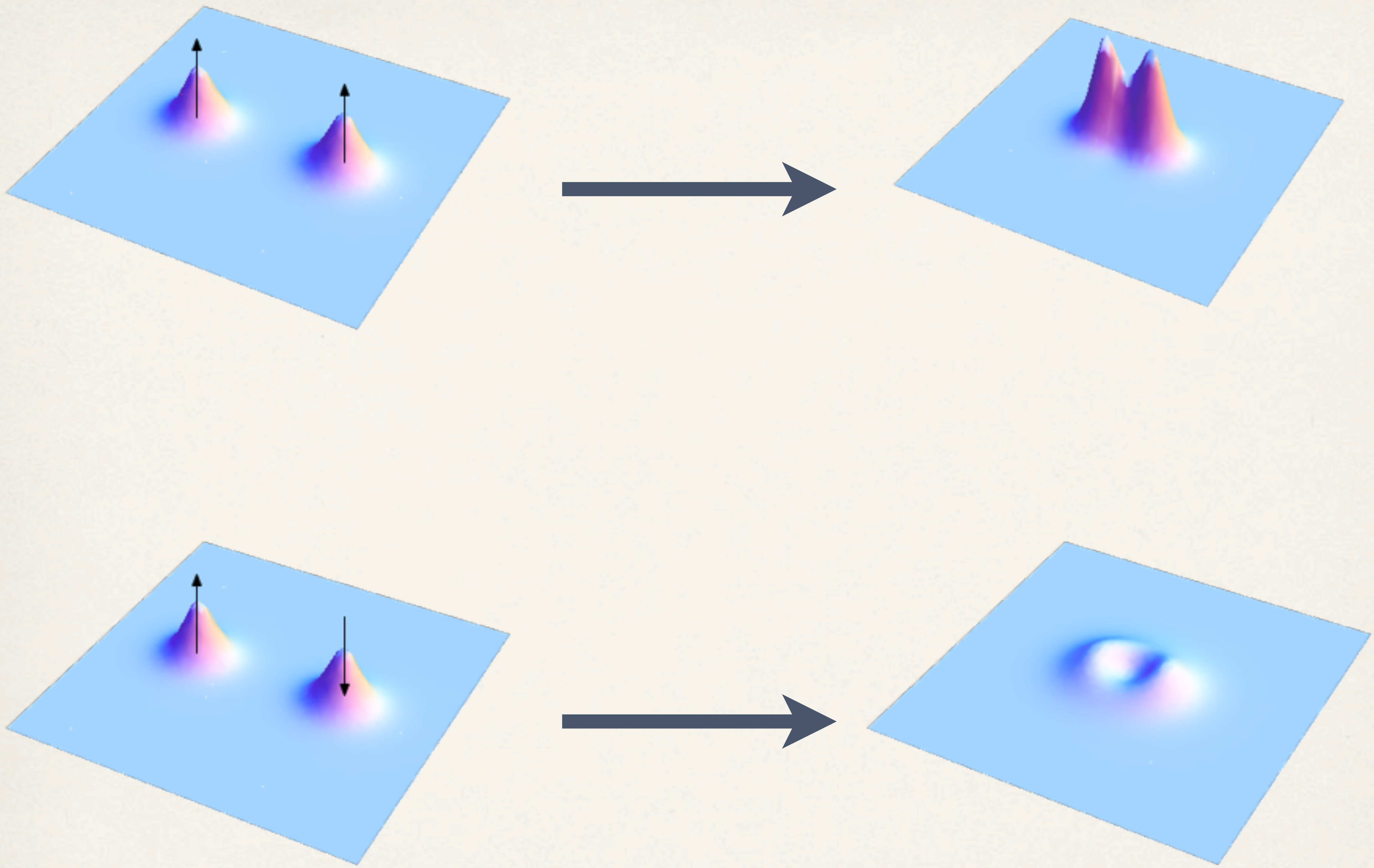


- SU(2) ~ SO(3) ~ オイラー角3つ

- *k*-instanton には 8*k* パラメタある。

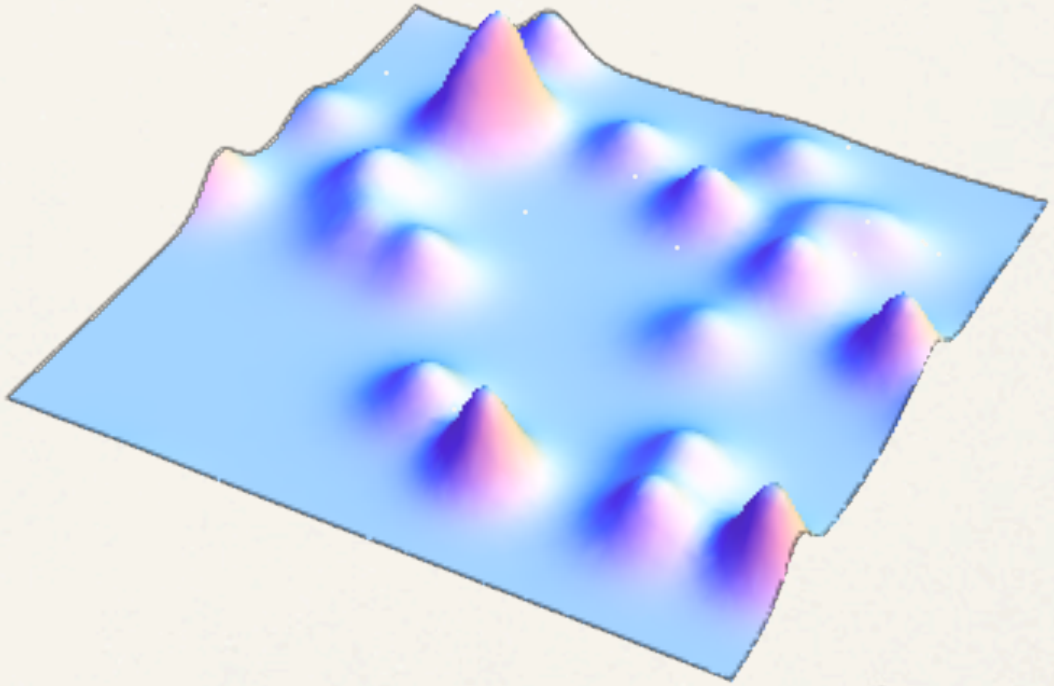


- 非線形方程式なので、重ね合わせは難しいが、可能



- インスタントンの統計力学を考えたい

$$Z = \sum e^{-\mu k}$$



- 一番安直には

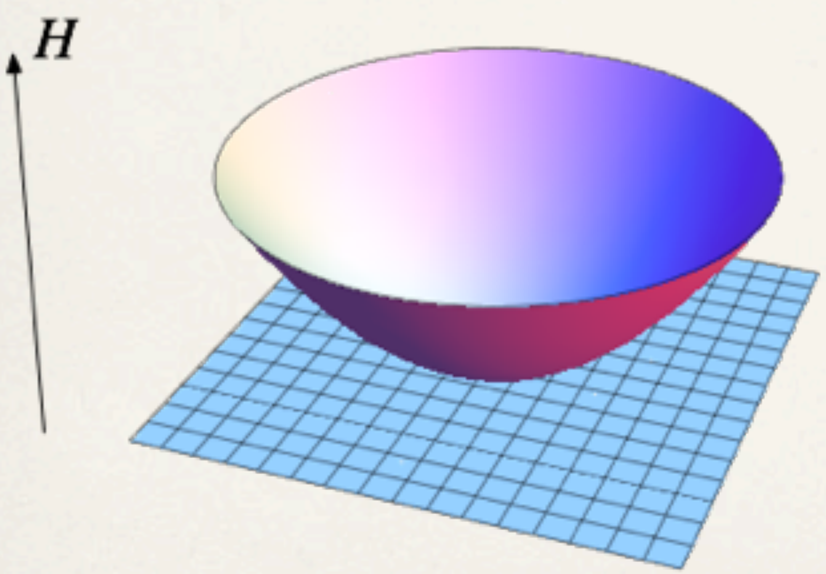
$$Z = \sum_k e^{-\mu k} \int_{M_k} \sqrt{\det g}\, d^{8k} x$$

- 勿論有限の箱にいれないと発散する

- 簡単のため、二次元積分を考える

$$Z = \iint dx_1 dx_2$$

- これは発散するので、外場を入れる



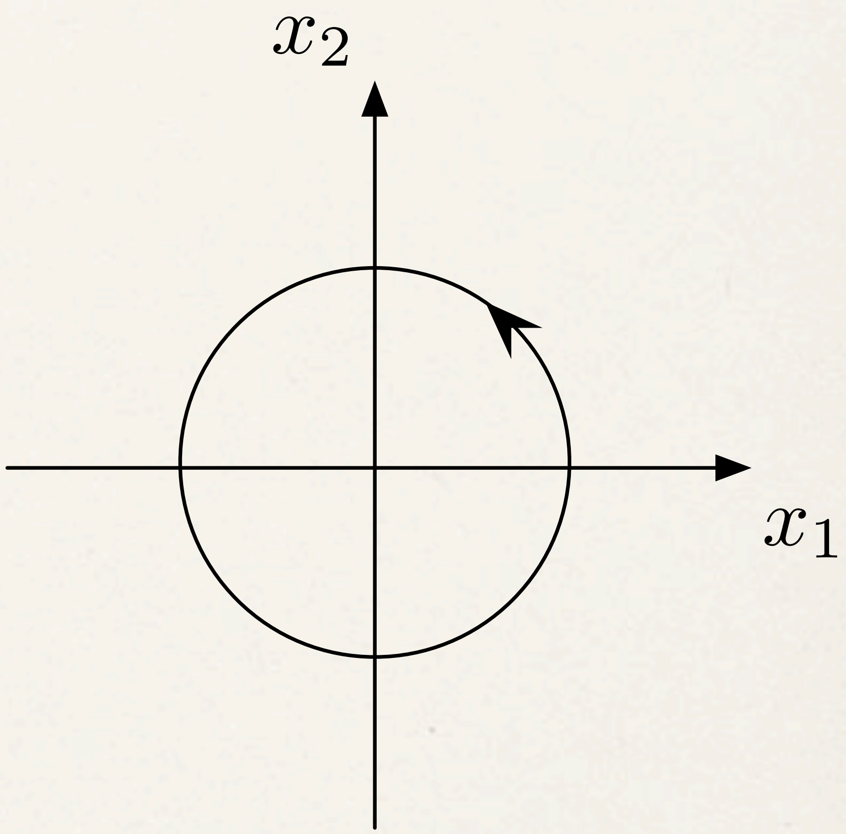
$$Z = \iint e^{-\epsilon H} dx_1 dx_2 = \frac{\pi}{\epsilon}$$

但し

$$H = {x_1}^2 + {x_2}^2$$

- $\{x_1, x_2\}_{\text{P.B.}} = 1$ とポアソン括弧が入っていると、

  $H = {x_1}^2 + {x_2}^2$ は回転の生成子



$$\{H, x_1\}_{\text{P.B.}} = -2x_2$$
$$\{H, x_2\}_{\text{P.B.}} = 2x_1$$

- ε は角運動量に対する化学ポテンシャル

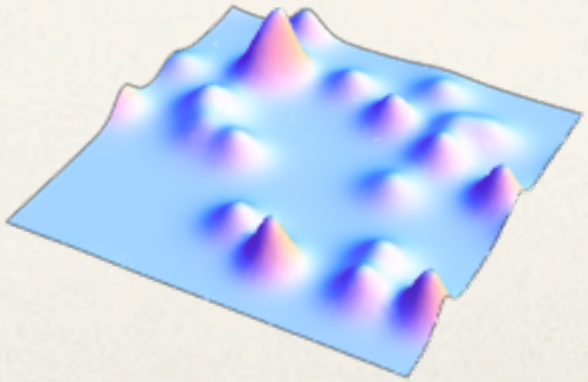
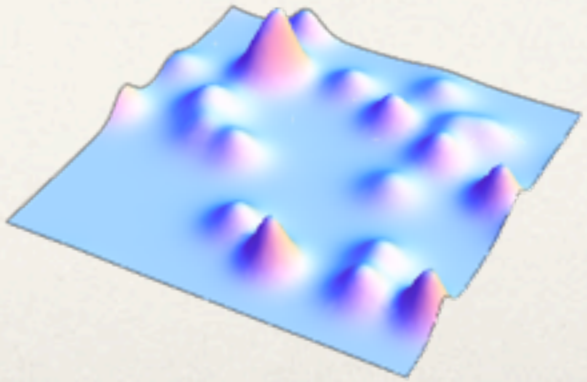
- そこで、インスタントンの統計力学に対して、

四次元時空にポアソン括弧

$$\{x_0, x_1\}_{\text{P.B.}} = 1 \qquad \{x_2, x_3\}_{\text{P.B.}} = 1$$

を入れ、x_0 x_1回転、 x_2 x_3回転、SU(2)回転に対して

化学ポテンシャル ε_1、 ε_2、 a を入れる

 × 

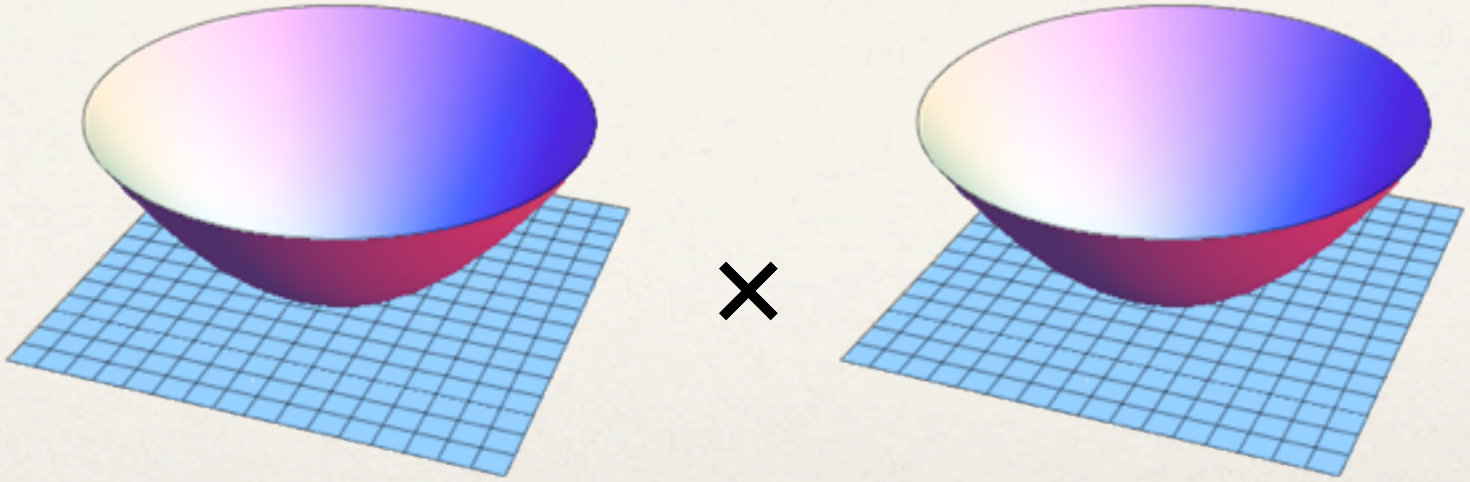
- そこで、インスタントンの統計力学に対して、

  四次元時空にポアソン括弧

$$\{x_0, x_1\}_{\text{P.B.}} = 1 \qquad \{x_2, x_3\}_{\text{P.B.}} = 1$$

  を入れ、x_0 x_1回転、 x_2 x_3回転、SU(2)回転に対して

  化学ポテンシャル ε_1、 ε_2、 a を入れる



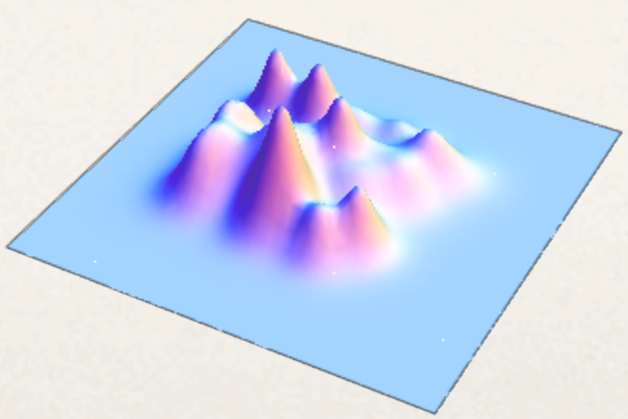
- そこで、インスタントンの統計力学に対して、

四次元時空にポアソン括弧

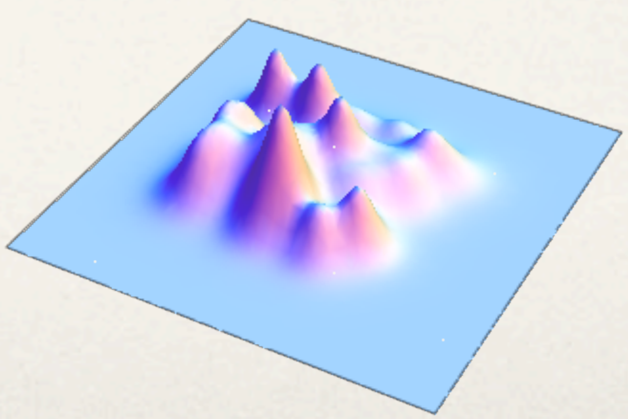
$$\{x_0, x_1\}_{\mathrm{P.B.}} = 1 \qquad \{x_2, x_3\}_{\mathrm{P.B.}} = 1$$

を入れ、$x_0\, x_1$回転、 $x_2\, x_3$回転、SU(2)回転に対して

化学ポテンシャル ε_1、 ε_2、 a を入れる



×



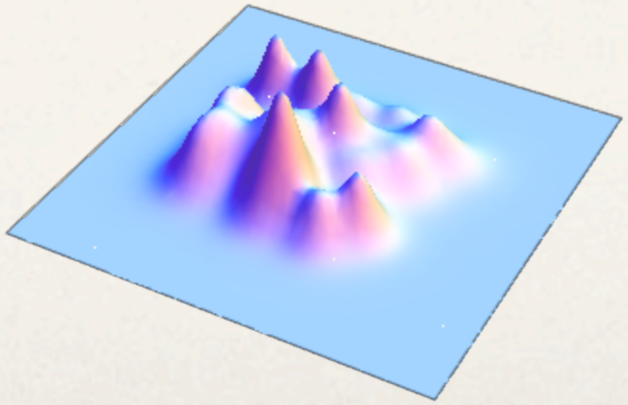
- 結局

$$Z(\mu,\epsilon_{1,2},a)=\sum_k e^{-\mu k}\int_{M_k}\sqrt{\det g}\,e^{-\epsilon_1 H_1-\epsilon_2 H_2-aJ}d^{8k}x$$

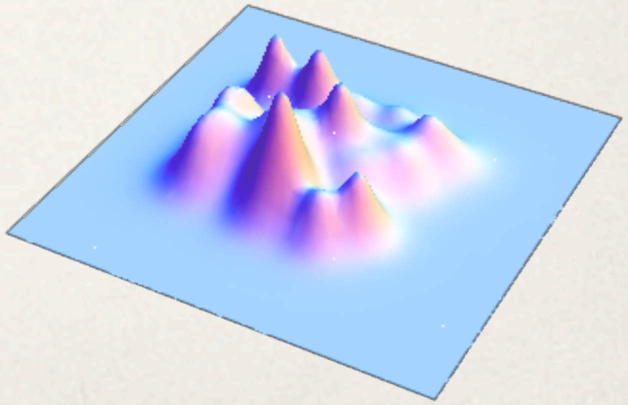
μ：インスタントン数
ε_1：$x_0\,x_1$回転
ε_2：$x_2\,x_3$回転
a ：SU(2)回転

に対する化学ポテンシャル

というのを考える。



×



- ややこしい対象で申し訳ないですが、

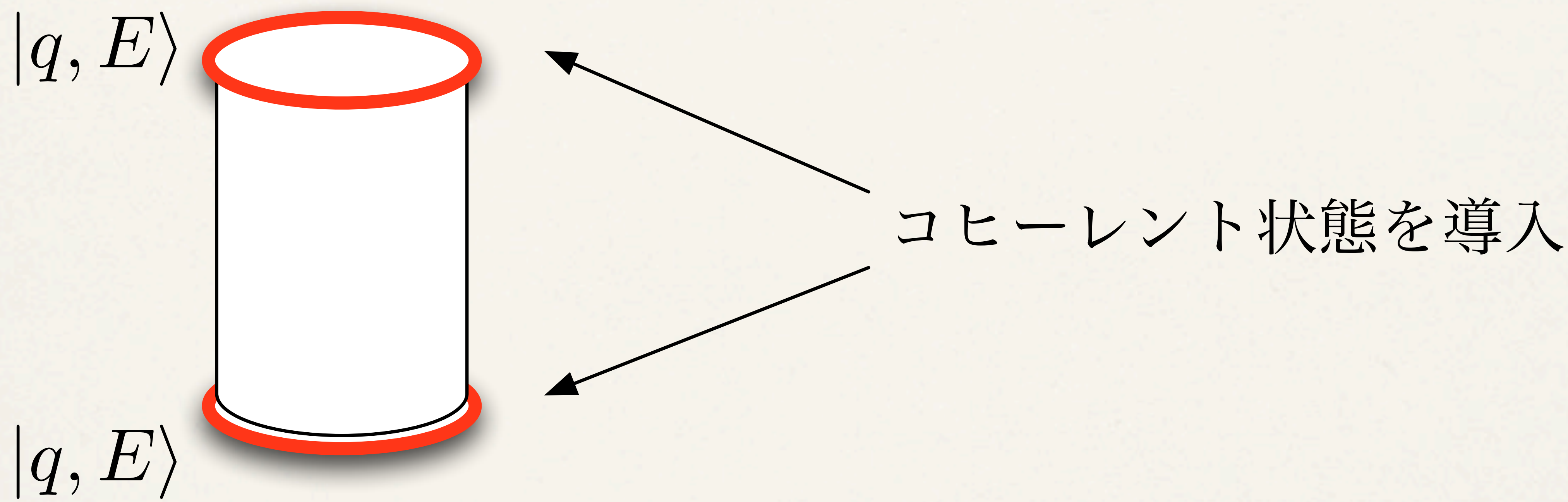
  ある意味自然な量で、

  30年来の蓄積があるので具体的に計算が可能。

$$
\begin{aligned}
&Z(\mu, \epsilon_{1,2}, a) = 1 \\
&\quad + e^{-\mu} \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \frac{2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - 4a^2} \\
&\quad + e^{-2\mu} \frac{((\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 + \epsilon_1\epsilon_2/8 - a^2)/(8\epsilon_1^2\epsilon_2^2)}{((\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2})^2 - a^2)((\epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{2})^2 - a^2)((\frac{\epsilon_1}{2} + \epsilon_2)^2 - a^2)} \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}
$$

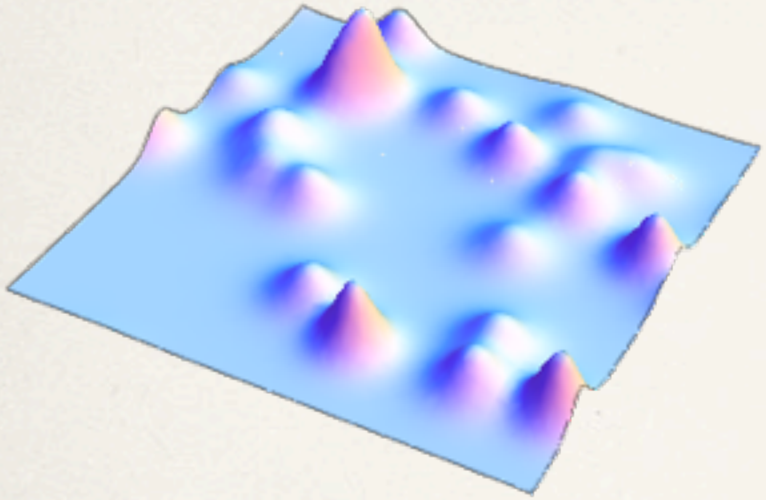
四次元の分配関数と
二次元の分配関数の関係

- 二次元では



$$
{}_c\langle q,E|q,E\rangle_c = 1+\frac{q^2}{2E}+\frac{q^4(c+8E)}{4E((1+2E)c-10E+16E^2)}+\cdots
$$

- 四次元では



μ：インスタントン数
ε_1：$x_0\, x_1$回転
ε_2：$x_2\, x_3$回転
a ：SU(2)回転

に対する化学ポテンシャル

$$Z(\mu,\epsilon_{1,2},a)=1$$

$$+e^{-\mu}\frac{1}{\epsilon_1\epsilon_2}\frac{2}{(\epsilon_1+\epsilon_2)^2-4a^2}$$

$$+e^{-2\mu}\frac{((\epsilon_1+\epsilon_2)^2+\epsilon_1\epsilon_2/8-a^2)/(8\epsilon_1^2\epsilon_2^2)}{((\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2})^2-a^2)((\epsilon_1+\frac{\epsilon_2}{2})^2-a^2)((\frac{\epsilon_1}{2}+\epsilon_2)^2-a^2)}$$

$$+\cdots$$

- 以下が成り立つ:

$$ {}_c\langle q, E | q, E \rangle_c = Z(\mu, \epsilon_{1,2}, a) $$

但し

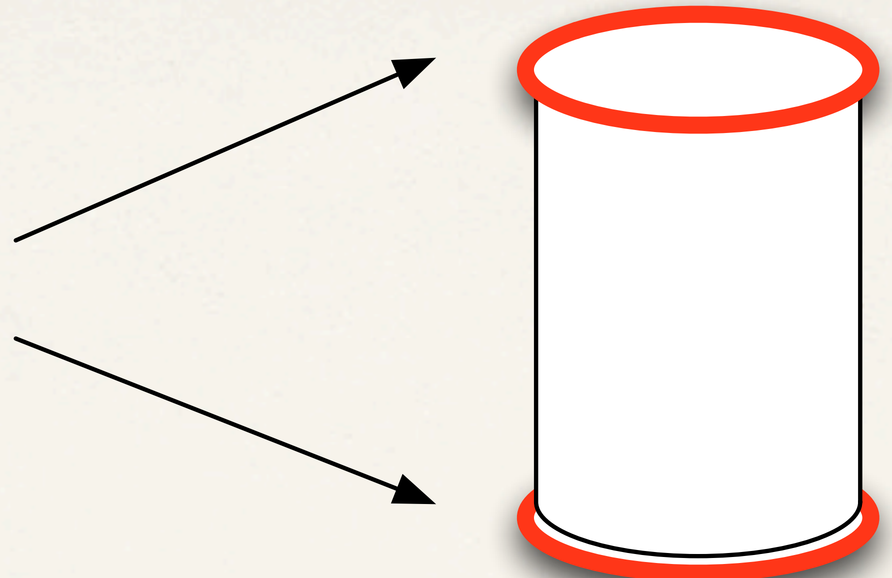
$$ q = \frac{e^{-\mu/2}}{\epsilon_1 \epsilon_2} $$

$$ c = 1 + 6\frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}{4\epsilon_1 \epsilon_2} $$

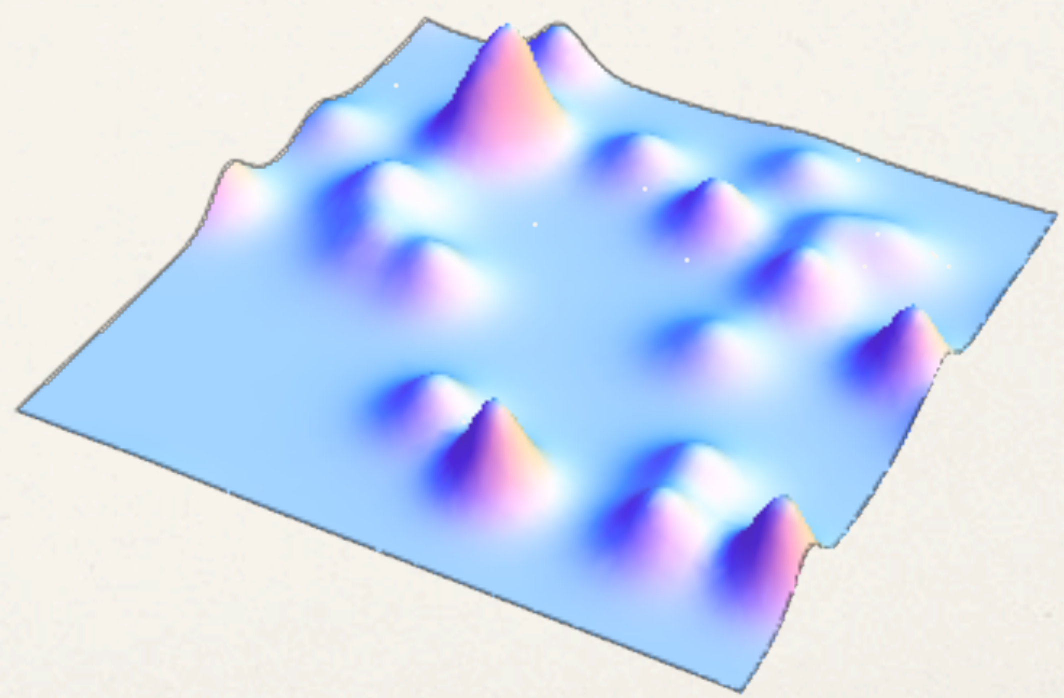
$$ E = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}{4\epsilon_1 \epsilon_2} - \frac{a^2}{\epsilon_1 \epsilon_2} $$

[Alday-Gaiotto-YT, 2009]

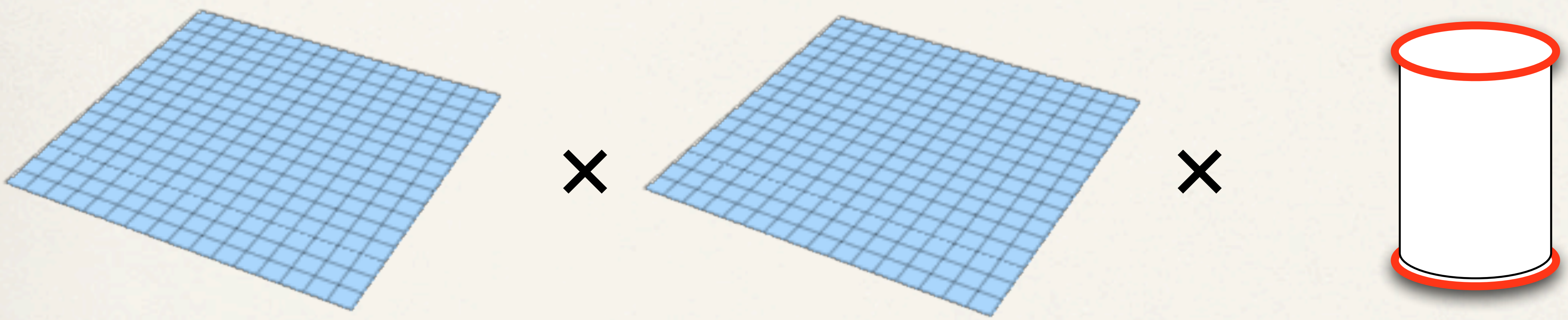
コヒーレント状態を導入



$$= \quad \sum e^{-\mu k}$$

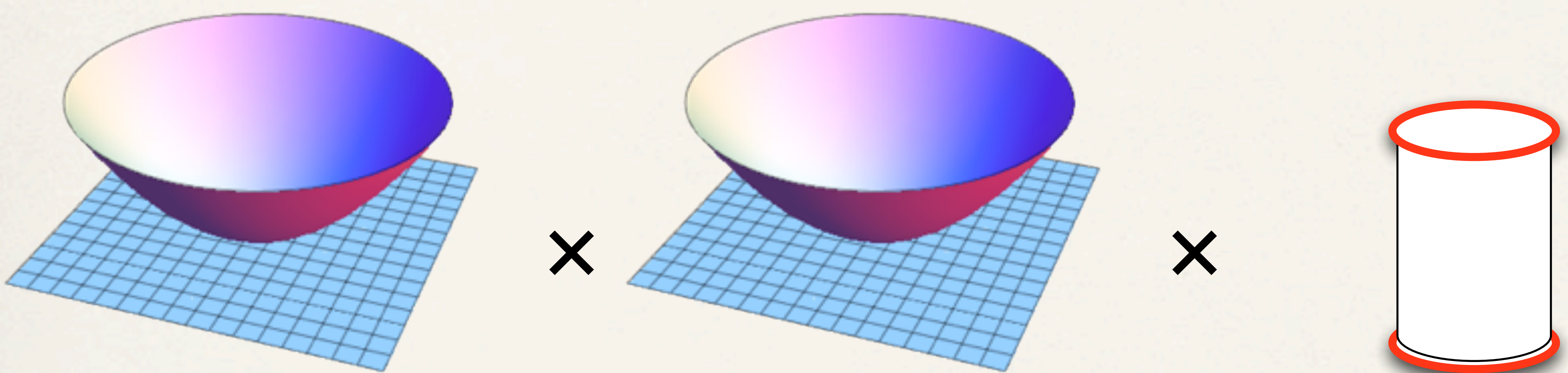


- 11次元のM理論には、6次元に広がった M5ブレーンというソリトンがある。
- それを二枚とって、次のような状況に置く

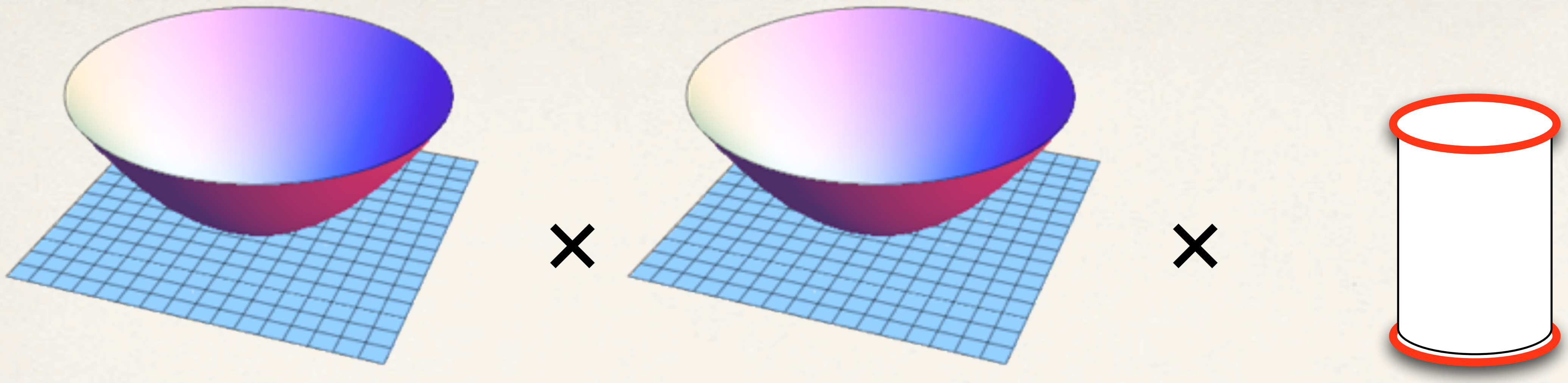


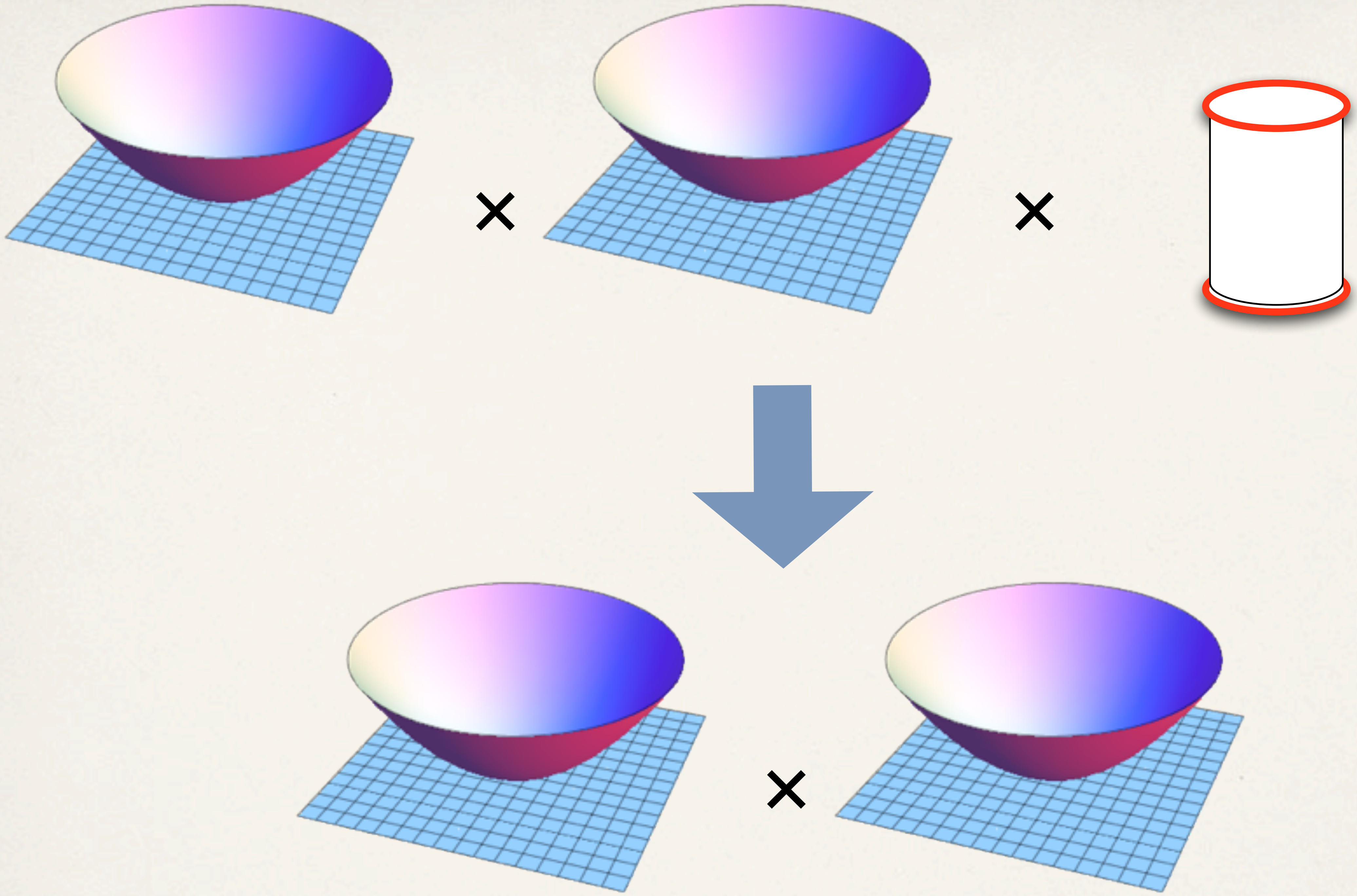
平面　　平面　　円柱 + 巧い境界条件

- このままでは分配関数は発散するので、外場を加える



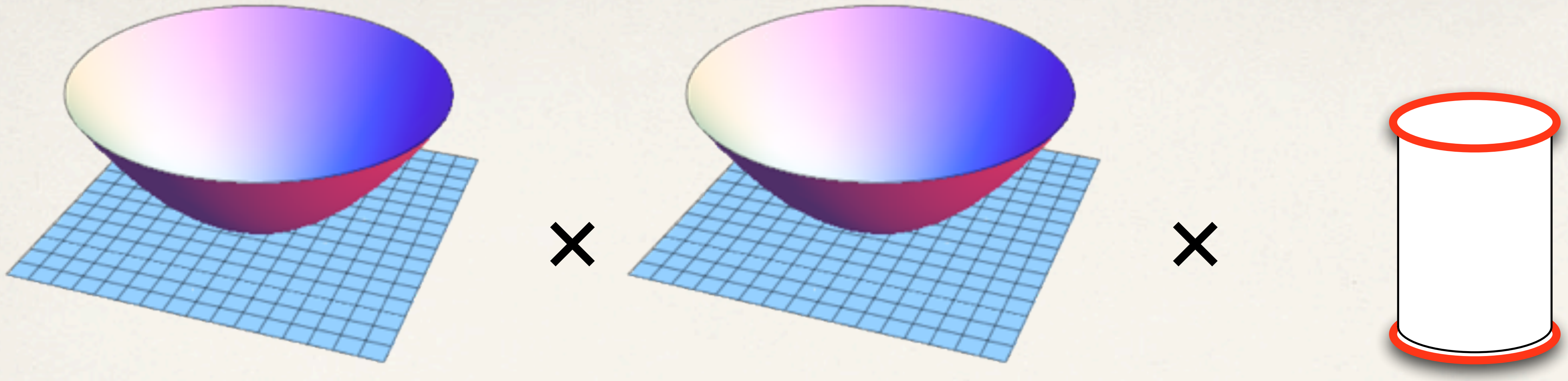
平面 平面 円柱 + 巧い境界条件

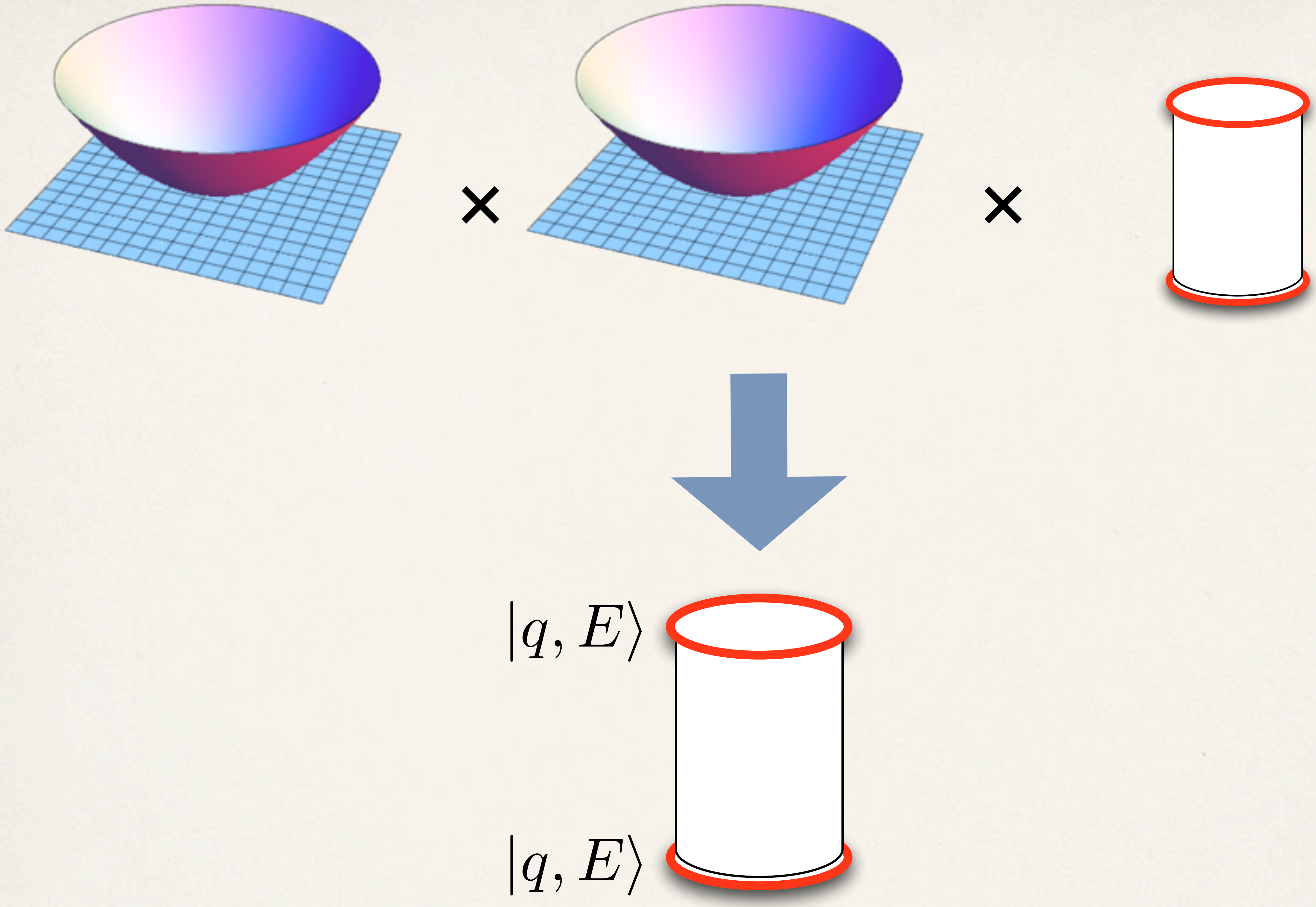




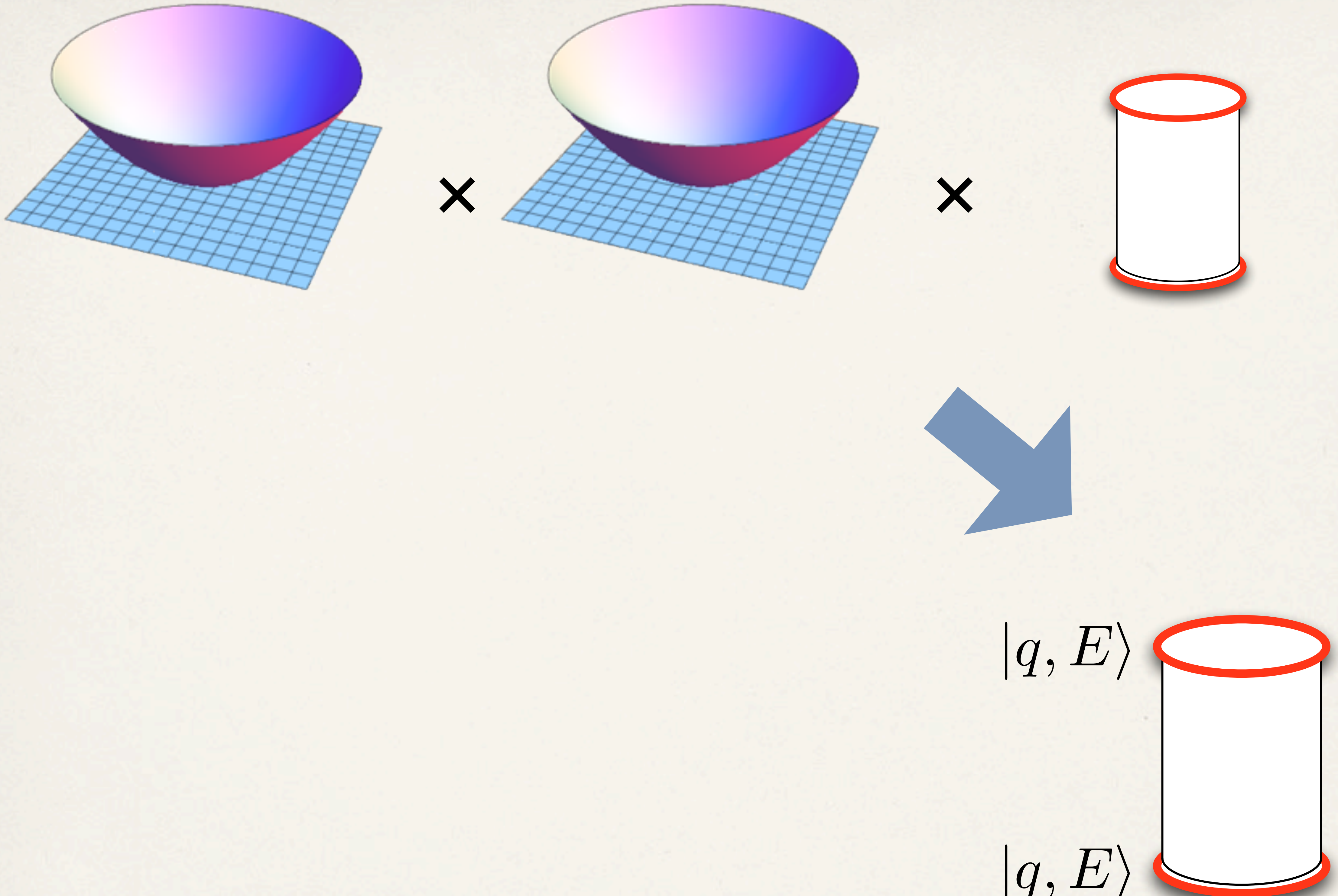
四次元拡大超対称 SU(2) ゲージ理論

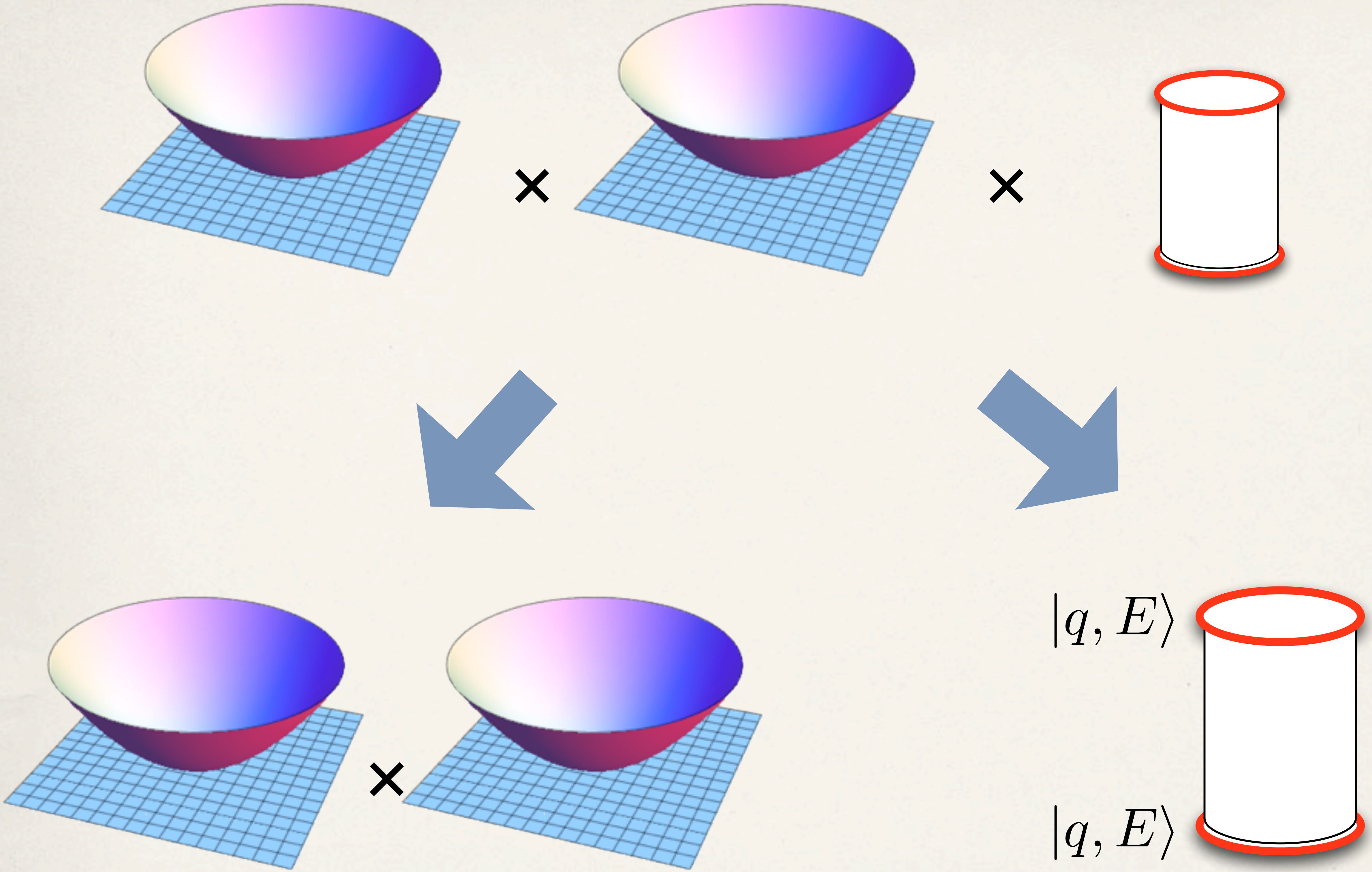
分配関数 = 先程のトイモデルの分配関数



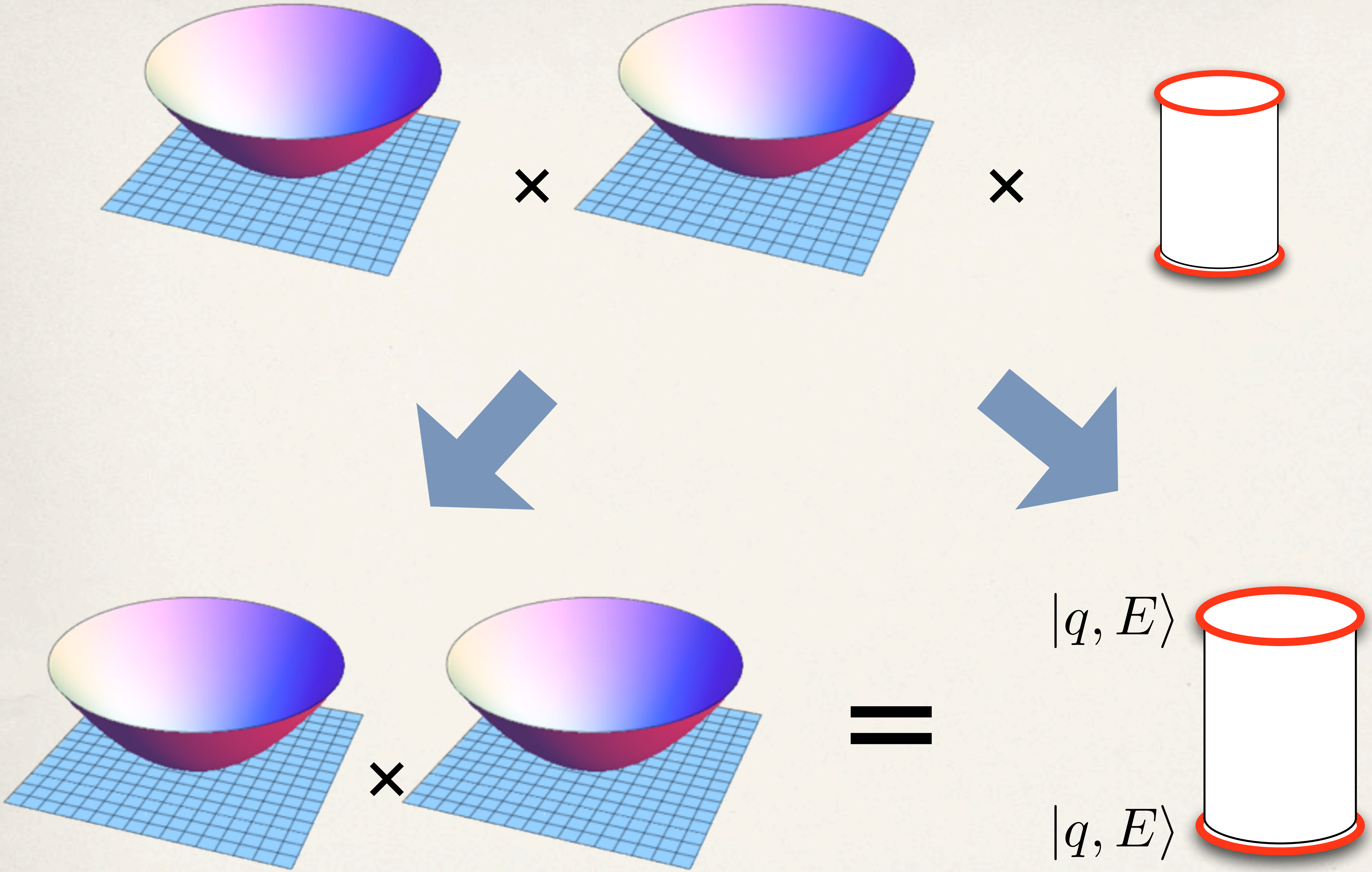


分配関数 = ${}_c\langle q, E | q, E \rangle_c$

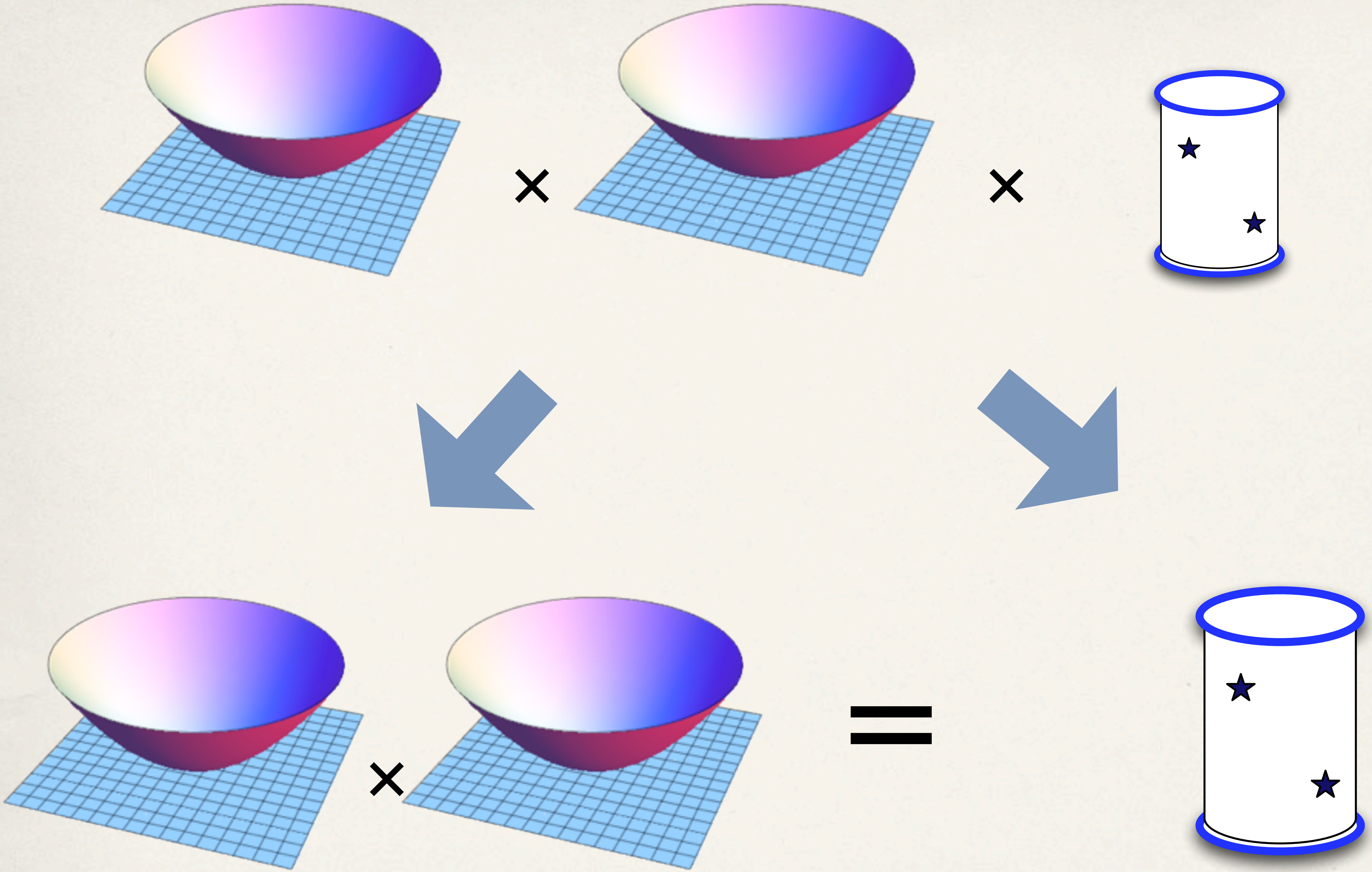

×
×
$|q, E\rangle$
$|q, E\rangle$



四次元拡大超対称 SU(2) ゲージ理論



四次元拡大超対称 SU(2) ゲージ理論



四次元拡大超対称 SU(2) ゲージ理論

+ クォーク４つ

$$\langle E|V(1)V(q)|E\rangle$$

六次元の理論の分配関数

四次元の理論の分配関数 ＝ 二次元の理論の分配関数

超弦理論/M理論の或る量

解析法A　　　　解析法B

量A　＝　量B

超弦理論無しでも議論できる量

量A $\quad = \quad$ **量B**

超弦理論無しでも議論できる量

超弦理論/M理論の或る量

解析法A

解析法B

量A ＝ 量B

超弦理論無しでも議論できる量

量A	=	量B
四次元のゲージ理論	=	五次元の重力理論
	AdS/CFT 対応	
シンプレクティック幾何	=	複素幾何
	ミラー対称性	
二次元の共形場理論	=	四次元のゲージ理論