場の量子論の数学をめぐって

場の量子論は計算手法は確立しており、実験とも良い精度で合うにもかかわらず、数学的な対象としては何であるのか相変わらずはっきりしていないという不思議な代物です。それについて、2024 年 4 月号から 2025 年 3 月号まで日本評論社の「数学セミナー」誌上に「場の量子論の数学をめぐって」という題で連載する機会がありました。この PDF ファイルはそれをまとめたものです。出版された最終版ではなく、日本評論社の担当者さんによる最終的な詳細な校正が入る少し前の、手元にあった TeX ファイルを合わせたものなので、いろいろと荒い点があるかと思います。ご容赦いただけますと、有り難く思います。

2026 年 4 月・立川裕二

第 1 回 — 場の量子論とはなにか

1　はじめに

これから 12 回にわたって、場の量子論の数学を追い求める紙上の旅に読者の皆さんとでかけたいと思います。場の量子論とは、光を記述する電磁場など、空間および時間的に広がった場を量子論的に記述するために開発された理論物理の体系です。理論物理のどのような分野も数学との深い関係があり、場の量子論も例外ではありません。数学と場の量子論の関係はリンカーンの人民と政府の関係にならって大きく三つに分けることができると思います:

1) 場の量子論の数学、
2) 場の量子論による数学、
3) 場の量子論のための数学。

筆者がこれらの言葉で何を意図しているか、順に説明を加えましょう。

1.1　場の量子論の数学

まず「場の量子論の数学」は、場の量子論自体を数学的に定式化し数学として研究することをさしたいと思っています。古代ギリシャで実世界の構造から抽象されてユークリッド幾何が生まれたように、また、ニュートンやライプニッツが物体の運動を記述しようとして微分積分に至ったのと同様に、特定の現象、対象を適切に記述する数学的枠組みがあるはずです。たとえば、「量子力学の数学」とは、ヒルベルト空間におけるいろいろな演算子もしくは作用素を研究する分野と言ってよいでしょうし、「一般相対性理論の数学」とは、リーマン多様体上の計量に定まる微分方程式の研究ということができるでしょう。同様に、「場の量子論の数学」もあると思いたいわけですが、何十年にもわたる理論物理学者および数学者の研究にもかかわらず、皆を満足させるものはまだ得られていないのが現状です。

1.2　場の量子論による数学

次に「場の量子論による数学」は、場の量子論の研究から新たな数学が生まれてくる現象をさします。著名な例としては、ミラー対称性、および、ザイバーグ・ウィッテン理論をあげることができます。数学においては、ミラー対称性は複素幾何とシンプレクティック幾何をつなぐ大きな枠組みであり、ザイバーグ・ウィッテン理論は四次元以下の多様体の研究に大きな影響を与えています。これらは、どちらも理論物理学者が超対称場の量子論を研究している過程で得られた数学的観察を数学者が定式化し深めたものですが、得られた数学的結果自体は場の量子論を離れて理解することができます。

1.3　場の量子論のための数学

そして「場の量子論のための数学」は、物理において場の量子論を学んで使うために必要な数学のことです。場の量子論の標準的な教科書を学んでいる学生さんが、場の量子論自体でなく、それに必要な数学を学ぶために苦労している様子を SNS でしばしば見かけるように思います。また、筆者のように 20 年以上場の量

子論の研究をやっている者としても、研究の進展に応じて突然これまで使わなかった数学の分野の勉強の必要に迫られることがあります。どちらにせよ、確立した数学の分野を、場の量子論をするうえで使っていく、ということになります。

1.4　連載の主目的

今回の連載では、特に「場の量子論の数学」に焦点をあててみたいと思います。時折「場の量子論による数学」や「場の量子論のための数学」に脱線するかもしれませんが。まずは、理論物理学者が場の量子論をどんなものだと思っているか、からはじめて、いろいろな数学者が過去数十年の研究の過程で、場の量子論をどのような枠組みで捉えようとしてきたかを見たうえで、それがどのようにして総合されるべきだろうかを考えたいと思います。

2　場の量子論と物理

しかし、その話をはじめるまえに、この第 1 回の残りの部分では、まずは場の量子論の物理における使われ方について説明をしておきたいと思います。場の量子論が数学的にも興味を持たれるのは、やはり、物理で重要な役割を果たしてきたからでしょうから。

2.1　場とは

物理において「場 (ば)」とは電場、磁場など、時間空間方向に広がったものなら何でも指し示します。場の量子論はこのような「場」を量子力学的に扱う枠組みです。電磁場を量子論的に扱うと粒子的な励起が現れます。これが光の粒子、光子 (フォトン) です。

別の例として、原子が格子上に並んでできた結晶を考えてみましょう。個々の原子はそれぞれの格子点のまわりをゆらゆらと動いているわけですが、それを結晶のゆがみの場だと思うことができます。結晶中をゆがみが伝搬していくのが音波です。このゆがみの場も、量子論的に扱うと粒子的な励起が現れることが知られており、フォノンと呼ばれます。フォトンは photo (光) + on (粒子) で、フォノンは phono (音) + on (粒子) というわけです。

電磁場と結晶のゆがみの場の大きな違いは、電磁場は特殊相対論でのローレンツ変換のもとで自然に振舞う一方、結晶のゆがみの場はローレンツ変換性を持たないことです。これに応じて、場の量子論も、相対論的なものと非相対論的なものに大きくわかれます。素粒子理論では基本的に相対論的場の量子論ばかり考えます。一方で物性理論で場の量子論を扱う際は非相対論的なものが出てくるのが普通です。

非相対論的な場の理論も相対論的な場の量子論も物理においては重要ですが、数学との関係においては相対論的な場の量子論の果たしてきた役割がこれまでの所はかなり大きいように思います。ですので、この連載においては相対論的な場の量子論を扱うことが多くなると思います。

相対論と場の量子論にはもう一つ重要な関係があります。量子力学を学びはじめますと、粒子を量子力学的に扱うとシュレーディンガー方程式で記述されることを学ぶでしょう。しかしシュレーディンガー方程式は相対論的効果を無視できる極限でしかなりたちません。それも、特殊相対論の効果によって方程式の形が少し変更をうける、という程度ではおさまらないことが知られています。相対論的粒子を記述するためには、通常の有限個の粒子のための量子力学を用いて扱うことはできず、たとえば電子ならばまずは時間空間に広がった電子場を考え、そ

れの粒子的励起として電子を扱うというステップを踏まないといけないのです。

では、素粒子論および物性理論において、場の量子論がどのように使われているか、さらにもうすこし詳しくみてみましょう。

2.2　素粒子論における場の量子論

この世の構成要素を追い求めていると、分子は原子でできており、原子は電子と原子核でできており、原子核は陽子と中性子からできており、そうして陽子と中性子はクォークがくっついてできています。現時点で実験的にわかっている限り、これ以上ものを分割することはできません。すべてのものは 6 種類のクォーク、電子を含む六種のレプトン、あとはそれらをつなぎ合わせる電磁場、強い力の場、弱い力の場、最後にヒッグス粒子、これだけのものを組み合わせてできている、というのが素粒子物理学の現状での到達点です。これを記述するのがいわゆる「素粒子物理学の標準模型」です。

クォーク	u	c	t
	d	s	b
レプトン	e	μ	τ
	ν_e	ν_μ	ν_τ
強い力	グルーオン		
電磁気力	光子		
弱い力	W, Z 粒子		
	ヒッグス粒子		

図 1　この世界の構成要素、素粒子の一覧。

素粒子論においては光速に近い速度で動いている素粒子を量子力学的に扱うことが必須です。ですので、標準模型も場の量子論を用いて記述されます。標準模型での計算方法は確立しており、理論的に計算を行った結果は実験の結果と非常によく合致することが知られています。一番精度よく計算でき精度よく測定されている量として、電子の異常磁気能率 a_e と呼ばれているものがあり、実験でも理論でも

$$a_e = 0.001159652181\ldots$$

と有効数字 10 桁もの精度での一致が知られています。もちろん、標準模型からの計算結果と最新の実験での測定結果に有意なずれがあることもあり、そこから標準模型を超える物理を探そうとたくさんの人が頑張っています。

2.3　物性理論における場の量子論

結晶格子のゆがみの場を量子化したものをフォノンということはすでに触れましたが、フォノンの物性への影響は間接直接に測定されています。また別の場の量子論の物性理論における現れとして、臨界現象をあげることができます。

水は圧力と温度を調節することで固体、液体、気体の間をうつりかわることは皆さんも日常生活でご存知だと思います。液体と気体の間は 1 気圧では 100 度でうつりかわるわけですが、気圧を上げて行くと徐々に沸点が上がって行きます。しかしある気圧を超えると、そもそも液体と気体のあいだの区別がなくなり、沸点というものもなくなってしまいます。この区別がなくなる点を臨界点と呼び、同様の現象はいろいろな物質でも見られることが知られています。

それだけでなく、臨界点における種々の物理量がもとの物質によらず、臨界現象のおおまかなタイプにのみに依存することが知られており、これを臨界現象のユニバーサリティと呼びます。たとえば、水の気体液体の区別がなくなることにともなう臨界現象と、永久磁石の磁化

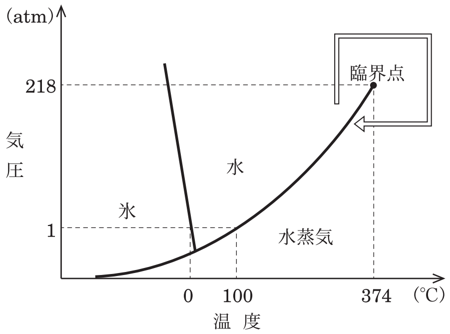


図 2　水の相図の模式図。臨界点以下では水と水蒸気の間に相転移があるが、臨界点を超えていけば相転移なく水から水蒸気に連続的にうつることができる。

が加熱により消えることにともなう臨界現象は同じユニバーサリティクラスに属し、このとき臨界点での揺らぎの強さを示す臨界指数 η は両者に共通します。

これらの臨界点における現象は共形場理論とよばれる、対称性の高い特殊なクラスの場の量子論で記述されていることが知られており、そのような共形場理論の研究も精力的に進められています。この 10 年で臨界指数の計算方法も発展し、上記 η も理論的な数値計算によって求められ、実験結果とよく一致しています。

2.4　次回にむけて

どうでしょう、このように有用な場の量子論なのですから、それの数学的な定式化も面白くなりそうです。それなのに、場の量子論の満足のいく定式化は未だに得られていないのです。これはなぜなのでしょうか。これまでどのような提案があり、それではなぜまだ不満足なのでしょうか。今後、満足のいく定式化はできそうなのでしょうか。

これから一年間、読者の皆さんと一緒に、過去から未来まで、場の量子論の数学を追い求めて行きたいと思います。

第 2 回 — 場の量子論とその数学の歴史と現状

場の量子論 (quantum field theory) は素粒子物理や物性物理において実験結果を精度良く説明するのに有効に使われています。一方で、場の量子論の数学として万人に受け入れられるものはまだ得られていません。この事情について、今回は、歴史的経緯からみていくことにしましょう。概要を次頁の図 1 にまとめてありますので、そちらもご参照ください。

1　量子電磁力学の確立まで

量子論は 20 世紀初頭にプランクやアインシュタインによる光のエネルギーに関する光量子仮説からはじまりました。通常、前期量子論と呼ばれるそれから 20 年ほどの発展を経て、確固とした理論としての量子力学は 1926 年のハイゼンベルクの行列力学およびシュレーディンガーの波動力学の二つの論文で確立されたと言ってよいでしょう。量子力学の数学的整備は物理の発展と平行してずっと続きます。しかし、数学的枠組み自体としてはフォン・ノイマンの 1932 年の著書『量子力学の数学的基礎』で確立したと言って問題ないと思います。この間はたったの 6 年ですから、その迅速なことに驚かされます。

さて、量子力学が光量子仮説から出発したことを考えれば、光自体を量子力学で扱いたくなります。光は古典的には電磁場の波動ですので、自然と場の量子論が必要になります。そのため、量子力学の建設後すぐ、1920 年代後半から、場の量子論の研究ははじまっています。しかし、古典力学系から出発して対応する量子力学系を作る通常の手続きを場の理論に適用すると、実験と比較できる計算結果を出すに至る計算の途中の段階で、色々な箇所で無限大が生じてしまいます。これの処理法が確立し、電磁場と物質粒子の相互作用に関して実験結果との満足する一致が得られたのは 1949 年で、出来上がった理論は量子電磁力学、無限大を処理する手法はくりこみ理論と呼ばれるようになりました。

2　場の量子論の定式化の試み

2.1　公理論的場の量子論

この結果を数学的に定式化しようと思うのは自然なことで、実際 1950 年代前半からは公理論的場の量子論 (axiomatic quantum field theory) と呼ばれるアプローチがはじまります。これは、無限大が途中で出てくる計算手法自体を数学的に正当化するのはいったんあきらめて、計算結果が満たすべき性質を公理系として列挙して、そこから厳密に何が導出できるかを考えようというもので、提唱者の名前を取ってワイトマン公理系と呼ばれるのが標準的なものです。公理論的場の量子論にはスピン統計性定理の証明が得られるなど、一定の結果があります。この定理の主張を説明しますと、量子統計力学においては粒子はボーズ統計かフェルミ統計かのどちらかに従うのですが、経験則として、光子などスピンが整数の粒子はボーズ統計に従い、電子などスピンが半整数の粒子はフェルミ統計に従うことが知られていました。これに一般的証明が与えられたわけです。

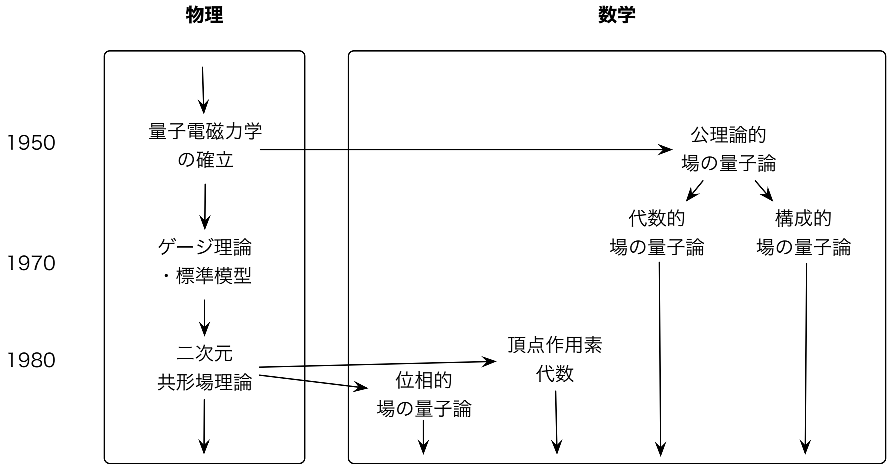


図 1　場の量子論の定式化の経緯の概要 (1990 頃まで)

しかしながら、これで場の量子論の数学化が完成したというわけにはいかず、大きな問題があります。それは、これらの公理系を満たす実例を書き下すのが極度に難しいということです。相互作用しない粒子系を記述する場の量子論を自由な場の量子論と呼びますが、自由場は数学的に厳密に構成でき、公理論的場の量子論の公理をすべて満たすことが示せます。しかし、自由でない場の量子論の例は長らく得られませんでした。

2.2　構成的場の量子論

そこで、自由でない、非自明な場の量子論を構成してやろうという分野が生まれます。それが構成的場の量子論 (constructive quantum field theory) と呼ばれるものです。空間 d 次元、時間 1 次元の状況を以下 $d+1$ 次元と書くことにすると、$1+1$ 次元で非自明なものがはじめて構成されたのは 1960 年代前半、$2+1$ 次元で同様のことがなされたのは 1970 年代前半になります。丁寧な不等式評価を通じて結果が非自明なものに収束するのを示すのが結果を出すうえでの大きな困難で、次元があがるほど状況は悪くなり、我々のすむ $3+1$ 次元では非自明な例はいまだ一つも具体的には構成されていません。たとえば、先に量子電磁力学は 1950 年代に計算法が確立したと書きましたが、その量子電磁力学がワイトマン公理系を満たすかは未解決なわけです。現在では、むしろ逆に、量子電磁力学は他の場の理論と適切に組み合わせない限り単体では存在しない状況証拠がいくつもあります。

2.3　代数的場の量子論

また、公理系から従う結果をさらに詳しく調べようというのも自然な方向性です。これに関しては、ワイトマン公理系をそのまま調べるのではなく、ほぼ等価だと期待されるがさらに異なる定式化をとることが主流になりました。量子力学の段階ですでに問題になることとして、位置演算子 X や運動量演算子 P がヒルベルト空間上の作用素として有界でないことがあります。このため作用素の定義域に常に注意を払う必要が生じます。古典的な場を量子化して得られるはずの場の演算子は、さらに素性がわるく、作用素値超関数というものになると思われ

ており、扱いがますます困難になります。そこで、与えられた時空の領域 O に対して、そこに存在する場から作られる有界な作用素をあつめた作用素のなす代数 $A(O)$ を考えることが提唱されました。このアプローチが代数的場の量子論と呼ばれるものです。この定式化からも、場の量子論の持ちうる対称性についての包括的な結果が得られるなど、一般論への大きな寄与があります。しかし、実例を作るのが困難だという問題は引き続き抱えています。2010 年代になって、ようやく $1+1$ 次元の例について非自明なものが多数構成されるようになりました。

3　場の量子論のさらなる進展

3.1　標準模型

これらの数学的定式化に平行して、物理においては場の量子論はさらなる発展をみせます。素粒子間の力としては電磁気力だけでなく「弱い力」および「強い力」と呼ばれるものがあります。「弱い力」に関しては、電磁気力と統一的に扱う理論が 1960 年代後半には確立しました。また、「強い力」に関しては、それを通じて相互作用する不安定粒子が 1950 年代に続々と発見され、それらの理論的記述に場の量子論が使えるのかどうか疑われた時代もありました。点粒子ではなく空間に 1 次元的に広がった弦を量子的に扱おうとする弦理論も「強い力」を記述する試みとして産まれましたが、結局のところ 1970 年代前半には「強い力」も場の量子論として扱えることがわかりました。

得られた結果は、電磁場、弱い力の場、強い力の場を古典的に記述したとするとそれぞれ $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ のゲージ場である、より数学的には上記の群を構造群としてもつ主束の接続である、ということで、それをくりこみ理論にしたがって理論物理の意味での場の量子論として扱えば、実験との良い一致が得られるということです。この総体が素粒子理論の標準模型 (Standard Model) と呼ばれるもので、実験的検証はずっと続いています。標準模型は理論の形式としては量子電磁力学の順当な後継者ですので、適切に拡張したうえで、前節で述べたような公理論的もしくは代数的場の量子論の公理系を満たすことが示せると嬉しいわけですが、それを示すことは現時点では遠い夢です。

3.2　共形場理論

上記のような素粒子理論の進展に平行して、物性物理においても場の量子論をつかった研究が行われました。それによる超伝導体の理論的記述は、標準模型の中のヒッグス機構にも転用されています。また、前回説明したような臨界現象の研究から、臨界点直上での現象は、場の量子論の中でもさらに都合の良い性質をもつ共形場理論 (conformal field theory) と呼ばれるクラスで記述されることがわかりました。通常の場の量子論では、回転やローレンツ変換など、相対論的な意味で長さを保つ変換がなす群が場に作用することを要求しますが、共形場理論においては、長さは変えるが角度は保つような共形変換のなす群も場に作用することを要求します。

特に $1+1$ 次元の共形場理論は、物性物理での臨界現象に応用があるだけでなく、弦理論における弦も $1+1$ 次元であることからその記述に使えることもあり、1980 年代に爆発的に研究が進みました。$1+1$ 次元の共形場理論には、共形変換の無限次元の拡張であるビラソロ対称性が作用することがわかり、数学的にも扱いやすくまた興味深いものです。

4　新たな定式化

4.1　頂点作用素代数

$1+1$ 次元の共形場理論の理論物理における進展はそれをきちんとした数学にしようとする方向性を産みました。2 次元の共形場理論は複素構造が与えられた実 2 次元の面上で考えていると思うことが自然にできます。座標を z と $\bar{z}$ と書くことにすると、場の作用素のなかで z には依存するが $\bar{z}$ には依存しないような正則 (holomorphic) なものだけをまず取り出して考えることができます。それを公理化して得られたものが頂点作用素代数 (vertex operator algebra) と呼ばれる数学的対象で、最大の散在型有限単純群であるモンスター群との関係などからも研究されています。

4.2　位相的場の量子論

また、それまでの場の量子論は大抵ほぼすべての場合に平坦で無限に広がった $\mathbb{R}^{d+1}$ で考えられており、前節で述べたような既存の定式化もそれを公理系の一部として取り込んでいるのですが、2 次元の共形場理論は物性理論の観点からも弦理論の観点からも穴のいくつかあいたような一般的な 2 次元面で考えることが自然です。シーガルはこのような状況での場の量子論の幾何学的な定式化をはじめて提唱し、大きな影響を与えました。

さらに、共形場理論では角度は保つような変換で場の理論が自然に振舞うことを要求するわけですが、さらに強く、トポロジーを保つならばどんな変換のもとでも不変であるような理論を考えることができます。これが位相的場の量子論 (topological quantum field theory) で、シーガルのものにならった定式化をアティヤーが与え、あわせてアティヤー–シーガル型の公理系と呼ばれています。位相的場の量子論は、前節の代数的場の量子論的に考えると、単連結な領域 O に対する場の作用素の代数 $A(O)$ が自明になってしまうようなもので、それ以前に数学的に扱われていたような場の量子論からすると対極に位置するものです。位相的場の量子論はその後、物性理論における $2+1$ 次元のエニオン系の記述にも使えることが認識され、理論物理においてもしばしば使われるようになっています。

5　既存の定式化の問題点

ここまで、 20 世紀初頭から 1990 年代に突入するまでの場の量子論の理論物理側での進展と、それに触発された数学的定式化の概要を非常におおざっぱではありますが見てきました。さて、ここまでの定式化ではなぜわれわれは不満なのでしょうか。

まず、公理論的および代数的場の量子論に関しては、平坦で無限に広い $\mathbb{R}^{d+1}$ での場の量子論の枠組みとしては必要なものだと思われます。非自明な具体例がいまでもなかなか作れないというのは、場の量子論の本質的な難しさをあらわしており、定式化のせいではなく仕方がないもののようです。また、せっかく数学的に定式化したものの、実験結果と比較されるような数値を標準模型から計算する場合などにおいてはほぼ使われることがありません。標準模型におけるくりこみ理論の計算やその正当化などが、その中で展開できるような、数学的枠組みがあればよいと願いたくなるわけです。さらに、この宇宙は膨張しており平坦なわけではありませんから、より一般的な時空においても場の量子論が定式化されている必要があります。

次に、頂点作用素代数や、位相的場の量子論

に関しては、それぞれの対象とする特殊な状況においては、その定式化は非常に有用で、理論物理側での計算にもしばしば使われてます。しかし、もっと一般の場の量子論には適用できません。

また、ここまで見たように色々な定式化があるわけですが、それぞれの分野はほぼ独立した数学の分野として深化、発展しており、20 世紀の間はお互いの交流がそれほど無かったように思われるのも外野にいる筆者などからすると残念に思われます。

あるべき定式化は、標準理論の計算がその中で展開でき、平坦な時空に制限すれば代数的場の量子論が現れ、共形変換のもとでの不変性や位相不変性を課せばアティヤー–シーガル式の場の量子論の枠組みが再現されるようなものであってほしい、ということになります。

これらの問題について、次回以降さらに掘り下げていこうと思います。

第 3 回 — 場の量子論の物理屋むけ記述について

前回は場の量子論の数学的定式化の種々の試みについて歴史的経緯を 20 世紀の終わり頃まで概観し、どのような定式化が求められているのかを見ました。こういう話を筆者が物理屋の前ですると、「物理屋向けの場の量子論の教科書はいろいろあるわけで、その議論は数学者の望む厳密さには至らないだろうが、各ステップを厳密にすればいい『だけ』なのではないか？」という反応を時折うけます。これがどれくらい可能なのか、今回は考えてみたいと思います。

まず、時空は空間が $D-1$ 次元で時間が 1 次元の $\mathbb{R}^D$ だとしましょう。時刻一定面 $t = t_0$ における量子状態を指定するヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ があり、最低エネルギー状態を指定する状態 $|\Omega\rangle \in \mathcal{H}$ を真空と呼びます。時空の点 $x \in \mathbb{R}^D$ における場の演算子をたとえば $\phi(x)$ と書きます。場の量子論において基本的な量は場の演算子の積を真空で挟んだ

$$\langle\Omega|\,\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\,|\Omega\rangle \tag{1}$$

で、$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle$ と略記し、真空期待値もしくは n 点関数と呼びます。場が何種類もある場合はそれらを $\phi_1, \phi_2, \ldots, \psi_1, \psi_2, \ldots$ などと書き $\langle\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\psi_1(x_3)\rangle$ などを考察することになります。

素粒子実験での散乱確率、物性実験での伝導度など、測定にかかる量は n 点関数そのものではないですが、n 点関数から標準的な手法で計算できるものです。また、場の量子論と数学との関係においては n 点関数そのものが数学的に興味深いふるまいを示すことがしばしばあります。そのため、場の量子論においては、状態のなすヒルベルト空間、場の演算子、そして n 点関数を定義もしくは計算することが、数学のためにも、物理のためにも、第一の目的になります。

1　相互作用のない場

まずは相互作用のない場、すなわち自由場について見てみましょう。この場合は、物理屋向けの教科書に書いてあることはすべて厳密に実行できると言って問題ありません。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ およびそこに作用する $\phi(x)$ は具体的に構成でき、n 点関数 $\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\rangle$ も明示的に書き下せます。ここで、この n 点関数が $i \neq j$ に対して x_i と x_j が接近する極限 $x_i \to x_j$ で発散するというのは重要な性質です。このため、$\phi(x)$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の有界作用素どころか非有界作用素にもならず、作用素値超関数としなければなりません。

自由場においては、勝手な n 点関数が

$$\begin{aligned}\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle&\\ = \langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle\,&\langle\phi(x_3)\phi(x_4)\rangle\\ + \langle\phi(x_1)\phi(x_3)\rangle\,&\langle\phi(x_2)\phi(x_4)\rangle\end{aligned} \tag{2}$$

などのように、2 点関数の積の和に分解されます。数学的には、n 点関数がこの性質を満たすときに自由場と呼ぶ、と言ったほうがよいでしょう。さて、式 (2) は、変数 $X_1, X_2, \ldots, X_k$ がガウス分布をしているときの期待値

$$\begin{aligned}\langle X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_n}\rangle := Z^{-1}\int X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_n}&\\ \times\exp\Big(-\sum_{a,b=1}^{k} M_{ab}X_aX_b\Big)\prod_{a=1}^{k} dX_a&\end{aligned} \tag{3}$$

の満たす関係式

$$\langle X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}\rangle = \langle X_{i_1}X_{i_2}\rangle\langle X_{i_3}X_{i_4}\rangle + \langle X_{i_1}X_{i_3}\rangle\langle X_{i_2}X_{i_4}\rangle \tag{4}$$

の無限次元版だと思うことができます。ただしここで M_{ab} は正定値の行列で、Z は $\langle 1\rangle = 1$ となるようにするための定数です。そのため、物理の教科書では場の量子論の n 点関数も

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle := Z^{-1}\int \phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\exp(iS[\phi])\mathcal{D}\phi \tag{5}$$

と経路積分を用いて「書く」ことがなされます。ここで $S[\phi]$ は古典的な場の配位 $\phi:\mathbb{R}^D\to\mathbb{R}$ に対して値 $S[\phi]\in\mathbb{R}$ を与えるもので、この理論の作用と呼ばれ、$\mathcal{D}\phi$ は古典的な場の配位の集合の上の何らかの適切な「測度」である、とするわけで、ガウス積分と同様 $S[\phi]$ が ϕ についての二次式である場合に自由場の理論になります。ここで「書く」「測度」などにカギ括弧をつけたのは、そのままでは数学的に厳密化できないからですが、自由場の場合は何とか意味付けをすることは不可能ではありません。

2　相互作用のある場

次に相互作用のある場合を考えましょう。相互作用の強さを g と書き、$g=0$ で自由場に帰着するものとします。理論物理の基本的手法は $g\neq 0$ の結果を自由場からの変形で求めようというものです。この際、ヒルベルト空間に作用する場の演算子の変形を直接考える方法と、n 点関数の変形を考える方法と、大きく二つの手法があります。前者に関しては進展は主に非相対論的な場合に対してのもので、そちらに関してはたとえば [1] をご覧ください。今回は後者の手法を、g に関するテーラー展開を用いて経路積分表示で議論したいと思います。すなわち

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle = \langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g^k C_k(x_1,\ldots,x_n) \tag{6}$$

として、関数 C_k を決定しようというわけです。ただし、添え字 $_0$ は自由場での値をあらわすとします。この方法を摂動展開と呼びます。

2.1　展開の収束性の問題

さて、ガウス積分のアナロジーからはじめましょう。多項式 $P(X)$ に対して

$$\langle P(X)\rangle := Z^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} P(X)e^{-X^2-gX^4}dX \tag{7}$$

を考えます。ただし Z は $\langle 1\rangle = 1$ であるように

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^2-gX^4}dX \tag{8}$$

と定めます。これを g についてテーラー展開して

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-1}(-g)^n X^{4n}e^{-X^2}dX \tag{9}$$

$$\stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-1}(-g)^n Z_0\langle X^{4n}\rangle_0 \tag{10}$$

とします。ここで二行目の等号の上に疑問符をつけたのは無限和と積分を無批判に交換したからです。また、

$$\langle P(X)\rangle_0 := Z_0^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} P(X)e^{-X^2}dX \tag{11}$$

は「自由場」のときの値で単なるガウス積分での計算です。

これで Z が g のテーラー展開として求まります、と言いたいところですが、そう簡単には

問屋がおろしません。というのは、(10) をさらに具体的に計算して

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-g)^n}{n!} \sqrt{\pi} \frac{(4n-1)!!}{4^n} \tag{12}$$

として収束半径を調べるとゼロだからです。

展開 (10) が全然収束しなさそうであることは次のようにもわかります。もし収束半径が $R > 0$ だとすると、$|g| < R$ である限り g が負でも積分 (8) が可能となります。しかし、被積分関数は g が負ですと $|X|$ が大きくなる領域で急激に増加しますので、積分は定義されません。これは何かおかしいわけです。

さて、一変数の積分 (8) はこの積分自体を数学的に厳密に扱うことができ、Z は $g \geqq 0$ の関数として意味を持ち、収束しない級数 (10) は g の関数である Z の漸近展開という意味がつきます。しかし場の量子論の場合は経路積分の一般論がなく、我々は (10) に相当する級数しか計算できないことがほとんどです。そして、その級数が計算できたとしても、その収束半径は上と同様の理由でゼロだと思われています。

2.2　展開係数の発散の問題

それでも物理学者はこの級数を果敢に計算しようとします。いま

$$S_{\underline{g}}[\phi] = S_0[\phi] - \underline{g} \int O(x) d\mathrm{vol} \tag{13}$$

とします、ただし $S_0[\phi]$ は自由場の作用、$d\mathrm{vol}$ は $\mathbb{R}^D$ の体積要素とし、$O(x)$ は相互作用をあらわす演算子です。また、$\underline{g}$ は相互作用のパラメタ g と区別する必要が生じるので下線をつけました。これを用いて

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle = Z^{-1} \times \int \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \exp(iS_{\underline{g}}[\phi]) \mathcal{D}\phi \tag{14}$$

とすれば式 (10) と同様に形式的に

$$Z \overset{?}{=} \sum_n (n!)^{-1} (-i\underline{g})^n Z_0 c_n \tag{15}$$

が得られます。ただしここで

$$c_n \overset{?}{=} \langle \left(\int O(x) d\mathrm{vol} \right)^n \rangle_0 \tag{16}$$

は自由場における n 点関数です、と言いたくなりますが、この時点で大きな問題があります。たとえば c_2 は

$$= \iint \langle O(x_1) O(x_2) \rangle_0 \, d\mathrm{vol}(x_1) d\mathrm{vol}(x_2) \tag{17}$$

ですが、1 節で述べたように 2 点関数 $\langle O(x_1) O(x_2) \rangle$ は $x_1 \to x_2$ で発散します。このため、式 (17) ではたとえば x_1 と x_2 は距離 ϵ 以内に近付き過ぎないように積分領域を制限する必要があります。これを「紫外発散の正則化 (regularization)」といいます。ここで紫外発散とは、紫外線の波長が短いことからくる用語で、単に距離が短い領域からくる発散のことをさします。

いったん正則化してしまえば (14) も計算できますが全体に ϵ の依存性が余計に現れ、

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n); \epsilon \rangle = \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underline{g}^k \underline{C}_k(x_1, \ldots, x_n; \epsilon) \tag{18}$$

となります。しかしもちろん正則化を取りさる極限 $\epsilon \to 0$ では展開係数 $\underline{C}_k$ は発散します。このため、

$$\underline{g} = \sum_{k=1}^{\infty} g^k a_k(\epsilon) \tag{19}$$

という級数形を (18) に代入し g で展開しな

おし

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n);\epsilon\rangle = \langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g^k C_k(x_1,\ldots,x_n;\epsilon) \quad (20)$$

とします。「g の繰り込み (renormalization)」というのは関数 $a_k(\epsilon)$ を適切に取ることですべての n に対して一斉に $C_k(x_1,\ldots,x_n;\epsilon)$ の $\epsilon\to 0$ の極限が存在するようにすることです。このように $a_k(\epsilon)$ を選べることはまったく自明ではありません。

実際には、積分領域が無限に広いことからくる赤外発散の正則化や、$\phi(x)$ の大きさの繰り込み、質量次元が $O(x)$ より低い他の相互作用項の導入など、その他の手続きも同時に行う必要がありますが、煩雑になるため省略してあります。

また、このような $a_k(\epsilon)$ の選び方は一つあるならば一意ではありえません。それを見るため、定数 b_k を選び、$g=\sum_{k=1}^{\infty} b_k\tilde{g}^k$ とし式 (19) に代入すれば

$$\underline{g} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}^k \tilde{a}_k(\epsilon) \quad (21)$$

によって $\tilde{a}_k(\epsilon)$ が定まりますが、このとき同様に (20) から

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n);\epsilon\rangle = \langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}^k \tilde{C}_{R,k}(x_1,\ldots,x_n;\epsilon) \quad (22)$$

となり、$\tilde{C}_{R,k}$ は $\epsilon\to 0$ で極限が存在することがわかります。この g と $\tilde{g}$ のあいだの変換を有限繰り込みと呼びます。

場の量子論の摂動的繰り込み理論の基本的な結果は「適切な時空の次元 D と相互作用 $O(x)$ に対しては、正則化し繰り込みを行うことができ、その結果は有限繰り込みの自由度を除いて一意である」というものです。この手続きのもうすこし詳細まで踏み込んだ解説はたとえば [2] をご覧ください。

もともとの作用に現れる $\underline{g}$ を裸の結合定数、最終的な n 点関数の展開係数として現れる g や $\tilde{g}$ のことを繰り込まれた結合定数といいます。g や $\tilde{g}$ を固定したうえで $\epsilon\to 0$ とすると $\underline{g}$ は発散しますので、古い教科書では「裸の結合定数に無限大を適切に入れて計算途中に出てくる無限大を相殺するようにすることで計算結果を有限にする」という説明がなされることがよくありました。しかし 1970 年代にウィルソンなどにより導入された繰り込み理論のより現代的な解釈では、紫外正則化のパラメタ ϵ は理論を計測する長さスケールを指定するものであるという、より積極的な意味付けがなされますので、無限大が計算途中に現れるとするのは一面的な見方です。

2.3　摂動的繰り込み理論の数学

ここまで読んだ方は、手続きの煩雑さと、発散をあたかも隠すようなその場しのぎの方法に驚くでしょう。これはこの手法をはじめて学ぶ物理学者にとっても同じです。しかも、このようにして多大な労力を払ってテーラー級数を求めても、それはそもそも収束しないと思われているわけです。しかし、展開を最初の数項で打ち切って、数値的に計算すると、実験結果と良く合うというのが非常に興味深いところです。その意味で、この計算手続は何らかの真実をついているであろうと思うことになります。

正則化と繰り込みの組み合わせによってテーラー級数を求める手続きは、物理の側では 1970 年代後半にはゲージ理論の場合も含めて確立していました。収束はしなくとも、形式的べき級数としては問題はなく、数学的な記述ができる

はずです。これを実行したのがコステロの [3] で、2010 年の結果です。そこには「自由場の n 点関数の形式的べき級数による変形で、ある一連の自然な性質をみたすものは、繰り込み理論によって得られる形式的べき級数に限る」ということがいくつかのケースで証明されており、物理学者が編みだした手法がある意味必然的な結果であることが示されています。

さて、一変数の積分の場合は g に関する形式的べき級数 (10) は $g \geqq 0$ で定義された関数 (8) の漸近展開になっていたわけでした。対応して、場の量子論において繰り込み理論の結果得られた形式的べき級数 (20) は、何かの形式的でない関数のべき展開になっているのかという大問題があります。このためには、有限の g における経路積分の収束を何らかの方法で示す必要があります。これが構成的場の量子論という分野で、次回以降でまた触れる機会があるでしょう。

●参考文献

[1] 新井朝雄「量子場の数理解析」『数学』69 巻 3 号 (2017) pp.255-279.

[2] 数学書房『この定理が美しい』所収、大栗博司「くりこみ可能性の判定条件」pp.48–58, 2009 年

[3] K. Costello, *Renormalization and Effective Field Theory* AMS, 2011.

第 4 回 — 場の量子論のユークリッド化について

今回は相対論的な場の量子論を扱ううえで、数学的にも物理においても避けて通れないユークリッド化の問題を取り上げたいと思います。相対論以前は、時間座標 t と空間座標 x, y, z はまったく異なるものでした。特殊相対論になると、 $x^2+y^2+z^2-t^2$ という 2 次式を一定に保つような線形変換、すなわちローレンツ変換のもとで理論が不変であることが要求されます。ここで、簡単のため、光速 c が 1 となるような単位系を取ることにしました。空間 3 次元の回転とは $x^2+y^2+z^2$ という 2 次式を一定に保つような線形変換でしたから、それの時間方向 t を含む拡張になっているわけですが、空間と時間が完全に等価なのではなく、t^2 の前の符号だけが x^2, y^2, z^2 の前の符号と異なります。

これをみると、何らかの意味で $t=i\tau$ とおくことによって、$x^2+y^2+z^2+\tau^2$ という 2 次式を保つようなユークリッド的な 4 次元の回転が作用するような枠組みを考えたくなります。2 次式 $x^2+y^2+z^2-t^2$ を基本にする時空はローレンツ的、2 次式 $x^2+y^2+z^2+\tau^2$ を基本にする時空はユークリッド的と呼ばれ、$t=i\tau$ とする操作は場の量子論の文脈ではユークリッド化、また、歴史的経緯によりウィック回転と呼ばれます。回転というのは、もっと一般に $t=e^{i\alpha}\tau$ という状況を考えて、τ は実のまま止めておき、α を 0 から $\pi/2$ まで回すというふうに考えることがあるからです。

現実に我々の住む時空はローレンツ的ですが、数学においては純粋に興味に従って進めばよいので、ユークリッド的な時空における場の量子論をとりあえず数学的に考えてみてもよいわけです。しかし、それだけに留まらず、ローレンツ的な場の量子論を考察するためにもウィック回転でユークリッド的な時空にうつった場の量子論を調べることがほぼ必須であることが知られています。今回はこれについて説明することにしましょう。

また、連載第 2 回では場の量子論の種々の数学的定式化について歴史的に眺めましたが、ローレンツ的な場の量子論を記述しようとするかユークリッド的な場の量子論を記述しようとするかが定式化によって異なります。そのため、個別の数学的定式化を議論するまえに、この区別についてみておく必要があるわけです。

1　具体例におけるユークリッド化

4 次元ですと変数が多く大変なので、空間 1 次元時間 1 次元の合計 2 次元の場合を考えます。空間座標を x, 時間座標を t としましょう。古典的に光速で右向きに動く粒子は、時刻 $t=0$ に原点 $x=0$ にあったとすると時空の $x-t=0$ なる直線上を動きます。場の量子論における一番簡単な対応物は自由な実右向きフェルミオン場 $\psi(x,t)$ で、その 2 点関数は

$$\langle\psi(x,t)\psi(x',t')\rangle=\frac{1}{(x-x')-(t-t')} \qquad (1)$$

となります。これは、非常にいい加減には、(x',t') にフェルミオン ψ があった場合に、(x,t) にそのフェルミオンが現れる量子力学的な可能性を記述します。簡単のため $(x',t')=$

$(0,0)$ とすると

$$\langle\psi(x,t)\psi(0,0)\rangle = \frac{1}{x-t} \tag{2}$$

となり、2 点関数が $x-t=0$ という 1 次元の直線上で特異性を持つことがわかります。

「自由な」「実」「右向き」「フェルミオン」という言葉を順に説明しましょう。自由というのは前回説明したように n 点関数が 2 点関数から定まるということでした。実というのは場の n 点関数が実になるということで、右向きというのは $(x,t)=(0,0)$ を出発したとして $x-t=0$ にのみ特異性を持ち $x+t=0$ に特異性を持たないため、左に動く成分を持たず右にのみ動いていることを意味します。最後に、フェルミオンというのは、式 (1) が二つの ψ の入れ替えについて反対称であることを意味します。二つの場の入れ替えのもとで 2 点関数が対称であるような場はボゾン場と呼ばれます。

さて、2 点関数が具体的にわかっていますから、解析接続をして t を複素数に拡張することができます。さらに τ を実数として $t=i\tau$ と書き t を純虚数に制限し、$\psi_E(x,\tau):=\psi(x,i\tau)$ と定義しましょう。ここで下付きの添え字 $_E$ はユークリッド的 (Euclidean) の頭文字です。すると

$$\langle\psi_E(x,\tau)\psi_E(0,0)\rangle = \frac{1}{x-i\tau} \tag{3}$$

となります。これは (x,τ) 平面上で原点以外に特異性を持たなくなりました。一方、もとの場 ψ は実でローレンツ的な時空における 2 点関数 (1) は実でしたが、この 2 点関数 (3) は複素数です。しかし、τ を反転、すなわち $\tau\to-\tau$ とすると値が複素共役になります。もともとの関数 (1) が実数でしたから、$t=i\tau$ としたときの (3) における「実でなさ」は $i\tau$ の i のみから来るわけで、$+\tau\leftrightarrow-\tau$ とするのは $+i\leftrightarrow-i$ とすること、すなわち複素共役を取ることと等価になる、というわけです。これは「反転のもとでの複素共役性」と思うことができます。

それだけでなく、式 (3) はさらに「反転のもとでの正値性」を持ちます。具体的には、$f(x,\tau)$ を $\tau>0$ のみでノンゼロで $\tau\leqq 0$ ではゼロとなるような複素関数とすると、

$$\begin{aligned} 0 \leqq \mathrm{Im} \int f(x,\tau)\overline{f(x',-\tau')}\times& \\ \langle\psi_E(x,\tau)\psi_E(x',\tau')\rangle dx d\tau dx' d\tau'& \end{aligned} \tag{4}$$

を満たします。ここで Im は続く式の虚部を意味します。(証明してみたい読者の方は、x と x' に関してフーリエ変換をしてみてください。)

この反転正値性は、もとの式 (1) が定義をさかのぼれば $|\Omega\rangle\in\mathcal{H}$ を系の最低エネルギー状態に対応する状態ベクトルとして

$$\langle\psi(x,t)\psi(x',t')\rangle = \langle\Omega|\psi(x,t)\psi(x',t')|\Omega\rangle \tag{5}$$

とあらわされ、系のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の正定値内積を用いて定められていることが背後にあります。

系のヒルベルト空間の内積は、観測確率を記述しますので、正定値でないと負の確率が生じてしまい意味を持ちません。ただし、ゲージ理論においても弦理論においても、計算途中で正定値でない内積を持つような理論を考えることがあります。正定値な内積を持つヒルベルト空間に基づいた場の量子論であることを強調するためには、そのような場の量子論はユニタリである、といいます。

2　公理論的場の量子論におけるユークリッド化

ここまでの話は、公理論的場の量子論におけるユークリッド化の一般論の非常に簡単な例

になっています。ここで、慣習上、公理論的場の量子論というのは、場の量子論を記述する数学的な公理系を探すという取り組み全般ではなく、平らな $\mathbb{R}^d$ における場の量子論の n 点関数の満たすべき性質を厳密に調べるという分野をさします。

さて、ローレンツ的な $\mathbb{R}^d$ 上の場の量子論を、ウィック回転によって、ユークリッド的な $\mathbb{R}^d$ 上の場の量子論にうつすこと、またその逆は一般的に可能でしょうか。ローレンツ的な $\mathbb{R}^d$ におけるユニタリな場の量子論の n 点関数の満たすべき基本性質を列挙したものはワイトマンの公理系と呼ばれます。一方、そこからウィック回転で得られるユークリッド的な $\mathbb{R}^d$ 上の n 点関数の満たすべき公理系をオスターワルダー–シュレーダーの公理系と呼びます。上で具体例についてみたように、この公理系には反転正値性が含まれます。

公理論的場の量子論の基本的結果の一つによると、ワイトマンの公理系を満たす n 点関数が与えられれば、ウィック回転をしてオスターワルダー–シュレーダーの公理系を満たす n 点関数を構成することが可能で、またその逆の操作も可能です。もっと大ざっぱにいうと、ローレンツ的な場の量子論を考察することとユークリッド的な場の量子論を考察することは等価である、ということです。ですので、数学的に場の量子論を考察する際には、そのアプローチの特質に従って、ローレンツ的であれユークリッド的であれ、どちらかを考えればよいことになります。

3　経路積分と時空のユークリッド化

また、時空のユークリッド化は場の量子論の経路積分を用いた解析にも必須のステップです。これをみておきます。2 次元空間の自由無質量実スカラー場 $\phi(x,t)$ を考えましょう。理論物理の議論によると、ローレンツ的な場合の経路積分の重みは

$$\exp\left(i\iint\left((\frac{\partial\phi}{\partial t})^2-(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2\right)dxdt\right) \tag{6}$$

と取るべきです。一方、ユークリッド的な時空でのスカラー場を $\phi_E(x,\tau)$ とすると、経路積分の重みは

$$\exp\left(-\iint\left((\frac{\partial\phi_E}{\partial \tau})^2+(\frac{\partial\phi_E}{\partial x})^2\right)dxd\tau\right) \tag{7}$$

と取るべきであることが知られています。経路積分では、勝手な関数 $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ のなす関数空間の上で、上記の重みを掛けた上で積分せよという、数学的には無茶なことを要求するのですが、それをなんとか数学的に正当化したいわけです。

関数空間上の積分でなく一変数の積分の場合を考えることにすると、ローレンツ的な場合の (6) は積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X)e^{iX^2}dX \tag{8}$$

に、ユークリッド的な場合の (7) は積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X)e^{-X^2}dX \tag{9}$$

に対応します。ここで期待値を取る $f(X)$ 自体は多項式などを想定しています。積分 (9) の場合は、$|X|$ が大きくなると重み e^{-X^2} が急激に小さくなるので、積分は問題なく収束します。

一方、積分 (8) の場合は、$|X|$ が大きくなると重み e^{iX^2} は複素数の偏角が激しく振動しますが絶対値自体は 1 のまま一定です。このような状況でも、広義積分として積分を定義することは可能で、特にこのような形の指数関数の肩が純虚になるような積分は振動積分として広く研究されています。とはいえ、積分 (8) の扱いのほうが積分 (9) よりはるかに微妙であるのはお判りいただけるでしょう。

経路積分では、自由場のみならず、相互作用を含む場も扱いたいところです。その場合、ユークリッド的、ガウス積分的な (7) のほうならば、数学的になんとかきちんと扱えるケースがありますが、ローレンツ的、振動積分的な (6) のほうを直接扱うのは全然できていません。このため、経路積分による場の量子論のアプローチを数学的に正当化しようとすると、現状ではユークリッド的な場の量子論を考えざるを得ないわけです。

4　曲がった時空とユークリッド化

さて、公理論的場の量子論がはじめて導入された前世紀半ばでは、場の量子論は平らな $\mathbb{R}^d$ で考えることが多かったのですが、我々の住んでいるこの宇宙は膨張していることがわかっていますから、そもそも現実の時空は平らでありません。また、物性研究のために場の量子論を使う際にも、外部からの操作に対する対象系の応答を理論的に記述する際の一つの方法として、平らでない空間で対象系を考察するという方法があります。ですので、現代的観点からは場の量子論はもっと一般的な曲がった時空で考えてよいし、その必要があります。

いつものように簡単のため 2 次元の場合を考えましょう。曲がった時空においては、各点の近傍で局所的に座標 x, t および計量

$$A(dx)^2 + B(dx)(dt) + C(dt)^2 \qquad (10)$$

が与えられています。ただし、A, B, C は (x,t) の関数です。計量になじみのない方は、dx, dt を微小量として、微小に離れた 2 点 (x,t) と $(x+dx, t+dt)$ の間の距離の 2 乗がこの式で与えられていると思ってくだされればよいと思います。ある点で局所座標を適切に (X,T) に取り直し

$$(dX)^2 + (dT)^2 \qquad (11)$$

にできるならばその点での計量をユークリッド的、

$$(dX)^2 - (dT)^2 \qquad (12)$$

にできるならばその点での計量をローレンツ的、といいます。

そのような曲がった時空での場の量子論についての研究は、膨張している宇宙初期への応用のためのローレンツ的な曲がった時空におけるもの、および、数学的にユークリッド的な曲がった時空のトポロジカルな場の量子論を考えるものが、独立に前世紀からなされてはいます。しかし、平らな時空におけるローレンツ的な場の量子論とユークリッド的な場の量子論の対応が曲がった時空上でどうなるのか、という非常に自然な疑問に関しては、長らくほとんど議論されていませんでした。

まず、ローレンツ的な場の量子論のユニタリ性はユークリッド的な場の量子論では反転正値性として現れるわけですが、この反転正値性を曲がった空間の場合に満足に定式化したのは 2016 年にプレプリントが出た [1] がはじめてだと思います。

また、曲がった時空においてはウィック回転 $t = i\tau$ の意味付けは平らな時空の場合より

さらに困難です。そもそも、与えられた実多様体を、複素に拡張する必要があるのでしょうか? 必要があるとして、それは可能なのでしょうか?

一つの解決策は、多様体はそのままにしておいて、計量 (10) において関数 A, B, C が複素数になることを許すことです。たとえば平らな $\mathbb{R}^2$ において、複素数値計量を

$$(dx)^2 + e^{2i\alpha}(dt)^2 \tag{13}$$

と取ると、$\alpha = 0$ でユークリッド的、$\alpha = \pi/2$ でローレンツ的となりますから、ウィック回転は複素計量のなかのパラメタ α の回転だと思うことができます。

すると基本的な問題は、場の量子論を考える際に多様体上の複素計量でどのようなものを許すべきか、ということになります。この問題に一つの自然な解答を与えたのが 2021 年の [2] です。

これらのような、場の量子論を数学的に考察するうえで非常に基本的な問題が、ごく数年前まで手付かずで残されていたというのは驚くべきことです。平らな時空でのローレンツ的場の量子論とユークリッド的場の量子論の等価性に相当する曲がった時空の場合の等価性は、文献 [2] に議論はありますが、充分なものではありません。まだまだ、研究の必要がある基礎的なことがたくさんあるわけです。

●参考文献

[1] D. Freed, M. J. Hopkins, *Reflection positivity and invertible topological phases*, Geomety & Topology 25 (2021) 1165–1330, https://arxiv.org/abs/1604.06527

[2] M. Kontsevich, G. Segal, *Wick rotation and the positivity of energy in quantum field theory*, Quarterly Journal of Mathematics 72 (2021) 673–699, https://arxiv.org/abs/2105.10161

第 5 回 — 場の量子論の二つの基本定理

今回のテーマは前回に引き続き公理論的場の量子論です。これは、平らな時空における相対論的な場の量子論のふるまいを基本原理から数学的に調べる分野でした。この分野で 1960 年代には得られていた基本的かつ重要な二つの定理、スピン統計性定理と CPT 定理について説明をしたいと思います。

1　スピン統計性定理

まずはスピン統計性定理からはじめましょう。

1.1　スピノルとは

座標が (x, y, z) であるような平らな 3 次元空間を考えます。3 次元空間の回転は $x^2+y^2+z^2$ を保つような線形変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1}$$

で向きを保つ、すなわち

$$\det M = 1 \tag{2}$$

をみたすものです。3 次元空間の回転操作全体は群をなし、$SO(3)$ と書くのが標準的です。

いま唐突ですが 2×2 のエルミート行列 $A = A^\dagger$ で $\operatorname{tr} A = 0$ であるものを考えます。そのような行列は実数 x, y, z を用いてかならず

$$A = \begin{pmatrix} z & x+iy \\ x-iy & -z \end{pmatrix} \tag{3}$$

と書けます。このとき $\det A = -(x^2+y^2+z^2)$ です。

さらに唐突ですが、U を 2×2 で行列式が 1 のユニタリ行列、すなわち $\mathbf{1}$ を単位行列として条件 $UU^\dagger = \mathbf{1}$ と $\det U = 1$ を満たすものとします。このような行列たちも群をなし、$SU(2)$ と書きます。

このとき $A' = UAU^\dagger$ と定めると、A' はエルミートで $\operatorname{tr} A' = 0$ であることがすぐに確認できます。よって適切な実数 x', y', z' を用いて

$$A' = \begin{pmatrix} z' & x'+iy' \\ x'-iy' & -z' \end{pmatrix} \tag{4}$$

と書け、(x, y, z) から (x', y', z') への変換は線形ですが、さらに

$$\begin{aligned} \det A' &= \det(UAU^\dagger) \\ &= \det U \det A \det U^\dagger = \det A \end{aligned} \tag{5}$$

ですから

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{6}$$

がわかりました。すなわち、$A \mapsto A' = UAU^\dagger$ はある 3 次元回転 $M(U)$ を定めます。より数学的には、これで $SU(2) \to SO(3)$ なる準同型ができました。

3 次元空間の回転 $M(U)$ にともなって、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} := U \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{7}$$

という変換をうける 2 次元ベクトルをスピノルと呼びます。いま

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \tag{8}$$

を考え、上の説明どおり $A' = UAU^\dagger$ を計算すると、

$$x' + iy' = e^{2i\theta}(x+iy), \qquad z' = z \tag{9}$$

となり、z 軸周りの回転で xy 平面を角度 2θ だけ回すことがわかります。θ を 0 から π まで回すと、xy 平面は角度 0 からはじまって 2π まで回り、元に戻ります。しかし、U はこの時点ではまだ

$$U(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

ですから、

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{11}$$

となり、元に戻りません。(u', v') が元に戻るには $\theta = 2\pi$ とする必要があり、そのときは xy 平面のほうは $2\theta = 4\pi$ 回って二周していることになります。スピノルは、xy 平面を 360° 回したときは -1 倍され、720° 回してはじめて元に戻るような不思議な量です。このような不思議なものが実在するというのがこの世の面白いところで、たとえば電子の波動関数はスピノルであることが知られています。

1.2　統計性とは

次に統計性を説明しましょう。場の量子論においては粒子は $\phi(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x})$ などの場の演算子であらわされます。ここで $\mathbf{x} = (x, y, z, t)$ として時空の座標をまとめてあらわしました。種類 ϕ の粒子が 2 箇所 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ に一つずつある状態は

$$\phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2) \tag{12}$$

であらわされます。場の量子論では同一種類の粒子、たとえば光子などに、一番目の光子、二番目の光子、と名前を付けて区別することはできず、粒子を入れ替えても同じ状態に対応します。量子力学的には定数倍だけ異なる状態が同等だとみなされますから、何か定数 α があって

$$\phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2) = \alpha\phi(\mathbf{x}_2)\phi(\mathbf{x}_1) \tag{13}$$

のはずです。この操作を二度繰り返すと $\alpha^2 = 1$ ですから、$\alpha = \pm 1$ となり、

$$\phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2) = \pm\phi(\mathbf{x}_2)\phi(\mathbf{x}_1) \tag{14}$$

がわかりました。符号が $+$ の場合をボーズ統計、それに従う場および粒子をボゾンと呼び、符号が $-$ の場合をフェルミ統計、それに従う場および粒子をフェルミオンと呼びます。(時空が 3 次元以下の場合は上記の議論には穴があり、α として ± 1 以外の一般の絶対値 1 の複素数があらわれうることが知られています。そのようなものを分数統計、それに従う場および粒子はエニオンと呼びます。しかし今回はそのような場合は考えないことにします。) 現実世界では光子はボゾンで電子はフェルミオンです。

多少ごまかしが入ったいい加減な議論になりますが、上式で $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ とすると、フェルミオンの場合 $\phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_1) = -\phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_1)$ から $\phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_1) = 0$ がわかりますね。これは同一のフェルミオンが同じ場所にいられないという、パウリの排他原理をあらわすものです。原子内での電子は K 殻、L 殻などに順番に下から一定個数ずつ入っていく、などと習った記憶があるかたもいるかと思いますが、パウリの排他原理があるためにそれぞれの軌道には有限個の電子しか入らないわけで、電子がフェルミオンでなくボゾンならば原子の性質もまったく異なったものになり、我々はとうてい存在できません。

1.3　スピン統計性定理とは

これだけ準備すると、スピン統計性定理の主張を述べられます。すなわち、「ユニタリな相対論的な場の量子論において、ある場がフェルミオンであるのは、空間の 360° 回転にとも

なってその場が -1 倍され $720°$ 回転ではじめて元に戻るスピノル的な場であるときであり、またそのときに限る」というものです。量子力学および場の量子論が 20 世紀前半に建設されたとき、種々の場がスピノル的であるかどうか、と、種々の場がフェルミオンとボゾンのどちらに従うか、というのは別個に実験的に決定されていったのですが、そこから実験事実として「スピノル的であるかどうか」と「フェルミオンであるかどうか」が同じ条件であることがわかってきました。この実験事実が相対論的場の量子論の一般論から従う、というのがスピン統計性定理です。電子が $360°$ 回転では元に戻らず、$720°$ 回転ではじめて元に戻るというのが、電子がフェルミオンであることにつながり、それがパウリ排他律を導き、そのおかげで原子がいまの性質をもち、我々の存在にまでつながっているというのは、とても面白いことだと思います。

2　CPT 定理

次に CPT 定理の主張をみていきましょう。

2.1　空間反転操作 (P 変換) とは

まず P 変換とは、時空の座標 (x, y, z, t) を空間の一方向だけ、たとえば $x \mapsto x' := -x$ と反転させる作用のことです。空間反転は parity 変換とも呼ばれるため、頭文字をとって P 変換と言います。P 変換は対応する変換行列の行列式が -1 であり $+1$ でないため回転操作ではありません。

鏡をのぞいたときは、鏡と直交する方向だけが反転されてみえます。系の運動方程式の任意の解に対して、それを鏡でうつして空間反転した運動もやはり系の運動方程式の解である場合、系は P 変換で対称だ、と言います。

2.2　時間反転操作 (T 変換) とは

次に、T 変換とは、時空の座標 (x, y, z, t) のうち時間の方向だけを $t \mapsto t' := -t$ と反転させる作用のことです。物理系が T 変換で対称だ、というのは、系の運動方程式の任意の解に対して、上記の変換を作用させたものもやはり系の運動方程式の解になる場合のことを言いますが、量子力学の場合はさらに考慮すべき点があります。

状態 $|\psi\rangle$ の時間発展はシュレーディンガー方程式

$$i\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \tag{15}$$

で定まります、ただしここで $\hat{H}$ は系のハミルトニアンで、簡単のため $|\psi\rangle$ はその固有状態で E をその固有値としました。物理的には E は系のエネルギーをあらわします。

すると、$|\psi\rangle$ の時間依存性は e^{-iEt} という形になりますが、これは偶然 E がゼロのとき以外は $t \mapsto t' := -t$ で不変になりようがありません。そこで、量子力学における T 変換は、$t \mapsto t' := -t$ とした上で、さらに状態ベクトルにおいて虚数単位 i の符号も反転させる複素共役操作 $i \mapsto -i$ をすること、とします。こうすれば、勝手なエネルギー E での時間反転操作で系が不変になりうるわけです。

2.3　荷電共役操作 (C 変換) とは

最後に C 変換とは、粒子の電荷が $+q$ ならばそれを $-q$ にすることです。場の量子論においては、電磁気は絶対値 1 の複素数 z たちが積のもとでつくる群 $U(1)$ から生じ、ある場 ϕ の電荷が q であるというのは群の元 $z \in U(1)$ が場 ϕ に $\phi \mapsto \phi' := z^q\phi$ と作用することに

翻訳されます。すると、電荷の符号を変えるというのは、たとえば場 ϕ の複素共役をとれば $\bar{z} = z^{-1}$ ですから $\overline{\phi} \mapsto \overline{\phi}' := z^{-q}\overline{\phi}$ となり実現することができます。

このように荷電 (charge) を複素共役 (conjugate) にすることから C 変換と略称します。C 変換のもとで理論が対称だというのは、その理論の運動方程式の任意の解に C 変換を施したものがまた運動方程式の解であることを言います。

2.4　CPT 変換とは

CPT 定理とは、「勝手なユニタリな相対論的な場の量子論において、C 変換、P 変換、T 変換を一斉に行う CPT 変換を定義することが可能で、その変換のもとで理論は対称である」というものです。ある粒子に対して CPT 変換をしたものを反粒子と呼びますので、CPT 定理はまず勝手な粒子に対して反粒子の存在を保証します。その上で、CPT 定理は、系の運動方程式の任意の解に対して、粒子をすべて対応する反粒子に取り換え、かつ、すべての粒子の時空座標 (x, y, z, t) を $(x, y, -z, -t)$ に取り換えると、またそれは系の運動方程式の解になっている、という主張です。相対論的な場の量子論で、C, P, T 変換のそれぞれに対しては対称でないようなものは実際存在し、この世を記述する素粒子論の標準模型もその例の一つです。それでも、三つの変換を同時に行うことは可能で、そのもとで理論は対称になっています。

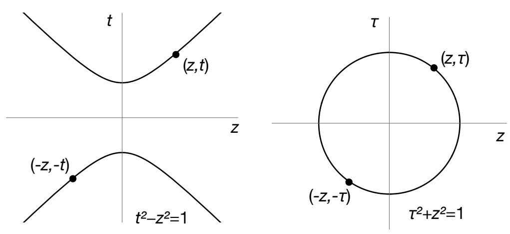
ちなみに、昔の文献では C, P, T の順番は固定しておらず、著名な論文や本でも PCT 変換や CTP 変換と書いてあるものがありますが、最近は慣習的に順序は CPT に固定されたようです。この定理も、場の量子論の初期の進展の際、どの相対論的場の量子論でも成り立っていたことから、帰納的に予想され、後に一般に証明されたものです。

3　定理の証明の概要

さて、公理論的場の量子論における証明ですが、詳細をきちんと説明することはこの小文ではとうていできません。詳細は文献 [1] の第二章などを参照していただくことにして、非常におおざっぱなところを説明しましょう。

スピン統計性定理のほうは、ユニタリ性から 2 点関数 $\langle\phi(\mathbf{x}_1)\overline{\phi(\mathbf{x}_2)}\rangle$ がノンゼロであることがわかり、次に相対論不変性からこの 2 点関数が $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ に対して偶関数か奇関数かを決定することができます。ここの計算が場 ϕ がスピノル的かどうかに依存するところです。さて再度ユニタリ性を使ってもうすこし調べると、今度は $\phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2)$ が $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ に対して偶か奇かを決定することができるのですが、これは $\phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2) = \pm\phi(\mathbf{x}_2)\phi(\mathbf{x}_1)$ の符号すなわち統計性を決定した、ということになるわけです。

次に CPT 定理のほうですが、P 変換と T 変換を組み合わせると (z, t) を $(-z, -t)$ にうつすことになります。これは相対論で重要な $t^2 - z^2$ を保ちつつ連続的に行うことはできません。しかし、$t = i\tau$ としてユークリッド化すれば $\tau^2 + z^2$ を保ちつつ連続的に (z, τ) を $(-z, -\tau)$ にすることができます。以下の $t^2 - z^2 = 1$ と $\tau^2 + z^2 = 1$ の図をご覧下さい:



そのため、CPT 定理を示すには、まずは $t = i\tau$

として時空をユークリッド化したところに解析接続した上で、連続的に (z, τ) を $(-z, -\tau)$ まで 180° 回転させ、また解析接続で τ から t に戻ってくればよい、というわけです。この際、量子力学における時間反転では複素共役を取る必要があるため、解析接続の操作にともなって荷電共役変換を取ることになり、結局 CPT 変換をしたことになる、という筋書きです。

おしまいになりましたが、物理学の発展のなかで、スピン統計性定理および CPT 定理がどのように見出されてきたかという素晴らしい解説が [2] にありますので、興味のある方にはぜひお勧めしたいと思います。現実の物理の素養を必要とする本で、数理物理屋の私にも理解が難しい所がいろいろとあるのではありますが。

●参考文献

[1] R. Haag, *Local Quantum Physics*, 2nd ed., Springer 1996

[2] 朝永振一郎『スピンはめぐる』新版、みすず書房, 2008

第 6 回 — 代数的場の量子論について

前回は公理論的場の量子論と、その初期の主要結果である二つの一般的な定理、スピン統計性定理と CPT 定理についてお話しました。そこでは平らな d 次元の時空 $\mathbb{R}^d$ での場の演算子 ϕ の n 点関数

$$\langle \phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2)\cdots\phi(\mathbf{x}_n)\rangle \tag{1}$$

が満たすべき自然な条件を書き下し公理として認めた上で、そこから一般的な帰結を導出したわけです。これらの結果が導出された 1960 年代に、また少し異なった場の量子論の定式化が現れました。それを代数的場の量子論と呼びます。今回はそれについてお話しましょう。

1　場の作用素のなす代数

まず、2 点関数 $\langle \phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2)\rangle$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 内の最低エネルギー状態 $|\Omega\rangle$ と場の演算子 $\phi(\mathbf{x})$ を用いて

$$\langle \phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2)\rangle := \langle\Omega|\,\phi(\mathbf{x}_1)\phi(\mathbf{x}_2)\,|\Omega\rangle \tag{2}$$

と定められるべきものでした。ϕ が実場だとすると、これはベクトル $\phi(\mathbf{x}_1)\,|\Omega\rangle$ と $\phi(\mathbf{x}_2)\,|\Omega\rangle$ の内積のはずです。しかし第 3 回で述べたように、2 点関数は $\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2$ で発散しますから、ベクトル $\phi(\mathbf{x}_1)\,|\Omega\rangle$ は自分自身との内積が定義できないことになります。これは $\phi(\mathbf{x})$ が数学的な意味での $\mathcal{H}$ の上の作用素でないということです。

そこで $f_{\mathbf{x_0}}(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x_0}$ の近くでのみノンゼロな滑らかな関数として、$\phi(\mathbf{x})$ を $f_{\mathbf{x_0}}(\mathbf{x})$ でならした

$$\phi[f_{\mathbf{x}_0}] := \int f_{\mathbf{x_0}}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d^d\mathbf{x} \tag{3}$$

を $\phi(\mathbf{x}_0)$ のかわりに考えます。図 1 をご覧ください。

図 1　演算子 $\phi(\mathbf{x})$ を $\mathbf{x}_0$ のまわりでならす。

すると

$$\langle\Omega|\,\phi[f_{\mathbf{x}_1}]\phi[f_{\mathbf{x}_2}]\,|\Omega\rangle \tag{4}$$

はならしたおかげで $\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2$ で発散せず、$\phi[f_{\mathbf{x}_0}]$ は $\mathcal{H}$ 上の作用素になることが期待されます。

ただ、このようにして得られた $\phi[f_{\mathbf{x}_0}]$ も一粒子の量子力学の位置作用素 X や運動量作用素 P などと同様、非有界作用素と呼ばれるまだ扱いの難しいもので、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の勝手なベクトルに掛けられるわけではありません。勝手なベクトルに作用できるものは有界作用素と呼ばれるものですが、非有界作用素から、対応するもっと扱いの簡便な有界作用素を作る方法が標準的にあります。というわけで、数学的には、$\phi[f_{\mathbf{x}_0}]$ を細工して得られる有界作用素を考えるのが扱いやすいでしょう。

一般に、時空の領域 $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ に対して、$\mathcal{O}$ の中でのみノンゼロな関数 $f(\mathbf{x})$ で $\phi(\mathbf{x})$ をならした $\phi[f]$ を細工して作った有界作用素を、「領域 $\mathcal{O}$ に局所的な場の作用素」と呼び、それらが生成する代数を適切に完備化したものを $A(\mathcal{O})$ と書きましょう。

二つの領域 $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ が $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ を満たすなら、$A(\mathcal{O}) \subset A(\mathcal{O}')$ となります。また、$\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$

があるローレンツ変換 Λ でうつりあうなら、ヒルベルト空間へのローレンツ変換 Λ の作用 $U(\Lambda)$ によって $A(\mathcal{O})$ は $A(\mathcal{O}')$ にうつるはずです。このようにして、$A(\mathcal{O})$ たちの満たすと期待される性質を書き下すことができます。

一般に、時空の領域 $\mathcal{O}$ に対する代数 $A(\mathcal{O})$ の割り当て $\mathcal{O} \mapsto A(\mathcal{O})$ が存在するとして、さらに上記のような期待される性質を公理系として課し、その実例や性質を調べるというのが、代数的場の量子論と呼ばれる分野です。代数的とは言いますが、関数解析的な側面の強い分野です。1960 年代に荒木、ハーク、カストラーによって導入され、長い研究の歴史があり深い結果もありますが、残念なことに定式化の比較的すぐ後に物理の側での場の量子論の研究との交流が途絶えてしまいました。2010 年代ごろからまたようやく交流が再開してきたかなというのが筆者の勝手な感覚です。以下、代数的場の量子論の結果のいろいろあるなかで、二つ筆者に印象深いものを紹介したいと思います。

2　$A(\mathcal{O})$ の「型」について

以下、領域 $\mathcal{O}$ に局所的な作用素のなす代数 $A(\mathcal{O})$ は適切な位相を選んで完備化しておくことにしましょう。一つの方法をとると、その結果はフォン・ノイマン環というものになります。それは、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に作用する有界作用素の集合 A で、和と積およびエルミート共役のもとで閉じており、弱位相と呼ばれる位相で完備なものとして定義されます。フォン・ノイマンは数学の多数の分野に重要な寄与を残したことで有名ですが、量子力学の数学的な枠組みを与えたのも彼です。その研究の延長で定義されたのがこのフォン・ノイマン環です。

一般のフォン・ノイマン環 A は標準的に因子環と呼ばれるものに分解できますので、$A(\mathcal{O})$ も因子環であると通常仮定します。そうすると、フォン・ノイマン環に関する問題として、因子環はどう分類されるか、次に、代数的場の量子論において、$A(\mathcal{O})$ はどのような因子環であるか、というのが基本的な問題になります。

因子環は I 型、II 型、III 型に大きく分けられます。I 型は有限もしくは無限次元のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の上の有界作用素全体のなすフォン・ノイマン環で、量子力学では無意識に使っているような、もっとも普通のものです。作用素 a のトレース $\mathrm{tr}(a)$ は無限次元の場合は勝手な a に対して定義されているわけではありませんが、考察に有用です。たとえば $\mathcal{H}$ の部分空間 V への射影作用素 P は $P^2 = P$ を満たしますが、このとき $\mathrm{tr}\, P = \dim V$ となります。ただし、tr の値としては ∞ も許すこととしました。まとめると、射影 P に対して $\mathrm{tr}\, P$ は整数か ∞ になります。II 型の因子環はトレースによく似た性質を持つ関数 $\mathrm{tr} : A \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を定義できますが、射影 P に対する $\mathrm{tr}\, P$ が整数に限らず連続的な値を取り得ます。おしまいに、III 型はトレースによく似た関数がまったく定義できない場合であり、フォン・ノイマン環の研究の初期ではもっとも謎にみちたものでした。

では、代数的場の量子論において、なるべく簡単な形の $\mathcal{O}$ を取ったとして、 $A(\mathcal{O})$ は、どの型のフォン・ノイマン環でしょうか。これは 1964 年に荒木が [1] で自由場の場合に具体的な計算を行い、III 型であることを示しました。その後の研究により、緩い仮定のもとで、局所的な作用素の代数 $A(\mathcal{O})$ はいつでも III 型であることが示されています。

フォン・ノイマン環の研究の初期にもっとも謎だったものが、場の量子論で自然に現れるというのは、不思議なことだと思います。また、III 型因子環のさらなる解析に重要な役割を果

たした冨田-竹崎理論が、無限系の統計力学の数学的定式化とも深く関わっているなど、興味深い点がいろいろあります。

3　場の量子論の対称性について

また、代数的場の量子論では、場の量子論の対称性に関する深い考察も得られています。一例を紹介しましょう。

3.1　$\mathbb{Z}_2$ 対称性の場合

いま、 $\mathbb{Z}_2 = \{e, g\}$ を $g^2 = e$ なる群とし、2 次元時空 (x, t) における場の量子論が $\mathbb{Z}_2$ 対称性を持つとします。例としては、場 ϕ に g を $\phi \mapsto -\phi$ と作用させるものなどを考えることができます。ここで、g による変換を空間の $x > 0$ の部分にのみ作用させることを考えましょう。図 2 を参照ください。

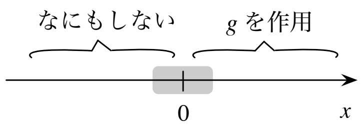


図 2　対称性変換 g を $x > 0$ の部分のみに作用させる。$x \sim 0$ のところでは微妙なことが起こる。

領域 $\mathcal{O}$ が $x > 0$ に含まれていれば $A(\mathcal{O})$ には g が作用し、領域 $\mathcal{O}$ が $x < 0$ に含まれていれば $A(\mathcal{O})$ には何もしません。しかし原点 0 では不連続な作用をしないといけませんので、$\mathcal{O}$ が原点 0 を含む場合は $A(\mathcal{O})$ には非自明な自己同型 $\rho : A(\mathcal{O}) \to A(\mathcal{O})$ が引き起こされます。

さて、$x > 0$ の部分にのみ g を作用させる変換を二回行いましょう。$g^2 = e$ は単位元ですから、$\mathcal{O}$ が原点を含まないならば $A(\mathcal{O})$ には自明な作用しか引き起こしません。しかし $\mathcal{O}$ が原点を含む場合は、上記 ρ を二回繰り返すことになります。原点では不連続な操作をしますので、ρ^2 は完全に自明ではありませんが、原点に局所的なユニタリ変換 $u \in A(\mathcal{O})$ の影響が残ると考えられます。すなわち、$\mathcal{O}$ が原点を含むと、勝手な $a \in A(\mathcal{O})$ に対し

$$\rho^2(a) = uau^{-1} \tag{5}$$

となるでしょう。以上は直感的な解説に留まりましたが、代数的場の量子論の枠組みを使うと、以上のような性質を満たす自己同型 $\rho : A(\mathcal{O}) \to A(\mathcal{O})$ とユニタリな元 $u \in A(\mathcal{O})$ の存在を示せます。

ここで $\rho^3(a)$ を二通りの方法で評価します。まず

$$\rho^3(a) = \rho^2(\rho(a)) = u\rho(a)u^{-1} \tag{6}$$

であり、また

$$\begin{aligned} \rho^3(a) &= \rho(\rho^2(a)) = \rho(uau^{-1}) \\ &= \rho(u)\rho(a)\rho(u)^{-1} \end{aligned} \tag{7}$$

です。ここで ρ が自己同型であることを使いました。上の二つの式 (6)、(7) の右辺は勝手な a で同じである必要があります。たとえば何か実数 c があり

$$\rho(u) = cu \tag{8}$$

であればこの条件が満たされますが、こうでなければならないことも $A(\mathcal{O})$ が因子環であるという仮定から導けます。さて、式 (8) の両辺に ρ を作用させると、$\rho^2(u) = c\rho(u)$ です。一方、式 (5) より $\rho^2(u) = uuu^{-1} = u$ ですから、

$$u = c\rho(u) \tag{9}$$

がわかりました。式 (8) と (9) を比較すると、$c = \pm 1$ が結論されます。

まとめると、2 次元で $\mathbb{Z}_2$ 対称性を持つ場の量子論は、$x > 0$ なる半空間のみで $\mathbb{Z}_2$ 変換を行うという原点 $x = 0$ で不連続な操作を調べることで得られる符号 c が、 $+1$ であるか -1 であるかによって、2 種類に大別することができるわけです。

3.2　一般の有限群 G の場合

一般の有限群 G を対称性として持つ場合を考えましょう。以下 $g, h, k, \ell \in G$ を群の元とします。まず図 1 のように $g \in G$ を $x > 0$ でのみ作用させることを考えると、$\mathcal{O}$ を原点を含む領域とすると自己同型 $\rho_g : A(\mathcal{O}) \to A(\mathcal{O})$ が定義され、

$$\rho_g \rho_h(a) = u_{g,h} \rho_{gh}(a)(u_{g,h})^{-1} \tag{10}$$

によって $u_{g,h} \in A(\mathcal{O})$ なるユニタリが定まり、$\rho_g \rho_h \rho_k(a)$ を二通りの方法で計算することで

$$u_{g,hk} \rho_g(u_{h,k}) = c_{g,h,k} u_{gh,k} u_{g,h} \tag{11}$$

によって絶対値 1 の複素数 $c_{g,h,k}$ が定まります。これの両辺に再度 ρ_ℓ を作用させることで、関係式

$$c_{h,k,\ell} c_{g,hk,\ell} c_{g,h,k} = c_{gh,k,l} c_{g,h,kl} \tag{12}$$

が得られますが、これはちょうど $c_{g,h,k}$ が 3 次の群コホモロジー $H^3(G, U(1))$ の元を定めるということを意味します。

まとめると、 2 次元で G 対称性をもつ場の量子論は、 $x > 0$ なる半空間でのみ G 作用を行うことを詳細に調べて得られる 3 次の群コホモロジー $H^3(G, U(1))$ の元で大別できる、ということがわかりました。

この事実をこの形で明確に述べたのは 2004 年のミュガーの論文 [2] がはじめではないかと思います。しかしながら、因子環 A に $g \in G$ に対して自己同型 $\rho_g \colon A \to A$ が定まっている場合に、そこから 3 次の群コホモロジーの元が取り出せる事実も、また、局所代数 $A(\mathcal{O})$ への対称性の作用から自己同型 ρ を構成する手法にしても、双方とも 1970 年代までさかのぼるものです。ですので、この結果は代数的場の量子論の中では長らく実質的に知られており、伝統的な結果と言ってよいかと思います。

3.3　理論物理側での場の量子論の研究との関連

理論物理側での場の量子論の研究では、対称性 G に対してその量子異常 (quantum anomaly) と呼ばれるものが重要な役割を果たします。量子異常は G が連続群の場合に実験結果を説明するための研究から素粒子理論で 1970 年代にみつかった現象で、一般論も 1980 年代前半までには出来上がっていましたが、G が離散群の場合の一般論が整備されたのは比較的最近で、2010 年代の物性理論でのトポロジカル物性の研究が契機になりました。

結果、2 次元の場の量子論において有限群 G の対称性の量子異常は 3 次の群コホモロジー $H^3(G, U(1))$ で分類される、ということが確立し、具体的に与えられた場の量子論に対して対応する群コホモロジーの元を決定する方法はエルス-ナヤクの 2014 年の論文 [3] で与えられています。

興味深いのは、エルス-ナヤクの論文で行われている操作は上記 3.1 節と 3.2 節で説明したものほぼそのものだということです。彼らは物性理論が専門なため、連続な時空ではなく結晶のモデルとなる格子点上に自由度の存在する格子模型を考えているという違いこそありますが、空間に局在したユニタリ変換 $u_{g,h}$ の存在を導いたあとはまったく同じです。しかし、ミュガーの論文 [2] には量子異常という言葉は

まったく現れず、エルス-ナヤクの論文 [3] には代数的場の量子論への言及はまったくありません。

代数的場の量子論の側では、2 次元の場の量子論の有限群 G 対称性の量子異常について、理論物理側にくらべて随分前から知っていたということになります。それに留まらず、代数的場の量子論の側では、有限群対称性の拡張として、群を拡張した概念である融合圏 (fusion category) を対称性として持つような場の量子論が存在しうることが長らく知られています。ところが、そのような場の量子論の理論物理側での研究はこの十年弱ではじまったばかりです。

一方で、理論物理側の量子異常の一般論によると、3 次元の場の量子論の有限群 G 対称性の量子異常は 4 次の群コホモロジー $H^4(G, U(1))$ で与えられると思われていますが、対応する議論は代数的場の量子論の側ではまだなされていないようです。

お互いが相手の分野から学ぶことが、まだまだいろいろありそうです。

●参考文献

[1] H. Araki, *Type of von Neumann algebra associated with free field*, Progress of Theoretical Physics, **32** (1964) 956–965, https://doi.org/10.1143/PTP.32.956

[2] M. Müger, *Conformal orbifold theories and braided crossed G-categories*, Communications in Mathematical Physics **260** (2005) 727-762, https://arxiv.org/abs/math.QA/0403322

[3] D. V. Else and C. Nayak, *Classifying symmetry-protected topological phases through the anomalous action of the symmetry on the edge*, Phys. Rev. B **90** (2014)235137, https://arxiv.org/abs/1409.5436

第 7 回 — 構成的場の量子論について

これまで第 4 回、第 5 回、第 6 回にわたって、平らな時空 $\mathbb{R}^d$ における場の量子論がどのような公理系を満たすか、また、その公理系からどのような結果が導かれるかを考えてきました。今回は、そのような公理系を満たす場の量子論が実際に数学的に存在するのか、という問題を考えましょう。

相互作用のない場の量子論のことを自由場の理論というのでした。自明な場の量子論とも呼ばれます。数学的には、n 点関数

$$\langle \phi_1(\mathbf{x}_1)\phi_2(\mathbf{x}_2)\cdots\phi_n(\mathbf{x}_n)\rangle \tag{1}$$

が 2 点関数を用いた標準的な方法で書きあらわせるというのが自由場である条件になります。公理系はある意味これらの自由場が満たす性質を抽象して得られたものですので、自由場は公理系を満たします。

また、第 3 回では、理論物理での場の量子論で相互作用がどう扱われるかを説明しました。相互作用の大きさを g と書いた場合、理論物理では n 点関数を g のテーラー展開で求めます。その計算には複雑だが標準的な手法があり、その結果として得られた g のテーラー級数は収束はしないが漸近展開と呼ばれるものになります。相互作用の強さ g が小さい場合は、展開の最初の数項を取って g に実数を代入して評価すると、実験とよく合うのでした。ですから、テーラー展開の収束性を度外視する、数学的には、g の形式的べき級数として n 点関数を考えることを許すように公理系をすこし緩めると、それを満たす場の量子論はたくさんあるわけです。

ですので、今回の問題は、形式的べき級数でない、きちんとした関数を n 点関数として持つような、自由場でない場の量子論を数学的に厳密に作れ、というもので、これを追究する分野を構成的場の量子論といいます。この分野も歴史の長いものですから、いろいろな結果があります。十年ほど前までの進展に関してはレビュー論文 [1] がよくまとまっていますので、詳細に関してはそちらをご参照いただくことにして、概要を説明しましょう。

1　ϕ^4 模型: 経路積分の離散化

さて、自由場でないような n 点関数をどうやって構成するか、ということですが、時空が 2 次元の場合は、「解ける模型」「可積分模型」などと呼ばれて、非自明な n 点関数を特殊関数などを用いてかなり具体的に構成することが可能な場合があります。その場合は、先に理論物理での考察から n 点関数が知られているので、あとはそれが公理系を満たすことを確認すればよいわけです。

より一般的には、n 点関数を先に具体的に知っているわけではありませんので、より複雑な考察が必要になります。d 次元の実スカラー場の場合は、$\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ なる関数全体の上での積分、いわゆる経路積分を用いて n 点関数を定めようとします。その前に通常の積分の定義についてふりかえってみましょう。

いま $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ を与えられた関数として、積分

$$\int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

を定義するには、リーマン積分、ルベーグ積分

などいろいろな方法があります。非常に安直には区間 $[a,b]$ を N 等分し離散化して

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(a+\frac{b-a}{N}(k-\frac{1}{2})\right) \tag{3}$$

を考えます。これは収束することもありますし収束しないこともあります。適切に収束するならばそれを積分値とするわけです。

この話を思い出した上で、場の量子論の経路積分を考えます。d 次元で $\phi(\mathbf{x})^4$ という相互作用がある理論の場合は、ユークリッド時空における n 点関数を

$$\langle\phi_1(\mathbf{x}_1)\cdots\phi_n(\mathbf{x}_n)\rangle \sim \int \phi_1(\mathbf{x}_1)\cdots\phi_n(\mathbf{x}_n)\exp(-S[\phi])[D\phi] \tag{4}$$

という式で定義しようとします。ただし

$$S[\phi]=\int\Big(\sum_{i=1}^{d}\left|\frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|^2 + m^2\phi(\mathbf{x})^2+g\phi(\mathbf{x})^4\Big)d^d\mathbf{x} \tag{5}$$

は実スカラー場 ϕ すなわち $\phi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ という関数に対する理論の作用で、$\int\cdots[D\phi]$ はそのようなすべての実スカラー場について積分することをあらわすとしましょう。ここで m は場の質量、g は結合定数に対応するパラメタです。式 (4) のような表式を歴史的経緯から経路積分と呼びます。

しかし実スカラー場全体の空間は無限次元ですから、上記経路積分 (4) を数学的に厳密に定義するのは困難な問題です。そのため、時空 $\mathbb{R}^d$ をまず $i=1,\ldots,d$ に対して $-L<x_i<L$ と有限区間に制限します。さらに、それぞれの方向を N 等分して離散化し、スカラー場 $\phi(\mathbf{x})$ の引数 $\mathbf{x}$ が

$$\mathbf{x}=(-L+\epsilon(k_1-\frac{1}{2}),\ldots,-L+\epsilon(k_d-\frac{1}{2})) \tag{6}$$

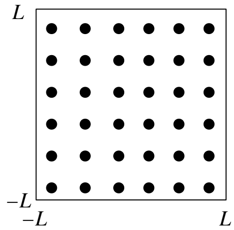


図 1　2 次元時空 $\mathbb{R}^2$ の離散化、$N=6$ の場合。

という格子点を取る場合だけ考えます。ただし、

$$k_i=1,2,\ldots,N \tag{7}$$

とし、$\epsilon=2L/N$ は隣り合う格子点の間の距離です。$d=2$ の場合は図 1 をご覧ください。そうして、理論の作用 (5) を離散化して

$$\tilde{S}_{m,g}[\phi]=\epsilon^d\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{k_2=1}^{N}\cdots\sum_{k_d=1}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{d}\left|\frac{\phi(\mathbf{x}+\epsilon\mathbf{e}_i)-\phi(\mathbf{x})}{\epsilon}\right|^2 + m^2\phi(\mathbf{x})^2+g\phi(\mathbf{x})^4\Big) \tag{8}$$

を考えます。ここで上式中では $\mathbf{x}$ は (6) で与えられ、2 行目においては、 $\mathbf{e}_i$ は第 i 成分だけが 1 で他の成分は 0 のベクトルとします。関係

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x_i}=\lim_{\epsilon\to0}\frac{\phi(\mathbf{x}+\epsilon\mathbf{e}_i)-\phi(\mathbf{x})}{\epsilon} \tag{9}$$

を思い出すと、(8) が (5) の離散化になっていることがわかります。

すると、$\tilde{S}_{m,g}[\phi]$ にはスカラー場 ϕ は $\mathbf{x}$ が (6) で与えられる点での値 $\phi_{k_1,k_2,\ldots,k_d}$ としてしか現れません。ですから経路積分 (4) の近似として

$$\langle\phi(\mathbf{x}_1)\cdots\phi(\mathbf{x}_n)\rangle_{L,N;Z,c;m,g}:=Z^{-1}c^n\times \int\phi(\mathbf{x}_1)\cdots\phi(\mathbf{x}_n)\exp(-\tilde{S}_{m,g}[\phi])\times \prod_{k_1=1}^{N}\prod_{k_2=1}^{N}\cdots\prod_{k_d=1}^{N}d\phi_{k_1,\ldots,k_n} \tag{10}$$

という有限次元の多重積分を考えることができます。ここで後で必要になるので Z, c という係数を導入しました。この表式 (10) は、L と N を固定している限り、積分すべき変数の数は N^d と非常にたくさんありますが、単なる有限次元の多重積分です。$g > 0$ としておけば、場の値 $\phi_{k_1,\ldots,k_n}$ が大きい領域では被積分関数が指数関数的に小さくなるため、収束性に問題はなく、数学的にきちんと定義されています。

残る問題は、$N \to \infty$ として格子間隔を無限小にし、$L \to \infty$ として積分領域を無限に広くした場合に、式 (10) が収束するか、ということになります。

普通の関数の積分 (2) を定義する際にまず離散化して (3) を考え、その極限が存在するならばその極限を積分値としましたが、場の量子論を定める経路積分 (4) の場合も、まず離散化して (10) を考え、その極限が存在するならばその極限を積分値としよう、というわけです。

2　ϕ^4 模型: 極限操作

さて、離散化した経路積分 (10) ですが、まずは $g = 0$ の場合を考えましょう。この場合、(10) の被積分関数である指数関数の肩の $\tilde{S}_{m,g=0}[\phi]$ は複雑ではありますが単なる二次式です。そのため、(10) は巨大ではありますがガウス積分で、問題なく実行することができます。そこで、Z を $\langle 1 \rangle = 1$ となるように N, L に依存して選べば、$c = 1$ として、$N \to \infty$, $L \to \infty$ の極限を取ることが可能で、n 点関数が求まります。結果は自由な実スカラー場になります。

では、$g > 0$ の場合はどうでしょうか。まずは L を固定して考えます。普通の関数の積分を離散化した場合 (3) は、関数 $f(x)$ 自体は固定して $N \to \infty$ の極限をとるのですが、経路積分 (10) の場合はそれでは発散してしまうことがわかります。そのため、被積分関数である $\exp(-\tilde{S}_{m,g}[\phi])$ の m および g が N に依存することを許し、

$$\langle \phi(\mathbf{x}_1) \cdots \phi(\mathbf{x}_n) \rangle_{L,N;Z(N),c(N);m(N),g(N)} \tag{11}$$

の $N \to \infty$ の極限を考察します。そうして、$L \to \infty$ の極限をとります。

ここからの解析の詳細はたとえば [2] をご参照いただくことにし、結果だけ述べますが、興味深いことに時空の次元 d に依存します。1980 年代までに得られていた結果は、$d \leqq 3$ だと極限が非自明になるようにできるが、$d \geqq 5$ だと極限は自明になってしまう、というものです。我々の住む時空である $d = 4$ の場合にも極限は自明になるであろうという傍証が長らくありましたが、この問題に決着がついたのはようやく 2021 年の [3] によるものです。著者のひとりはこれに関連する業績で 2022 年のフィールズ賞を受けました。

3　格子上の場の量子論

以上説明してきた方法は、時空を格子点で近似しますので、理論物理学者の間では格子上の場の量子論として知られています。それについて、すこし説明しましょう。

第 3 回では、理論物理では g に関するテーラー展開を計算した上で、最初の数項を取り、そこに g の値を代入して実験結果と比較すると書きました。たとえていえば、

$$\frac{1}{1+g} = 1 - g + g^2 - g^3 + \cdots \tag{12}$$

において、$g = 0.01$ の場合に、$1/(1+g) \sim 0.99$ を求める際に左辺を最初の 2 項を取り $1 - g$ に g を代入して計算しているようなものです。しかしこのような計算は $g = 1$ に対しては使

えません。$1/(1+g) = 1/2$ は $1-g=0$ とひどく異なった値になってしまいます。クォークを結びつけて陽子や中性子を作っている「強い力」に関しては、同様にそもそも代入すべき g の値が大きく、テーラー展開の最初の数項を取ってそこに代入することでは近似が悪過ぎます。

そこで、実験結果と比較するための数値を得るために、「強い力」を記述する場の量子論を、格子上の場の量子論として考えます。すなわち、時空を格子点で近似した上で、(10) のような非常に多変数ではあるが有限次元の積分であらわし、それをスーパーコンピューター上で数値積分し、その上で、離散化の程度を決める N と、時空のサイズを決める L をそれぞれできる限り大きく取って、精度を良くしようとするわけです。このアプローチは 1970 年代からはじまり、理論の進展とスーパーコンピューターの高速化によって徐々に精度が改善し、2010 年代にはついに計算結果が実験データとの良い一致を示すようになっています。

ここで数学の立場から注意しないといけないことは、「強い力」を記述する場の量子論の場合は、(10) に対応する離散化された経路積分はもちろん存在するものの、それの $N\to\infty$, $L\to\infty$ での極限の存在は数学的にはまだ証明されていないということです。実際、これを証明して、さらに 2 点関数 $\langle\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})\rangle$ が $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ に関して指数関数的に減少することを示せというのは、今世紀初頭にクレイ数学研究所がそれぞれ百万ドルの懸賞金を掛けた七つのミレニアム問題の一つ [4] で、いまだに進展のほとんどみられない大未解決問題なのです。

はじめにあげた普通の関数の積分 (2) でたとえていえば、それを離散和にしたもの (3) は知られており、数値計算すると実験結果とよく合うので積分の理論が存在するはずではあるが、リーマン積分の一般論どころか個別の場合の収束性すら確定していないという状況です。これだけ技術の進歩した 2024 年において、何と場の量子論の数学の未熟なことでしょう、もしくは、場の量子論の数学の何と難しいことでしょうか。

4　テーラー展開による解析との対応

さて、ϕ^4 理論では、時空の次元 d が $d\leqq 3$ なら非自明な極限が存在し、$d\geqq 5$ なら自明な極限しか存在せず、$d=4$ は微妙ではあったが自明な極限しか存在しないという結論になった、と述べました。この次元への依存性は、g に関するテーラー展開による解析にも現れます。その立場からは、相互作用のタイプが「超繰り込み可能」「繰り込み可能」「繰り込み不可能」の三つにまず大きく分けられ、さらに、繰り込み可能なものが漸近自由なものと赤外自由なものの二つに分けられます。ϕ^4 理論の場合は、テーラー展開の立場からは $d\leqq 3$ だと超繰り込み可能、$d=4$ で繰り込み可能で赤外自由、$d\geqq 5$ だと繰り込み不可能だ、ということが比較的簡単にわかります。一方、「強い力」の場合は、数学的には非可換ゲージ理論と呼ばれるもので、こちらをテーラー展開によって解析すると、$d\leqq 3$ で超繰り込み可能、$d=4$ で繰り込み可能で漸近自由、$d\geqq 5$ で繰り込み不可能になることがわかります。

非常に大まかに言うならば、一般にテーラー展開の立場で超繰り込み可能であるか繰り込み可能で漸近自由であれば構成的な場の量子論の立場で非自明な極限が存在し、それ以外の場合は極限は自明になってしまうだろうと思われています。表 1 をご覧くださいこの一般的な対

テーラー展開による解析	→	構成的場の量子論
超繰り込み可能	→	極限は非自明
繰り込み可能、漸近自由	→	極限は非自明
繰り込み可能、赤外自由	→	極限は自明
繰り込み不可能	→	極限は自明

表 1　テーラー展開による解析 (左) と格子近似を用いた構成的場の量子論 (右) の期待される対応

応が証明される日が来れば良いのですが、そのためには、やる気のある若い人の参加が必要でしょう。この記事を読んだどなたかが発奮してくださるのを期待します。

●参考文献

[1] S. J. Summers, *A Perspective on Constructive Quantum Field Theory*. https://arxiv.org/abs/1203.3991

[2] 原隆『構成的場の理論–古典的な問題の紹介』、数学書房「数理物理の最前線 – 量子場の数理」2016 所収

[3] M. Aizenman, H. Duminil-Copin, *Marginal triviality of the scaling limits of critical 4D Ising and* ϕ_4^4 *models*, Ann. Math. **194** (2021) 163–235. https://arxiv.org/abs/1912.07973

[4] Clay Mathmeatics Institute, *Yang-Mills & The Mass gap*, https://www.claymath.org/millennium/yang-mills-the-maths-gap/

第 8 回 — 超多時間理論と位相的場の量子論について

この連載では、前回まで場の量子論を考える際にいつも平らな時空 $\mathbb{R}^d$ を考え、さらに主に n 点関数

$$\langle\phi(\mathbf{x}_1)\cdots\phi(\mathbf{x}_n)\rangle \tag{1}$$

に注目して考察を進めてきました。場の量子論も量子力学の枠組みに従いますから、ヒルベルト空間をなす状態空間 $\mathcal{H}$ とその元である状態ベクトル $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ があり、時空の点 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ における場の演算子 $\phi(\mathbf{x})$ は数学的には $\mathcal{H}$ 上の作用素値超関数として捉えられるのでした。特に、最低エネルギー状態をあらわす状態ベクトルを $|\Omega\rangle$ と書くと、式 (1) の n 点関数は $\langle\Omega|\,\phi(\mathbf{x}_1)\cdots\phi(\mathbf{x}_n)\,|\Omega\rangle$ と書けるのでした。

しかしながら、これまでの連載では、状態ベクトル $|\Psi\rangle$ やそれらのなす状態空間 $\mathcal{H}$ についてはほとんど議論してきませんでした。これはこの連載に限ったことではなく、理論物理側で相対論的場の量子論をこの四半世紀以内に標準的に学んだ場合、自由場の理論の $|\Psi\rangle$ と $\mathcal{H}$ について学んだあとは、ひたすら n 点関数に関する議論が続き、$|\Psi\rangle$ と $\mathcal{H}$ は背後に隠れてしまいます。今回は、相対論的場の量子論における状態ベクトル $|\Psi\rangle$ とそれらのなすヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ について考察したいと思います。

1　場の量子論と相対論的変換性

1.1　量子力学の復習

まずは量子力学の一般的枠組みを復習しましょう。系の状態ベクトル全体はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ をなし、時刻 t におけるその系の状態は状態ベクトル $|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$ で指定されます。時刻 t_1 における状態 $|\psi(t_1)\rangle$ と時刻 t_2 における状態 $|\psi(t_2)\rangle$ とはユニタリ作用素 $U(t_2,t_1)$ を用いて

$$|\psi(t_2)\rangle = U(t_2,t_1)\,|\psi(t_1)\rangle \tag{2}$$

と関係がつきます。ですので、量子状態 $|\psi(t_1)\rangle$ と時間発展のさせ方 $U(t_2,t_1)$ がわかれば、後の時刻の量子状態 $|\psi(t_2)\rangle$ がわかるというわけでした。

1.2　相対性理論との相性

以上の記述が相対性理論との相性が非常に悪いことはすぐに想像できるでしょう。相対性理論では動いている座標系から観測すると時刻 t と位置 x はローレンツ変換によって混ざってしまいます。たとえば観測者 2 が観測者 1 に対して x 方向に動いているとし、観測者 1 と 2 からみた座標を (t,x) および (t',x') と区別をすると、$\alpha^2-\beta^2=1$ を満たす実数 α,β を用いて

$$t'=\alpha t-\beta x,\qquad x'=-\beta t+\alpha x \tag{3}$$

となります。ただし光速が $c=1$ となる単位系を使いました。図 1 に二人の観測者に対応する時刻一定超平面を示しましたのでご覧ください。

すると、観測者 1 が状態を時刻 $t=t_0$ で指定する際は、$\mathbb{R}^d$ 内の $t=t_0$ で定まる超平面 S_{t_0} 上で状態を指定しており、観測者 2 が状態を時刻 $t'=t'_0$ で指定する際は、$\mathbb{R}^d$ 内の $t'=t'_0$ で定まる超平面 $S'_{t'_0}$ 上で状態を指定しているわけです。ですから、相対論的場の量子

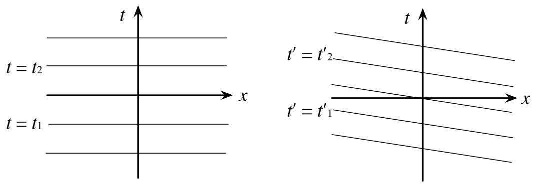


図 1　一定時刻超平面は観測者に依存する。

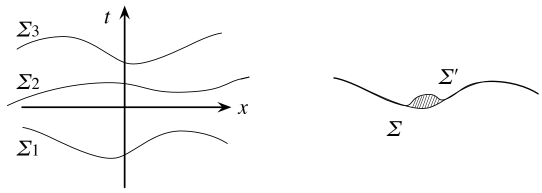


図 2　状態空間として勝手な空間的超曲面を許した場合。

論に対しては状態空間 $\mathcal{H}$ がひとつあるというのは十分でなく、観測者に応じて、その観測者にとっての時刻 t で定まる空間的超平面 S_t に対し、その上の量子状態を指定する状態ベクトルのなす状態空間 $\mathcal{H}[S_t]$ があるとする必要があります。

すると、時間発展は、一人目の観測者に対しては

$$U(t_2, t_1)\colon \mathcal{H}[S_{t_1}] \to \mathcal{H}[S_{t_2}] \tag{4}$$

というユニタリ演算子であらわされ、二人目の観測者に対しては

$$U'(t'_2, t'_1)\colon \mathcal{H}[S'_{t'_1}] \to \mathcal{H}[S'_{t'_2}] \tag{5}$$

というユニタリ演算子であらわされることになります。理論を完全に記述するためには、さらに、$\mathcal{H}[S_t]$ と $\mathcal{H}[S'_{t'}]$ の関係も理解する必要があります。

1.3　超多時間理論

相対論的場の量子論の発展の初期では、この問題に現れているような、理論の相対論的な変換性の理解に大きな困難がありました。これを乗り越えたのがちょうど第二次大戦中から直後にかけてのファインマン、シュウィンガー、朝永の三人の独立な仕事です。その中でもシュウィンガーと朝永は、上記の状態空間 $\mathcal{H}$ の超平面 S への依存性の問題を直接にとりあげ、理論の定式化のみならず、実際に計算を遂行するにおいても、さらなる拡張が有用であることを指摘しました [1, 2]。

まず、空間的超「平」面 S に対して状態空間がある、と考えるだけでなく、勝手な空間的超「曲」面 Σ に対して状態空間 $\mathcal{H}[\Sigma]$ があるとします。図 2 をご参照ください。

次に、二つの空間的超曲面 Σ_1, Σ_2 に対して対応する状態空間をつなぐ拡張された時間発展演算子

$$U(\Sigma_2, \Sigma_1) : \mathcal{H}[\Sigma_1] \to \mathcal{H}[\Sigma_2] \tag{6}$$

があるとします。すると、超曲面 Σ_1 での状態ベクトル $|\Psi_1\rangle \in \mathcal{H}[\Sigma_1]$ に対して超曲面 Σ_2 での状態ベクトル $|\Psi_2\rangle \in \mathcal{H}[\Sigma_2]$ は

$$|\Psi_2\rangle = U(\Sigma_2, \Sigma_1)\,|\Psi_1\rangle \tag{7}$$

であらわされます。さらに、もうひとつ超曲面 Σ_3 を取ってくると

$$U(\Sigma_3, \Sigma_2)U(\Sigma_2, \Sigma_1) = U(\Sigma_3, \Sigma_1) \tag{8}$$

を満たすはずです。図 2 の左側をご覧ください。

さて、図 2 の右側のように Σ' として Σ とほぼ一致するが、一部だけほんの少し異なるものを取った際の微小な変換 $U(\Sigma', \Sigma)$ を理解することができれば、勝手な $U(\Sigma_2, \Sigma_1)$ はその微小な変換を何度も積み重ねることで実現できます。シュウィンガーと朝永はこの方法によって相対論的な場の量子論の計算法を確立したのでした。超曲面 Σ を指定するには、その位置をあたえる関数 $t(x, y, z)$ を決めることになり

ます。これを (x, y, z) でパラメタ付けされる無限個の時刻座標があると捉えて、朝永はこの方法を超多時間理論と呼びました。

話を進める前に、実スカラー場の場合に、状態ベクトル $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}[\Sigma]$ を (いろいろな数学的困難をいったん棚上げした上で) もう少し具体的に記述しましょう。Σ 上の場の配位 $\phi|_\Sigma : \Sigma \to \mathbb{R}$ たちがなす関数空間を $F(\Sigma)$ とし、その上の関数 Ψ

$$F(\Sigma) \ni \phi|_\Sigma \mapsto \Psi[\phi|_\Sigma] \in \mathbb{C} \tag{9}$$

を考えます。これを $\Psi[\phi|_\Sigma]$ は配位 $\phi|_\Sigma$ が Σ 上で実現している確率振幅と解釈します。通常の点粒子の量子力学の場合、状態ベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ は波動関数 $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対応し、$\psi(x)$ は粒子の位置座標が x である確率振幅であることの自然な場の量子論への拡張になっていることがわかるかと思います。

ここまで、相対論的場の量子論を確立した三人のうち二人の方法を説明しましたが、三人目のファインマンはまた別の観点を用いて相対論的な場の量子論を定式化しました。定式化は異なりますが、計算結果はいつでも同じになることが示されています。歴史的に、ファインマンの方法が標準的なものとして選ばれたため、ここまで説明したような、勝手な空間的超曲面 Σ に対して状態空間 $\mathcal{H}[\Sigma]$ とそこに属する状態ベクトル $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}[\Sigma]$ を考える方式は、理論物理の近年の通常の場の量子論の教科書を使って勉強する限りは出てきません。

2　位相的場の量子論

2.1　アティヤーの公理系

ここまでは 1940 年代の話をしてきました。時計の針を 40 年進めて、1980 年代後半の数学者の活動に話をうつしましょう。1980 年代には、ジョーンズによる結び目の理論やドナルドソンによる四次元多様体の理論など、幾何学に大きな発展がありました。理論物理学者のウィッテンは、それらの発展に場の量子論の観点からの解釈を与えましたが、それに強い影響をうけ、数学者のアティヤーはそれらの数学の発展を記述する枠組みとして位相的場の量子論の公理化に至りました [3]。

その公理系をおおまかに説明しましょう。まず、d 次元の境界を持つ多様体 N を考えます。境界を ∂N と書くと、これは $d-1$ 次元の閉じた多様体です。∂N は複数の連結成分を持ち得ますが、それらを「入ってくる境界」M_1 と「出ていく境界」M_2 に分けておくことにしましょう。すなわち

$$\partial N = M_1 \cup M_2 \tag{10}$$

です。この状況を「M_1 から M_2 へのボルディズム N が与えられた」ということにし、$N\colon M_1 \to M_2$ と書くことにします。

ただし、二つの d 次元多様体 N と $\tilde{N}$ が同じ境界を持つ、すなわち $\partial N = \partial\tilde{N} = M_1 \cup M_2$ であり、境界 $M_1 \cup M_2$ を固定したまま N と $\tilde{N}$ が互いに連続的に変形できるならば、それらはボルディズムとしては同一視することにしましょう。ボルディズムの例を図 3 の左側にあげました。

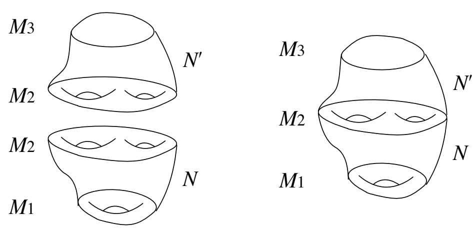


図 3　ボルディズムとその合成

さて、ボルディズム $N\colon M_1 \to M_2$ と $N'\colon M_2 \to M_3$ が与えられたとします。する

と、共通する境界 M_2 を張り合わせることで、M_1 から M_3 へのボルディズムをつくることができます。これをボルディズムの合成と呼び

$$N' \circ N \colon M_1 \to M_3 \tag{11}$$

と書きましょう。図 3 の右側をご覧ください。

さて、アティヤーの定義による d 次元の位相的場の量子論とは、おおざっぱには (1) $d-1$ 次元の勝手な閉じた多様体 M に対して、ベクトル空間 $\mathcal{H}(M)$ が定まり、(2) ボルディズム $N \colon M_1 \to M_2$ に対して線形変換

$$U(N) \colon \mathcal{H}(M_1) \to \mathcal{H}(M_2) \tag{12}$$

が定まっており、(3) $N \colon M_1 \to M_2$ と $N' \colon M_2 \to M_3$ の合成 $N' \circ N \colon M_1 \to M_3$ に対しては

$$U(N' \circ N) = U(N')U(N) \tag{13}$$

を満たすようなもの、ということになります。

さて、二つの d 次元多様体 N、$\tilde{N}$ が $\partial N = \partial\tilde{N} = M_1 \cup M_2$ を満たし、かつ M_1, M_2 を固定して連続的にうつりあう場合は、N と $\tilde{N}$ はボルディズムとしては同一視するとしました。一方、上記公理系では、$U(N)$ はボルディズム $N \colon M_1 \to M_2$ に対して定まるものとしました。よって、この状況では、$U(N) = U(\tilde{N})$ となります。状態空間 $\mathcal{H}(M_1)$ から状態空間 $\mathcal{H}(M_2)$ への「時間発展」である $U(N)$ が N の連続変形によらないトポロジカル (位相的) なものになっているのです。これが位相的場の量子論という名前の由来です。

圏論の基礎を使えば次のようにもいうことができます。$d-1$ 次元の多様体を対象とし、その間のボルディズムを射とする圏を $\mathbf{Bord}_{d-1}$ と書きましょう。また、有限次元ベクトル空間を対象とし、その間の線形変換を射とする圏を $\mathbf{Vec}$ と書きましょう。すると、位相的場の量子論とは、圏 $\mathbf{Bord}_{d-1}$ から $\mathbf{Vec}$ への関手である、と一言でいうことができます。

位相的場の量子論は、数学において有用であっただけでなく、物性理論でも分数量子ホール効果や関連するエニオン系の記述に使われています。

2.2　超多時間理論との比較

今回の記事をはじめから読んできた皆さんには、1.3 節の朝永とシュウィンガーによる相対論的場の量子論の定式化と、2.1 節のアティヤーによる位相的場の量子論の定式化がアイデアの点で非常によく似ていることがわかるでしょう。違いは、

- アティヤーが勝手な閉じた $(d-1)$ 次元多様体 M を考えるところ、朝永とシュウィンガーは平らな $\mathbb{R}^d$ の勝手な空間的超曲面 Σ を考えている。
- アティヤーにおいては、連続変形で互いにうつりあうような二つの状況は同一視するため、得られる「時間発展」$U(N)$ はトポロジカルなものになっているが、朝永とシュウィンガーの枠組みはそのような制限は課されていない。

という二点にまとめることができます。これを踏まえて、アティヤーの原論文 [3] をみますと、シュウィンガーや朝永のことはまったく触れられておらず、むしろファインマンの名前が影響元として述べられているのは不思議なことです。

個人的なことになりますが、私が今世紀の始め頃に場の量子論を学びはじめた際は、超多時間理論という名前は聞いたものの、それが具体的に何であるかはどこにも出てきませんでした。ですので、大学院生のころにアティヤー式の位相的場の量子論を学んだあと長い間が経っ

て、数年前ようやく朝永やシュウィンガーの原論文を眺めた際、その類似に驚いたものです。特に朝永の論文では背景の思想がはっきりと現れているように思われました。アティヤーが彼の定式化をやった 1980 年代後半に、朝永やシュウィンガーの仕事を彼が知っていたのかは興味をひく問題ですが、筆者から彼に聞く機会もなく、残念ながらアティヤーは 2019 年に亡くなってしまいました。

●参考文献

[1] 朝永振一郎, 『場の量子論の相對律的な定式化について』, 理化學研究所彙報 **22** (1943) 545–557 ; S. Tomonaga, *On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields*, Progress of Theoretical Physics, **1** (1946) 27–42. https://doi.org/10.1143/PTP.1.27

[2] J. Schwinger, *Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation*, Physics Review **74** (1948) 1439–1461. https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.1439

[3] M. F. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Publications mathématiques de IHÉS, **68** (1988) 175–186. http://www.numdam.org/item/PMIHES_1988__68__175_0/

第 9 回 — 可逆な場の量子論について

通常、理論物理で場の量子論を学ぶ際や、伝統的な公理論的場の量子論では、平らな空間や平らな時空についてばかり考えます。しかし、前回とりあげた超多時間理論や位相的場の量子論の枠組みでは、空間や時空について勝手な曲がったものを考察に取り入れることが肝でした。曲がった時空を考察することで理解することができる場の量子論の中で、特に簡単な構造を持ちここ 10 年で理解の非常に進んだ場の量子論の種類がありますので、今回はそれについて説明したいと思います。近年の業界では可逆な場の量子論 (invertible quantum field theory) と呼ばれているものです。

1 ギャップのある場の量子論

d 次元の場の量子論をまずは平らな時空 $\mathbb{R}^d$ 上で考えましょう。理論の状態空間 $\mathcal{H}$ には最低エネルギー E_0 を持つ状態 $|\Omega\rangle \in \mathcal{H}$ があります。エネルギーは $\mathcal{H}$ 上のハミルトニアンという自己共役作用素 H の固有値でした。最低エネルギーより大きなエネルギーを持つ励起状態を考えることで、理論は大きく 2 種類に分けられます:

- ある正の数 ϵ_0 があって、E_0 より大きな固有値 E_1 はどのようなものでも $E_0 + \epsilon_0 < E_1$ を満たす場合。このような理論を「ギャップがある」という。
- どのような正の数 ϵ を取っても、なにか固有値 E_1 があって、$E_0 < E_1 < E_0 + \epsilon$ を満たす場合。このような理論を「ギャップがない」という。

$E_1 - E_0$ を、いま考えている場の量子論を実験的に測定しようとして外部から持ち込むエネルギーだと思うと、ギャップのある理論では、ある一定の大きさのエネルギー ϵ_0 を持ち込まないと励起状態は測定できないことになります。「4 次元の非可換ヤン-ミルズ理論を数学的に構成し、ギャップがあることを証明せよ」というのがクレイ研究所が 100 万ドルの賞金を掛けたミレニアム問題の一つなのでした。

さて、ギャップのある理論で、外部からの測定では ϵ_0 よりはるかに小さいエネルギーしか導入しないとしましょう。そうすると最低エネルギー状態 $|\Omega\rangle$ しか寄与せず、平らな時空 $\mathbb{R}^d$ で考えている限りは何も興味深いことは起こりません。しかし、曲がった時空や境界を持った時空を許すと、面白いことが取り出せます。これは、歴史的には、3 次元のギャップのある系でホール伝導度という量が、ある普遍定数の整数倍になるという実験事実を理論的に理解する過程で見いだされたことです。

いま考えているギャップのある場の量子論 T を、空間方向は曲がった $d-1$ 次元の空間 M で、時間方向は平らな $\mathbb{R}$ であるような状況で考えましょう。この系の状態空間を $\mathcal{H}(M)$ とします。これは通常無限次元のヒルベルト空間です。さて、ギャップよりはるかに小さいエネルギーで測定できる量、すなわち、理論の低エネルギー極限にしか興味がないとします。数学的には、最低エネルギー固有値の固有空間 $\mathcal{H}_0(M) \subset \mathcal{H}(M)$ を取り出してそこを考察しようということになります。ハミルトニアンは $\mathcal{H}_0(M)$ に制限すると単に作用素とし

て E_0 です。エネルギーの基準点を取りなおして $E_0=0$ としても一般性を失いません。通常 $\mathcal{H}_0(M)$ は有限次元になります。

場の量子論に対する操作としては、ギャップのある場の量子論 T の低エネルギー極限自体を場の量子論 T_0 とし、その状態空間が $\mathcal{H}_0(M)$ である、とすることができます。数学的に考察する際は、低エネルギー極限をとる前段階の場の量子論 T で状態空間 $\mathcal{H}(M)$ が無限次元なものは忘れてしまって、はじめから、有限次元の状態空間 $\mathcal{H}_0(M)$ を持ち、ハミルトニアンは単に 0 であるような場の量子論 T_0 を考えるのが簡便です。このような T_0 は、前回導入したアティヤーの公理系そのものは満たさなくとも、それにすこし変更を加えたものを満たしますので、細かい区別を忘れて位相的場の量子論と呼ばれることが理論物理ではしばしばあります。ここでは、その区別に少々注意を払い、これらの理論を広い意味の位相的場の量子論と呼ぶことにしましょう。

2　可逆な場の量子論

2.1　一般論

広い意味の位相的場の量子論の中で、さらに簡単なものとして、$\mathcal{H}_0(M)$ が単に有限次元なだけでなく、いつでも 1 次元になるものが考えられます。これが、可逆な場の量子論です。可逆という名前の背景をこの紙数できちんと説明することは難しいので、申し訳ありませんが省略します。物性理論では対称性保護トポロジカル相 (symmetry-protected topological phase)、また、短距離エンタングル状態 (short-range entangled state) と呼ばれるものと、ほぼ同じクラスの理論になります。

位相的場の量子論の研究は、1980 年代半ば

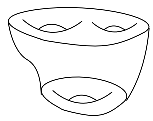


図 1　d 次元多様体 N_1 と N_2 をつなぐ $d+1$ 次元の多様体 X

からの 40 年ほどの歴史がありますが、その中でも特に簡単なはずの可逆な場の量子論の研究がはじまったのは 2010 年代になって物性理論でトポロジカル絶縁体やトポロジカル超伝導体が研究されはじめてからでした。とはいうものの、場の量子論のなかでは比較的簡単であるのは事実で、それから現在までの 10 年強で、可逆な場の量子論についてはかなりの部分がわかったといって良いでしょう。以下、可逆な場の量子論について考えましょう。

まず、$d-1$ 次元多様体 M に対して 1 次元の状態空間 $\mathcal{H}_0(M)$ があります。次に、境界を持つ d 次元多様体 N で境界が $\partial N = M_1 \sqcup M_2$ であるものを考えます。ここで、$\sqcup$ は M_1 と M_2 は共通部分を持たないとしたうえでの合併集合 $M_1 \cup M_2$ をあらわす記号です。すると、時間発展に相当する線形写像 $Z(N) : \mathcal{H}_0(M_1) \to \mathcal{H}_0(M_2)$ があります。

特に N として境界のないもの、$\partial N = \varnothing$ を考えます。すなわち M_1, M_2 両者とも空集合 $\varnothing$ である場合です。その場合は $Z(N) : \mathcal{H}_0(\varnothing) \to \mathcal{H}_0(\varnothing)$ は同じ 1 次元線形空間の上の線形変換ですから、自然に複素数と同一視ができます。そこで、$Z(N) \in \mathbb{C}$ と書き、これを理論の時空 N における分配関数と呼びます。可逆な場の量子論の場合は、分配関数は絶対値 1 の複素数に値をとることが知られています。以下、絶対値 1 の複素数全体を $U(1) = \{z \mid |z| = 1\}$ と書きましょう。すると、$Z(N) \in U(1)$ です。

広い意味の位相的場の量子論がアティヤーの

公理系に従う狭い意味の位相的場の量子論と異なる点は、時空に多様体の構造だけでなく計量を含めて考えるため、$Z(N)$ が計量にも依存するということです。いま、N_1 と N_2 を二つの d 次元の計量つき多様体としたとき、$Z(N_1)$ と $Z(N_2)$ を比較したいとしましょう。そのため、N_1 と N_2 をつなぐ、$d+1$ 次元の境界つき計量つき多様体 X があるとします。すなわち、$\partial X = N_1 \sqcup N_2$ とします。この状況は、前回と同様ですが、図 1 をご覧ください。

このとき、一般論から、分配関数の変化は

$$\frac{Z(N_2)}{Z(N_1)} = \exp(i \int_X (\text{計量から作られた微分形式})) \tag{1}$$

という式で与えられることが導かれます。右辺の指数関数の肩に現れるのは数学では特性類と呼ばれるものです。

2.2　3 次元の可逆場の量子論

具体的にするため、$d = 3$ とします。このとき、なにか実数 k があって、

$$\frac{Z(N_2)}{Z(N_1)} = \exp(2\pi i k \int_X p_1), \tag{2}$$

となります。ただし p_1 は第 1 ポントリャーギン類と呼ばれる特性類で、曲率 2 形式 R を用いて

$$p_1 = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\frac{R}{2\pi})^2 \tag{3}$$

と定められる微分 4 形式です。特に N_2 として N_1 と多様体としては同じだが計量だけ異なるものをとれば、式 (2) は分配関数が計量にどのように依存するかを記述していることになります。

式 (2) に分配関数の計量などの外場への依存性から系の応答を計算する久保公式という物性理論の基本公式を適用しますと、この系の熱ホール伝導度が計算できます。熱ホール伝導度というのは、物質表面での物性を記述するような、空間が 2 次元で時間 1 次元の状況で、x 軸方向の微小な温度勾配 ΔT があった際に y 軸方向に流れる熱流を I としたときの比例関係 $I = \kappa \Delta T$ に現れる比例定数 κ のことです。標準的な計算より、T を系の温度、k_B をボルツマン定数、$\hbar$ をプランク定数として

$$\kappa = k \cdot 4\pi (k_B)^2 T/\hbar \tag{4}$$

で与えられることが導かれます。

いま、式 (2) において、X が特に閉じた 4 次元多様体、すなわち $\partial X = \varnothing$ で $N_1 = N_2 = \varnothing$ だとしましょう。すると、左辺は当然 1 ですから、$k \int_X p_1$ は勝手な X に対して整数でないといけません。さて、指数定理により向き付き多様体 X に対して $\int_X p_1$ は 3 の倍数、また、スピン構造付き多様体 X に対しては $\int_X p_1$ は 48 の倍数であることが知られています。すると、 向き付き多様体を定義域として持つような可逆場の量子論の k は $k_0 = 1/3$ の整数倍、一方、 スピン構造付き多様体を定義域として持つような可逆場の量子論の k は $k_0 = 1/48$ の整数倍であることがわかります。ただし、多様体のスピン構造というのは、数学的には多様体の構造群の $SO(n)$ から $Spin(n)$ への持ち上げを指定することで、物理的には、電子などスピン 1/2 の粒子を曲がった時空の上で考えるために必須となるものです。式 (4) と組み合わせると、可逆な場の量子論で記述されるような系の熱ホール伝導度 κ は、$k_0 \cdot 4\pi (k_B)^2 T/\hbar$ の整数倍であることがわかりました。これが整数熱量子ホール効果です。

ここで筆者にとって特に興味深い点は、考えている場の量子論の定義域が向き付き多様体であるかスピン構造付き多様体であるかによっ

て、整数熱量子ホール効果の基本的な値 k_0 が 1/3 か 1/48 であるかが異なってくるということです。実験では $k = 1/48$ であるような整数熱量子ホール効果が測定されていますので [1]、この世の記述にはスピン構造が必要だということがわかります。まあ、そんな回りくどい議論をしなくとも、スピンが 1/2 である電子の記述のために時空にはスピン構造が必要なのですが、可逆場の量子論の数学的議論と、物性物理における実験結果をあわせると、時空の幾何学的構造について何らかの情報を取り出しうる、というのが面白く思えるのです。

2.3　2 次元の可逆場の量子論

次に $d = 2$ の場合を考えましょう。この場合、式 (1) の右辺の指数関数の肩に現れうる特性類がそもそも存在しません。そのため、2 次元多様体 N_1 と N_2 が 3 次元多様体 X の境界として $\partial X = N_1 \sqcup N_2$ とあらわされるならば、すなわち、$X : N_1 \to N_2$ なるボルディズムがあるならば、

$$\frac{Z(N_2)}{Z(N_1)} = 1 \tag{5}$$

となります。N_1 から N_2 へのボルディズムがある、という関係を $N_1 \simeq N_2$ と書くと、これは同値関係になります。これを用いて、d 次元の多様体全体に同値関係を入れた同値類は自然に可換群をなし、d 次元ボルディズム群と言います。式 (5) より、2 次元可逆場の量子論の分配関数は、2 次元ボルディズム群の上の関数を定めることがわかります。

ただし、多様体といった場合にどのような構造まで込めて考えるかを指定する必要があり、向き付き多様体を考えるかスピン構造付き多様体を考えるかに応じて、向き付きボルディズム群 $\Omega_d^{\text{向き付き}}$、もしくはスピンボルディズム群 $\Omega_d^{\text{スピン}}$ と書かれるものになります。まとめると、2 次元の可逆場の量子論はその定義域がどのような構造を持つ多様体であるかに依存して、

$$Z : \Omega_2^{\text{構造}} \to U(1) \tag{6}$$

なる群の準同型となることがわかります。$\Omega_2^{\text{向き付き}} = \{1\}$ は自明な群で、$\Omega_2^{\text{スピン}} = \{\pm 1\}$ は二元よりなる群であることが知られています。$Z : \{\pm 1\} \to U(1)$ なる準同型は $Z(-1) = \pm 1$ で指定される二つのものがあります。これより、時空に向き付けのみを考える場合は可逆な場の量子論は自明なものしかないが、時空にスピン構造がある場合は 2 種類の可逆な場の量子論があることがわかりました。

このスピン構造がある場合の 2 種類の可逆な場の量子論は、物性理論ではキタエフが導入したマヨラナフェルミオンの鎖を考える模型でパラメタを適切に選ぶことによって両者とも実現できることが知られています。ここでも、物性理論における考察が時空へのスピン構造の導入を必要とするという状況がおきています。

2.4　可逆場の量子論の分類

以上の議論から感じていただけたと思いますが、可逆な場の量子論の考察においては、二つの d 次元多様体 N_1 と N_2 が $d+1$ 次元多様体 X の境界として $\partial X = N_1 \sqcup N_2$ と現れうることから来るボルディズムが重要な役割を果たします。ボルディズムは数学の中でも代数トポロジーと呼ばれる分野で前世紀中頃に導入されたものです。

可逆な場の量子論の分類においてボルディズムが重要であろうというのは、物性理論の発展に基づいて 2014 年の素粒子論における論文 [2] によって提唱されました。広い意味での位相的場の量子論の枠組みにおける可逆な場の量

子論の分類は、純粋数学者二人による 2 年後の論文 [3] でなされ、可逆な場の量子論の中でも狭い意味の位相的な場の量子論におさまっているものの分類は、理論物理側でさらに 2 年後に [4] によってなされました。どちらの結果も、ボルディズム群をもとに分類結果が理解できる、というものです。これらの発展によって、急にここ 10 年になって理論物理学者もボルディズム群の勉強をする必要が出てきたわけです。

●参考文献

[1] Y. Kasahara, T. Ohnishi, Y. Mizukami, O. Tanaka, S. Ma, K. Sugii, N. Kurita, H. Tanaka, J. Nasu, Y. Motome, T. Shibauchi and Y. Matsuda, *Majorana quantization and half-integer thermal quantum Hall effect in a Kitaev spin liquid*, Nature **559** (2018) 227–231, https://arxiv.org/abs/1805.05022

[2] A. Kapustin, R. Thorngren, A. Turzillo and Z. Wang, *Fermionic symmetry protected topological phases and cobordism*, Journal of High Energy Physics, **12** (2015) 052, https://arxiv.org/abs/1406.7329

[3] D. Freed and M. J. Hopkins, *Reflection positivity and invertible topological phases*, Geometry & Topology, **25** (2021) 1165, https://arxiv.org/abs/1604.06527

[4] K. Yonekura, *On the cobordism classification of symmetry protected topological phases*, Communications in Mathematical Physics, **368** (2019) 1121, https://arxiv.org/abs/1803.10796

第 10 回 — 二次元共形場理論とムーンシャイン現象

場の量子論の数学は未完成ではありますが、その中でも 2 次元共形場理論は数学的整備がよく進んでいる分野です。今回はその話をしましょう。

1　共形場理論とは

水は常圧では沸点 100 °C で液体から気体に相転移をします。圧力を徐々に上げて行くと、徐々に沸点も上がりますが、充分に圧力を上げると、そもそも液体と気体の区別がなくなります。このまさに液体と気体の区別がなくなるギリギリのところを臨界点と呼びますが、そこでは系がスケール不変になっています。

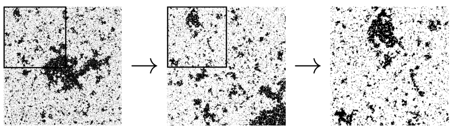


図 1　2 次元イジングモデルの臨界点の様子。それぞれ左上 1/4 の領域を拡大して右に表示してある。

これをより簡単な系でみてみます。2 次元の磁石のモデルであるイジングモデルの臨界点を計算機でシミュレートした例を図 1 にあげました。上と下を向きうる微小な磁石が正方格子に並んでおり、熱的に揺らぐが、隣り合う磁石は同じ方向を向きたがる、という模型で、上向きと下向きをそれぞれ白と黒であらわしてあります。左上隅を次々に拡大して表示しましたが、同じようにいろいろな大きさの塊が混ざった状況であることが見てとれると思います。ここまでは感覚的な話ですが、シミュレーション結果をきちんと統計的に処理をして、スケール不変であることを数値的に確認することもできます。

さて、系のスケールを一様に変えるスケール変換を図 2 の左に図示しましたが、これは局所的な直交性を変えない共形変換の例になっています。図 2 右にはスケール変換でない共形変換の例をあげました。もとの座標軸が曲がってうつされていますが、どこでも直交していることがわかるでしょう。

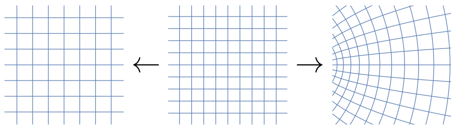


図 2　中央: もとの座標系。左: スケール変換を施したもの。右: スケール変換でない共形変換を施したもの。

物理系では、しばしば、理論がスケール変換で不変な状況では、自動的に共形変換でも不変であるということが起きます [1]。そこで、場の量子論のなかでも、共形変換のもとで不変になるものを共形場理論 (conformal field theory, CFT) と呼ぶことにし、それについて詳しく調べようということになります。

さて、共形場理論を調べるには、まずは共形変換のなす群について理解する必要があります。ここで 2 次元の共形変換とそれ以上の次元での共形変換に大きな違いが生じます。3 次元以上ですと共形変換群は有限次元の群なのですが、2 次元ですと共形変換群は無限次元になるのです。実際、2 次元空間を $z = x + yi$ という複素座標で考えますと、勝手な正則関数

$f(z)$ に対して $z \mapsto z' := f(z)$ という変換は、$z = z_0$ 近傍においては

$$dz \mapsto f'(z_0)dz \tag{1}$$

となりますから、$f'(z_0) = r_0 e^{i\theta_0}$ と分解すれば、(1) はスケールを r_0 倍し、角度を θ_0 だけ回転させる操作になり、局所的な直交性を変えない共形変換になっています。ですので、勝手な正則関数が共形変換になり、無限次元になるという仕組みです。ということは、2 次元の共形場理論は無限次元の対称性をもつことになります。この無限次元の対称性を使うと、理論の構造を詳細に決定できるということを見事に示したのが 1984 年の [2] で、その後の 40 年間に着実な進歩がありました。

2　演算子積展開と頂点作用素代数

2 次元に限らず共形場理論の解析で中心となる概念が演算子積展開 (operator product expansion, OPE) です。この連載で何度も述べたように、場の量子論における演算子 $O(\mathbf{x})$ は系のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に作用する作用素値超関数ですので、その積、例えば

$$A(\mathbf{x}_1)B(\mathbf{x}_2) \tag{2}$$

を考えることができます。また、これは $\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2$ という極限でしばしば発散し、これが場の量子論の理論を展開する上でいろいろな問題を引き起こすのでした。しかし、場の量子論が 20 世紀前半に導入されてから長い間、積 (2) が具体的にどのような演算子であるかは長らく直接扱われませんでした。この状況を変えたのは理論物理の 1969 年の論文 [3] で、そこでは

$$A(\mathbf{x}_1)B(\mathbf{x}_2) = \sum_i c_i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)O_i(\mathbf{x}_2) \tag{3}$$

という展開が想定されました。ここで、右辺の $c_i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ は係数関数で、$O_i(\mathbf{x}_2)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ は場所 $\mathbf{x}_2$ における演算子の基底だとします。そうして、積 (2) の $\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2$ での発散は特定のいくつかの i に対する $c_i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ の発散から起こる、と考えるわけです。この操作は演算子積展開と呼ばれるようになり、クォークを陽子や中性子に組み立てている強い力を記述する量子色力学の解析などで重要な役割を果たしています。

2 次元の共形場理論の場合は、x, y 座標のかわりに $z, \bar{z}$ を使うのが便利です。数学的にはあまりよろしくない記法かもしれませんが、こちらの業界では $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z, \bar{z}) = 0$ を満たす、すなわち正則な関数を $f(z)$ と書き、同様に $\frac{\partial}{\partial z} f(z, \bar{z}) = 0$ である反正則な関数を $f(\bar{z})$ と書き、$f(z, \bar{z})$ と書くとどちらの条件も課されていないことを示します。2 次元の共形場理論にはたくさんの演算子がありますが、その中でも正則なもの $A(z)$, $B(z)$, ... を考えます。それらは

$$A(z)B(w) = \sum_i c_i(z - w)O_i(w) \tag{4}$$

という展開を持ちます。ここで $c_i(z - w)$ は局所的には正則ですが、$z \to w$ での発散、すなわち $z - w$ に関する極を許すことにしましょう。また、共形場理論ですから特にスケール変換 $z \mapsto \alpha z$ のもとで理論はうまく変換するはずです。そこで 演算子 A に対して実数 Δ_A があって

$$A(\alpha z) = \alpha^{-\Delta_A} A(z) \tag{5}$$

という変換を想定しましょう。このとき演算子 A はスケール次元 Δ_A を持つ、といいます。すると (4) はさらに $c_{A,B}^{O_i}$ を複素数として

$$A(z)B(w) = \sum_i c_{A,B}^{O_i} \frac{O_i(w)}{(z - w)^{-\Delta_{O_i} + \Delta_A + \Delta_B}} \tag{6}$$

という形に制限されます。さて、演算子 3 つの積 $A(z_1)B(z_2)C(z_3)$ に上記展開 (6) を適用する際の可能な順序には 2 通りあり、

$$\big(A(z_1)B(z_2)\big)C(z_3) = A(z_1)\big(B(z_2)C(z_3)\big) \tag{7}$$

という結合則が成り立たなければいけません。これは展開 (6) に現れる展開係数に対して非常に複雑な関係式を要求することになります。これらを数学的に定式化したものが頂点代数 (vertex algebra) というもので、1986 年に [4] で導入されました。

さらに、大学で複素解析を学ぶと習いますが、局所的に正則な関数は極の情報を定めれば全体が定まってしまいます。ですので、展開 (6) においても、右辺で展開係数が極をもつところを指定すれば全体の構造が定まってしまうことが知られています。このアプローチでの数学的な定式化に興味がある方には、教科書 [5] をお薦めします。

具体例を考える際に、まっとうな場の量子論には必ず存在するエネルギー運動量密度を表す演算子を考えましょう。2 次元共形場理論ではこれは正則になり、通常 $T(z)$ と書かれます。これについて、スケール次元 Δ_T は 2 であり、また、$T(z)T(w)$ の展開は

$$T(z)T(w) \sim \frac{c}{2}\frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} \tag{8}$$

となることが知られています。ここで c は定数であり、$\partial T(w) = \partial T(w)/\partial w$ という略記を用い、$\sim$ は右辺の演算子積展開において極をもつところだけ指定したことをあらわします。上式で定まる頂点代数は、もともと物理側ではじめに考えた人の名前をとりビラソロ代数と呼ばれます。頂点代数であり、その中の部分代数としてビラソロ代数を指定したものを頂点作用素代数 (vertex operator algebra, VOA) と呼び、物理側での 2 次元共形場理論の演算子で正則なものを集めたものは自然に頂点作用素代数の例になります。

例えば、今回の記事の冒頭で出てきたイジングモデルからは、スケール次元が $\Delta_\psi = 1/2$ になる演算子 ψ であって、演算子積展開

$$\psi(z)\psi(w) \sim \frac{1}{z-w} \tag{9}$$

を持つようなものを取り出すことができ、$T(z)$ は

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2}(\psi\partial\psi)(z) \\ &:= \frac{1}{2}\lim_{z\to w}\left(\psi(z)\partial\psi(w) - \frac{1}{(z-w)^2}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

で与えられることが知られています。このとき、(8) の c は $c = 1/2$ で与えられます。

次の話にうつる前に頂点作用素代数という用語について説明しておきます。2 次元の共形場理論は、物性理論において臨界現象を記述するだけでなく、弦理論において 1+1 次元の弦の世界面上の理論を記述するのにも必要です。その際、共形場理論の演算子 $O(z)$ が世界面のその点からの粒子の放出をあらわす場合、弦理論では特に頂点演算子 (vertex operator) と呼ばれていました。この用語が数学者に取り入れられて、定着したということのようです。

3　ムーンシャイン現象

さて、一見関係なさそうな話をはじめます。複素解析において非常に重要な関数で 19 世紀から知られているモジュラー J 関数というものがあり、次の展開を持ちます:

$$J(q) = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots . \tag{11}$$

ここで引数は z でも良いのですが慣習に従って q を用いました。1970 年代後半、数学者は有限単純群の分類を進めていましたが、その中で散在型単純群という特に例外的なものが二十数個みつかり、その中の最大のものとしてモンスター群 $\mathbb{M}$ と呼ばれるものが構成されつつありました。その頃、数人の数学者が、上記 J 関数の展開係数とモンスター群 $\mathbb{M}$ に関係があることに気がつきました。

いま群 G に対して、可逆な $n \times n$ 行列のなす群 $GL(n, \mathbb{C})$ への準同型 $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ のことを n 次元の表現というのでした。n 次元の表現と m 次元の表現があると、行列の直和をとることで $n+m$ 次元の表現が得られます。これを直和表現といい、直和に分解できない表現を既約表現といいます。どのような群も、G のすべての元を 1×1 の単位行列にうつす表現をもち、これを自明な表現といいます。

モンスター群 $\mathbb{M}$ の最小の表現はもちろん自明表現で 1 次元です。最小の非自明既約表現の次元は 196883 で、その次に大きい既約表現の次元は 21296876 です。これらは (11) の展開係数と

$$\begin{aligned} 196884 &= 1 + 196883, \\ 21493760 &= 1 + 196883 + 21296876 \end{aligned} \tag{12}$$

という関係があります。これに類する関係はさらに高次の展開係数までずっとつづきます。

複素解析と有限単純群論は数学の中でもあまりにかけ離れた分野だったので、この関係にはじまる一連の数学的観察はモンストラス・ムーンシャイン (Monstrous moonshine) 現象と呼ばれるようになりました。ここで、ムーンシャインには月影という意味もありますが、アメリカで禁酒法時代に密造酒が政府の目を逃れて月影のもとで作られたため、あやしいもの、という意味もあり、また、モンストラスはモンスター群に関係する、という意味ではあるのですが、怪物的、という意味もあるので、怪物的にあやしい現象だ、というわけです。

さて一見関係のないこの話がなぜ出てきたかといいますと、この問題の解決には頂点作用素代数が重要な役割を果たしたからです。これを概説しましょう。モンスター群 $\mathbb{M}$ の自然な作用をもつ $c = 24$ の頂点作用素代数 $V^\natural$ が [6] で構成されました。さらに、スケール次元が Δ の演算子のなす部分空間を $V^\natural_\Delta$ と書くと

$$J(q) = \sum_{\Delta=0}^{\infty} (\dim V^\natural_\Delta) q^{\Delta-1} \tag{13}$$

という関係式が成り立ちます。すると、$V^\natural_\Delta$ はモンスター群の表現になっているため、$J(q)$ の展開係数は自然にモンスター群の表現の次元になるわけです。

それだけではありません。ムーンシャイン現象が発見されたときは、モンスター群はそもそも完全には構成されておらず、そのすこし後に、196884 次元の線形空間 V に適切な「積」$V \otimes V \to V$ を導入し、その積を保つ線形変換全体という形で構成されました。そして、この V は上記頂点作用素代数の $\Delta = 2$ の部分、すなわち $V = V^\natural_2$ であり、またこの「積」は $V^\natural_2$ の演算子積展開 (6) を V に制限したものになっています。この意味で、頂点作用素代数 $V^\natural$ はモンスター群の定義、存在そのものに関わっているわけです。

まとめましょう。有限単純群の中でも特別な、散在型有限単純群のなかで最大のモンスター群 $\mathbb{M}$ は、その存在を特別な頂点作用素代数 $V^\natural$ の構造に負っています。そして、この頂点作用素代数という枠組みは、理論物理において共形場理論を 2 次元で考え、その中で複素座標を $z = x + yi$ に関して正則な演算子のみ集めてきたものを調べて現れたものでした。です

から、ムーンシャイン現象は複素解析と有限群の理論だけでなく、理論物理をも巻き込む、さらに不可思議なものだったと言えるでしょう。

●参考文献

[1] Y. Nakayama, *Scale invariance vs conformal invariance*, Physics Reports **569** (2015) 1–93, https://arxiv.org/abs/1302.0884

[2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimesnional quantum field theory*, Nuclear Physics B **241** (1984) 333–380, https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90052-X

[3] K. G. Wilson, *Non-Lagrangian Models of Current Algebra*, Physical Review **179** (1969) 1499–1512, https://doi.org/10.1103/PhysRev.179.1499

[4] R. E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA **83** (1986) 3068–3071, https://doi.org/10.1073/pnas.83.10.3068

[5] V. Kac, *Vertex algebras for beginners*, 2nd ed., American Mathematical Society, 1997

[6] I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex operator algebras and the Monster*, Academic Press, 1988

第 11 回 — 高次元共形場理論とブートストラップ法

前回は 2 次元の共形場理論に関連する話をしました。共形場理論とは、相転移の臨界点などを記述する場の量子論で、局所的な直交性を変えないような座標変換である共形変換のもとで不変なものです。時空の次元が 2 次元の場合には大きな発展が 1980 年代半ばにありました。この発展が可能だった背景には、一般の次元の共形変換群は有限次元であるが、2 次元の場合には共形変換群が無限次元になり、この無限次元の群の表現論によって理論の性質が強く制限されるということがありました。

しかし時空の次元が 3 次元以上の場合の理論的な理解はなかなか進まず、コンピュータでモンテカルロ法という手法をもちいて系を直接シミュレートするか、この連載の第 3 回に説明したような、系のパラメタのテーラー展開を用いる方法しかない状況が長らく続きました。我々にもっとも身近な水の気相と液相の相転移の臨界点は、3 次元の共形場理論になりますから、それを直接解析する手段を持ち合わせていないというのはある意味情けないことでした。

これが変わったのが 2008 年の論文 [1] にはじまり、ブートストラップ法と呼ばれるようになった一連の進展で、その後の 10 年強で大発展を遂げ、今や場の量子論の主要な手法として確立した感があります。しかし、これまでこの連載で紹介してきた場の量子論の側面と異なり、今回の話は数学者による厳密な定式化やさらなる理論の整備などはまだなされていないように思います。何はともあれ、詳細の紹介をはじめましょう。

1 高次元共形場理論の基本的な構造

1.1 演算子の分類

n 次元の共形場理論をユークリッド化して考えましょう。通常の時空の対称性は n 次元の回転群 $SO(n)$ ですが、共形変換群は $SO(n+1,1)$ と書かれる群になることが知られています。回転群 $SO(n)$ は共形変換群 $SO(n+1,1)$ の部分群になっていますが、共形変換群には $SO(1,1) \subset SO(n+1,1)$ という部分群もあり、こちらは時空のスケール変換 $\mathbf{x} \mapsto g\mathbf{x}$ に対応しています。演算子 $O(\mathbf{x})$ に対して、スケール変換が

$$\langle O(\mathbf{gx})O(\mathbf{gy})\rangle = g^{-2\Delta}\langle O(\mathbf{x})O(\mathbf{y})\rangle \qquad (1)$$

となるとき、Δ を演算子 $O(\mathbf{x})$ のスケール次元というのでした。

ある点 $\mathbf{x}$ での演算子 $O(\mathbf{x})$ 全体のなすベクトル空間 $\mathcal{V}$ には共形変換群 $SO(n+1,1)$ が作用します。量子力学ですから $\mathcal{V}$ には自然な正定値な内積が入り、$SO(n+1,1)$ の既約表現の直和に分解します。

$SO(n+1,1)$ の既約表現を一つとって V と書きましょう。V にはスケール変換 $SO(1,1) \subset SO(n+1,1)$ も作用しますので、V はスケール次元の異なる部分空間の直和にさらに分解できます。その中で最小のスケール次元を Δ と書き、それに対応する部分空間を $W_\Delta \subset V$ とします。この W_Δ に属する演算子のことをプライマリ演算子 (primary operator) と呼びま

す。W_Δ は回転群 $SO(n)$ の既約表現になることが知られています。それを ρ と書きましょう。$SO(n+1,1)$ の既約表現 V はこの Δ と ρ のペアで指定されますので、$V_{\Delta,\rho}$ と書きましょう。

以下、簡単のため、$n=3$ である 3 次元の共形場理論の場合に限定します。この場合は共形変換群は $SO(4,1)$ です。$SO(3)$ の既約表現 ρ はその次元 $2\ell+1$ で指定され、理論物理では ℓ のことをスピンと呼びます。そこで、ρ のかわりに ℓ で既約表現を指定することにしましょう。すると、演算子全体の空間 $\mathcal{V}$ は

$$\mathcal{V} = \bigoplus_i V_{\Delta_i,\ell_i} \tag{2}$$

と分解されました。ここで、Δ_i, ℓ_i は理論の i 番目のプライマリ演算子のスケール次元とスピンです。理論はかならず単位演算子 1 を含みます。これを $i=1$ 番目の演算子とします。$\Delta_1=\ell_1=0$ です。

1.2　演算子積展開

$\ell_i=0$ であるような演算子のことをスカラー演算子と呼びます。一つそのようなプライマリ演算子 ϕ を固定し、前回にならって演算子積展開を考えます。すなわち

$$\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) = \sum_O f_O^\phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})O(\mathbf{y}) \tag{3}$$

とします。ここで、右辺の O は演算子全体のベクトル空間 $\mathcal{V}$ の基底をわたり、f_O^ϕ は $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ に依存する展開係数です。両辺への共形変換群の作用を丁寧に調べることにより、次の二つの事実がわかります:

- プライマリ演算子でない O' は対応するプライマリ演算子 O に共形変換群を作用させて得られるため、展開係数 $f_{O'}^\phi$ も f_O^ϕ への共形変換群の作用によって得られる。
- プライマリ演算子 O に対する展開係数 f_O^ϕ は、定数倍 g_i^ϕ の自由度を除いて、ϕ のスケール次元 Δ_ϕ, O のスケール次元 Δ_O およびスピン ℓ_O によって定まる。

以上の準備のあと、4 点関数 $\langle\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})\phi(\mathbf{z})\phi(\mathbf{w})\rangle$ を演算子積展開を用いて計算しましょう。$\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})$ と $\phi(\mathbf{z})\phi(\mathbf{w})$ に対して演算子積展開を用いると

$$\langle\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})\phi(\mathbf{z})\phi(\mathbf{w})\rangle = \sum_{O,O'} f_O^\phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})f_{O'}^\phi(\mathbf{z}-\mathbf{w})\langle O(\mathbf{y})O'(\mathbf{w})\rangle \tag{4}$$

となりますが、2 点関数 $\langle O(\mathbf{y})O'(\mathbf{w})\rangle$ は $O=O'$ のときのみノンゼロで、さらにそのとき 2 点関数の形は共形対称性より Δ_O と ℓ_O だけで決まってしまいます。f_O^ϕ に関する上記の二つの事実とあわせると、すべての演算子 O にわたる和はプライマリ演算子 O_i にわたる和に書き直すことができ、

$$\langle\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})\phi(\mathbf{z})\phi(\mathbf{w})\rangle = \sum_i |g_i^\phi|^2 F_{\Delta_\phi,\Delta_i,\ell_i}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}) \tag{5}$$

となります。ここで、g_i^ϕ は考えている共形場理論に依存する量ですが、関数 F は共形変換群 $SO(4,1)$ のみで定まる関数です。右辺は一般には無限和になりますので、収束性の問題がありますが、かなり広い領域で収束することが知られています。

読者の中には大学の物理数学で球面調和関数を習った方もいらっしゃるでしょう。球面調和関数は 3 次元の回転群 $SO(3)$ にともなう特殊関数で、球面上の関数を展開するのに都合のよいものでした。関数 F も共形変換群にともなう特殊関数だと思うことができて、共形場理論

の 4 点関数も同様にこの特殊関数を用いて展開できるわけです。

2　ブートストラップ法

2.1　ブートストラップ方程式の導出

さて、上式 (5) は、4 点関数に対して演算子積展開を $\langle\Big(\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})\Big)\Big(\phi(\mathbf{z})\phi(\mathbf{w})\Big)\rangle$ と適用して導出しましたが、$\langle\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})\phi(\mathbf{z})\phi(\mathbf{w})\rangle$ は 4 点の入れ替えに対して対称ですので $\langle\phi(\mathbf{y})\phi(\mathbf{z})\phi(\mathbf{w})\phi(\mathbf{x})\rangle$ と入れ替えてから演算子積展開を $\langle\Big(\phi(\mathbf{y})\phi(\mathbf{z})\Big)\Big(\phi(\mathbf{w})\phi(\mathbf{x})\Big)\rangle$ と用いても計算できます。すると

$$\langle\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y})\phi(\mathbf{z})\phi(\mathbf{w})\rangle = \sum_i |g_i^\phi|^2 F_{\Delta_\phi,\Delta_i,\ell_i}(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w},\mathbf{x}) \quad (6)$$

が導かれました。

無限和 (5) と (6) にはそれぞれ収束性の問題がありますが、両者とも問題なく収束する広い領域がありますので、そこで両式の差をとると

$$\sum_i |g_i^\phi|^2 \Big(F_{\Delta_\phi,\Delta_i,\ell_i}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}) - F_{\Delta_\phi,\Delta_i,\ell_i}(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w},\mathbf{x})\Big) = 0 \quad (7)$$

が得られます。これは演算子積展開の順序に結果が依らない、すなわち演算子積展開が結合律を満たすことを示す関係式になっています。

O_i の中にはかならず $i=1$ の単位演算子 $O_1 = 1$ が含まれますので、$g_1^\phi \neq 0$ です。そこで、ϕ を定数倍して $g_1^\phi = 1$ としたのち、全体を $i=1$ の項で割ってから $i \geqq 2$ の項を右辺にうつすと、

$$1 = \sum_{i\geqq 2} |g_i^\phi|^2 G_{\Delta_\phi,\Delta_i,\ell_i}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}) \quad (8)$$

という式になります。ただし、

$$G_{\Delta_\phi,\Delta_i,\ell_i}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}) := -\frac{F_{\Delta_\phi,\Delta_i,\ell_i}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}) - F_{\Delta_\phi,\Delta_i,\ell_i}(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w},\mathbf{x})}{F_{\Delta_\phi,0,0}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}) - F_{\Delta_\phi,0,0}(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w},\mathbf{x})} \quad (9)$$

と定めました。

この関数 G は共形変換群から定まる特殊関数で引数に複雑に依存しますが、それを正定値の係数 $|g_i^\phi|^2$ を書けて足しあわせると不思議に定数 1 になってしまうというのがこの式 (8) で、理論に関する情報をたくさん含んでいるはずです。

このように理論それ自身の整合性を徹底的に調べて理論について何か情報を得ようという手法をブートストラップ法と呼びます。これは、西欧の標準的なほら話で、沼に落ちた際に自分のブーツのストラップを引っ張って抜けだしたという話があるからです。また、上記方程式 (8) はブートストラップ方程式と呼ばれます。

2.2　ブートストラップ方程式の解析

この複雑なブートストラップ方程式 (8) から情報をどのように取り出せば良いでしょうか。一つの方法として、$\mathbf{x} = (-1,0,0)$, $\mathbf{y} = (0,-1,0)$, $\mathbf{z} = (0,1,0)$, $\mathbf{w} = (1,s,0)$ と取り、ブートストラップ方程式 (8) を s で二回微分します。左辺は当然ゼロになりますので、右辺は正の項と負の項が相殺している必要があります。特殊関数

$$a_{\Delta_\phi,\Delta,\ell} := \frac{\partial^2}{\partial s^2} G_{\Delta_\phi,\Delta,\ell}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w})\Big|_{s=0} \quad (10)$$

を丁寧に調べると、$\ell \neq 0$ なら一般に $a_{\Delta_\phi,\Delta,\ell} > 0$ で、$\ell = 0$ の場合は何か Δ_ϕ に依存する関数 $d(\Delta_\phi)$ があって $\Delta \leqq d(\Delta_\phi)$ では $a_{\Delta_\phi,\Delta,\ell} \leqq 0$ だが $\Delta > d(\Delta_\phi)$ では $a_{\Delta_\phi,\Delta,\ell} > 0$ だ、ということがわかります。

ですから演算子 ϕ の存在は仮定した上で

$$\text{「この理論の全ての } \ell = 0 \text{ の演算子の スケール次元は } d(\Delta_\phi) \text{ より大きい」} \tag{11}$$

という仮定をしますと、正の項ばかり足してゼロになることになって矛盾します。よって、「かならずスケール次元が $d(\Delta_\phi)$ 以下であるような $\ell = 0$ のプライマリ演算子が存在する」という非自明な情報が得られました。

2.3　数値的ブートストラップ法

以上の情報は、位置 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ をうまく選んだ上で特殊関数 G のふるまいを詳しく調べて得られたものです。別のうまい演算子の配置を考えて関数 G を詳しく調べることで、いろいろな有用な情報を取り出すこともできますが、近年ますます強力になるコンピュータの計算力を用いて数値的にブートストラップ方程式 (8) を調べることも可能で、それを特に数値的ブートストラップ法といいます。

そのために、$\mathcal{X}$ を $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ に依存する関数全体からなるベクトル空間とし、(8) を $\mathcal{X}$ 内の式

$$\mathbf{1} = \sum_{i \geqq 2} |g_i^\phi|^2 \mathbf{G}_{\Delta_\phi, \Delta, \ell} \tag{12}$$

と見ます。すると、これはベクトル $\mathbf{G}_{\Delta_\phi, \Delta, \ell}$ で張られる凸錐の中にベクトル $\mathbf{1}$ が入っているという条件になります。与えられたベクトルで生成される凸錐内に別の与えられたベクトルが入っているかを判定する問題は、線形計画法 (linear programming) と呼ばれ工業的にも重要で、効率的なアルゴリズムが多種開発されています。演算子のスケール次元に対して上記 (11) のような何か仮定をおき、対応する線形計画法を実行し、(12) が解けないことが数値的に示されれば、その仮定は排除されます。このようにして、考えたい共形場理論の演算子のスケール次元に対して、それらの値が許されない領域を数値的に排除して、許される領域を絞りこむというわけです。

ここまでは $\phi(\mathbf{x})$ という一つの演算子の 4 点関数から導出されるブートストラップ方程式のみを考えていましたが、複数の演算子の 4 点関数からも同様にブートストラップ方程式を導出することが可能で、その場合は線形計画法の拡張である半正定値計画法というものを用いることになります。この方法を用い、さらに理論が $O(2)$ 対称性を持つと仮定した上で、$\ell = 0$ のプライマリ演算子 ϕ, s, t のスケール次元への厳しい制限を与えた論文 [2] の Figure 2 を以下の図 1 に示しましたのでご覧ください。

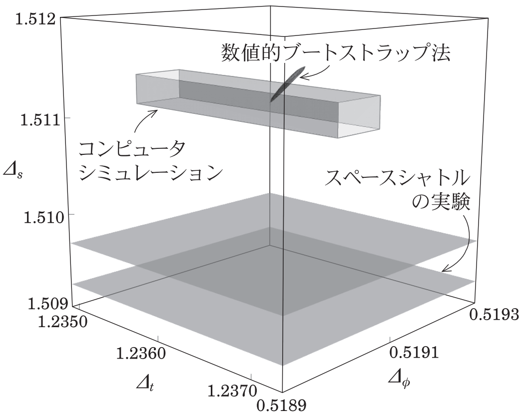


図 1　3 次元 $O(2)$ 模型の演算子 ϕ, s, t のスケーリング次元。

下部の 2 枚の平面に挟まれた部分が 1992 年のスペースシャトルの実験を解析して得られた [3] による制限で、上部の直方体はモンテカルロ法によるコンピュータシミュレーションによる制限 [4]、上部の非常に小さいピン状の領域が数値的ブートストラップによる理論値です。スペースシャトルでの実験では誤差の評価が楽観的すぎたため、理論値とずれているのではないかと思われています。

この分野にさらに興味を持った方は、日本語の成書 [5] や、最新のレビュー [6] をご覧になることをお薦めします。

●参考文献

[1] R. Rattazzi, V. S. Rychkov, E. Tonni and A. Vichi, *Bounding scalar operator dimensions in 4D CFT*, Journal of High Energy Physics **12** (2008) 031, https://arxiv.org/abs/0807.0004

[2] S. M. Chester, W. Landry, J. Liu, D. Poland, D. Simmons-Duffin, N. Su and A. Vichi, *Carving out OPE space and precise* $O(2)$ *model critical exponents*, Journal of High Energy Physics **06** (2020) 142, https://arxiv.org/abs/1912.03324

[3] J. A. Lipa, D. R. Swanson, J. A. Nissen, T. C. P. Chui, and U. E. Israelsson, *Heat Capacity and Thermal Relaxation of Bulk Helium very near the Lambda Point*, Physical Review Letters **76** (1996) 944–947, https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.944

[4] M. Hasenbush, *Monte Carlo study of an improved clock model in three dimensions*, Physics Review **B100** (2019) 224517, https://arxiv.org/abs/1910.05916

[5] 中山優『高次元共形場理論への招待 ––3 次元臨界 Ising 模型を解く』(SGC ライブラリ 153) サイエンス社 (2019)

[6] S. Rychkov and N. Su, *New developments in the numerical conformal bootstrap*, Reviews of Modern Physics **96** (2024) 045004, https://arxiv.org/abs/2311.15844

第 12 回 — 結びにかえて: 超対称場の量子論について

はやいものでこの連載も最終回となりました。今回は、場の量子論と数学との関係で非常に大きな役割を果たしてきた超対称場の量子論について軽く触れて、結びにかえたいと思います。

1 超対称場の量子論とは

連載第 5 回で見たように、場の量子論における場の演算子は $\phi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{y})\phi(\mathbf{x})$ を満たすボゾンと、$\psi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{y}) = -\psi(\mathbf{y})\psi(\mathbf{x})$ を満たすフェルミオンに大別されます。通常の対称性は、ボゾンをボゾンに、フェルミオンをフェルミオンに変換しますが、超対称性はボゾンとフェルミオンを入れ替える働きをします。超対称性を持つ場の量子論を超対称場の量子論と呼び、その例は 1970 年代に弦理論の研究の過程で時空が 2 次元の場合にまず発見されましたが、すぐに時空が 4 次元の場合に拡張され、素粒子物理におけるナチュラルネス問題などの理論的な解決に有効であることが判明しました。そのため、理論的にも実験的にも現在に至るまでたくさんの研究がなされていますが、現実世界に超対称性があるかどうかは実験的には決着がついていません。

それに並行して、超対称場の量子論の研究から、数学、特に幾何学への大きな寄与が何度か生じました。この連載では、場の量子論自体を数学的に定式化するという側面に注目してきましたが、超対称場の量子論の数学へのこれまでの寄与は、おおむね、それ自身の定式化に関するものではありません。超対称場の量子論のふるまいが理論物理学者が信じているようなものであれば、幾何学においても対応する現象が成立するはずである。その幾何学における現象は数学者には知られていなかったが興味深いものであり、数学者はその現象を場の量子論を離れて数学者なりに研究する、という形をとります。

もうすこし具体的に、著名な例であるミラー対称性について見てみましょう。理論物理学者によれば、シンプレクティック多様体 M から 2 次元の超対称場の量子論 $T_A(M)$ を作ることができ、複素多様体 W からも 2 次元の超対称場の量子論 $T_B(W)$ を別の方法で作ることができますが、対 (M, W) をうまく選べば、二つの場の量子論の間の等式 $T_A(M) = T_B(W)$ が得られます。これから、M のシンプレクティック幾何と W の複素幾何の間に数学的な対応があるべきだ、ということになります。これがミラー対称性です。関連する超対称場の量子論の数学的定式化ができていれば、それを直接使って、このミラー対称性の数学的に厳密な証明ができるはずですが、残念ながらそうではないので、数学者は場の量子論を使わず直接ミラー対称性を調べている、というわけです。

では、なぜ理論物理学者は超対称場の量子論についての $T_A(M) = T_B(W)$ などの関係式を予期することができたのでしょうか? それには大きく二つの側面があるように思います。

まず、超対称場の量子論も場の量子論であり、それまでの場の量子論の理論・実験の両側にわたる研究成果を援用することができます。例えば、一億円の懸賞金がついているヤン–ミ

ルズ理論の質量ギャップ問題にしても、数学的な厳密な証明はまだ見当がつかないとはいえ、実験的には十分に検証されています。すると、超対称ヤン・ミルズ理論についても、質量ギャップを生じるかどうかを理論物理学者は判定できます。ミラー対称性に並んで著名な超対称場の量子論の数学への寄与として、低次元トポロジーにおけるザイバーグ–ウィッテン理論がありますが、これの理論物理側の出発点は超対称ヤン・ミルズ理論がいつどのように質量ギャップを生じるかというザイバーグとウィッテンによる研究にありますので、実験的なインプットがここでは不可欠だったわけです。

もうひとつは、超対称場の量子論はそのふるまいが一般の場の量子論より大人しく、多くの量が厳密に計算しうる、ということです。ここで厳密というのは論理が数学的に厳密だということでは必ずしもなく、計算結果が整数、有理数、もしくは具体的な特殊関数の組み合わせなど、誤差を含まない数学的表式になるということです。これは実験で測られるような小数点付きの誤差を含んだ量を計算することを目標とする通常の理論物理とは大きく異なった性質です。

この二つの事情を組み合わせると、現在の数学で厳密に証明できることを超えた実験的な知識から、現在の数学で厳密に扱いうる対象に対する非自明な現象が示唆されまた予言されうるというのが、おぼろげながらわかっていただけるかと思います。

2　超対称量子力学の場合

超対称場の量子論では厳密な量が取り出せることが多いと述べましたが、そのもっとも簡単な例を超対称量子力学の場合に見てみましょう。状態ベクトルのなすヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ とし、エネルギーに対応する作用素であるハミルトニアンを H とします。ボゾンとフェルミオンを区別するために、ハミルトニアンと交換する作用素 F で $F^2 = 1$ であるものを考えます。F の固有値は ± 1 で、対応して $Fv = v$ である $v \in \mathcal{H}$ をボゾン的、$Fv = -v$ である $v \in \mathcal{H}$ をフェルミオン的だと思うことにします。さらに、超対称作用素 Q を考えます。これは 2 乗するとハミルトニアンになる条件、すなわち

$$Q^2 = H \tag{1}$$

と、ボゾンとフェルミオンを入れ替える条件、すなわち

$$QF = -FQ \tag{2}$$

を満たすものとしましょう。Q と H はともに自己共役で、H は離散固有値しか持たないものとします。

$\mathcal{H}$ の内積を (v, w) と書きましょう。H の固有値を E とし、対応する固有ベクトル v で長さ 1 のものを取ります。

$$E = E(v, v) = (v, Ev) = (v, Hv) \tag{3}$$

ですが、

$$(v, Hv) = (v, Q^2 v) = (Qv, Qv) \geqq 0 \tag{4}$$

より、$E \geqq 0$ がわかり、また $E = 0$ と $Qv = 0$ が等価であることがわかりました。

さて、H の固有ベクトル v がボゾン的、すなわち $Fv = v$ だとします。さらに $E > 0$ だとしましょう。すると $w := Qv$ はノンゼロです。ここで、

$$Hw = Q^2 Qv = QQ^2 v = EQv = Ew, \tag{5}$$

また

$$Fw = FQv = -QFv = -Qv = -w \tag{6}$$

ですので、w は H の固有値 E の固有ベクトルでありフェルミオン的だとわかりました。この議論で、H の固有ベクトルで $E>0$ ならば必ずボゾン的なものとフェルミオン的なものが対になって現れることがわかります。

一方で、$E=0$ ならばこの議論を繰りかえそうとしても $w=Qv=0$ となりますので、ボゾン的なものとフェルミオン的なものが対で現れるとは限りません。そこで、H の固有値 $E=0$ の固有空間 V をさらに F の固有値 ± 1 に応じて V_+, V_- にわけ、いま考えている超対称量子力学系 T の指数を

$$\text{指数} = \dim V_+ - \dim V_- \qquad (7)$$

と定義します。この指数は超対称量子力学系の連続変形のもとで不変です。なぜなら、そのような連続変形では、H の固有値 E は連続的に変化しますが、その際、$E>0$ なる固有値が $E=0$ になったり、その逆が起こったとしても、$E>0$ ではかならずボゾン的なものとフェルミオン的なものの次元が等しいため、$\dim V_+$ と $\dim V_-$ が必ず同じだけ増減し、指数への寄与としては相殺するからです。提唱者のウィッテンの名を取ってこの量は通常ウィッテン指数と呼ばれます。

数学においても指数定理という有名な定理があり、それは微分多様体 M 上で位相的に定義された指数と解析的に定義された指数が一致するという形をとります。これの証明の一つとして、次の方針を取れることが知られています。まず、M から超対称量子力学系 $T_a(M)$ でパラメタ $a\in(0,\infty)$ に連続的に依存するものを作り、そのウィッテン指数が $a\to 0$ で位相的な指数、$a\to\infty$ で解析的な指数になることを示します。ウィッテン指数は超対称量子力学系の連続的な変形のもとで不変ですので、位相的な指数と解析的な指数は等しくなる、というわけです。

3　応用例

前節のウィッテン指数の議論を使って、超対称でない現実世界の実験事実から得られた知見と超対称性からくる理論的性質の組み合わせから非自明な数学的観察が得られるということを、なるべく簡単な例で見てみましょう。

ウィッテン指数は超対称量子力学のみならず超対称場の量子論について定義することができます。時空が 4 次元ならば、空間方向を $x\sim x+L, y\sim y+L, z\sim z+L$ と一辺が L の周期的境界条件を課します。すると、ハミルトニアン H の固有値は離散になり、さらに、前節で書いたような超対称作用素 Q およびボゾンとフェルミオンを区別する作用素 F で必要な性質をすべて満たすものが得られます。ウィッテン指数は理論の連続的な変形によらないことを学びました。特に、周期的境界条件の箱のサイズ L にも依存しないはずです。ですから、超対称場の量子論 T を選んで、そのウィッテン指数を $L\to 0$ の極限と $L\to\infty$ の極限で評価すると、同じ値が得られるはずです。

ここで、超対称場の量子論 T として、時空が 4 次元の場合のヤン・ミルズ理論を超対称化したものを考えます。通常のヤン・ミルズ理論にはボゾン場としてグルーオンがあり、非常に近距離では自由に飛び回っていますが、長距離極限では勝手に動くことができなくなります。この一つの定式化が質量ギャップの存在です。超対称化すると、グルーオンの超対称パートナーのフェルミオンを導入することになります。この超対称ヤン・ミルズ理論も、超対称性を忘れて既存の物理の知見を用いて解析することができ、超対称でない通常のヤン・ミルズ理論と同様に、非常に近距離では粒子は自由に飛び回っ

ていますが、長距離極限では質量ギャップが存在するはずだということがわかります。

超対称ヤン・ミルズ理論はゲージ群 G に依存します。簡単のため、G は連結かつ単連結なコンパクト非可換単純群としましょう。例として特殊ユニタリ群 $SU(n)$ や例外群 E_8 などがあります。

さて、ウィッテン指数を周期的境界条件の箱のサイズ L が非常に大きい場合に計算します。この場合は、質量ギャップが生じているとして計算するわけです。標準的な解析により、このときウィッテン指数は G の双対コクセター数 (dual Coxeter number) $h^\vee(G)$ になることがわかります。この双対コクセター数というのは理論物理に興味がなくとも単純リー群に対応する単純リー環の研究の際に自然に出てくるもので、具体的には、$h^\vee(SU(n)) = n$, $h^\vee(E_8) = 30$ などの値をとります。

次に、ウィッテン指数を周期的境界条件の箱のサイズ L が非常に小さい場合に計算します。この場合は、グルーオンとその超対称パートナーが自由に動いているとして計算します。すると、箱の x, y, z の 3 方向にそれぞれゲージ群の元 $g_x, g_y, g_z \in G$ が G の接続のホロノミーとして現れ、この 3 つの元は互いに交換することがわかります。さらに、そのような 3 つ組は

$$(g_x, g_y, g_z) \sim (hg_xh^{-1}, hg_yh^{-1}, hg_zh^{-1}) \quad (8)$$

という群の元 h を用いて一斉に共役をとる作用で同値類をとって考える必要があります。これら互いに交換する 3 つ組の同値類のなすモジュライ空間 $\mathcal{M}^G$ は一般に複数の連結成分を持ちますので、それらを添え字 i で区別して $\mathcal{M}_i^G$ と書きましょう。するとウィッテン指数は、こちらも標準的な計算により、

$$\sum_i (1 + \dim \mathcal{M}_i^G) \quad (9)$$

となることがわかります。

ウィッテン指数は連続変形で不変なはずですから、2 つの結果を比較して、

$$h^\vee(G) = \sum_i (1 + \dim \mathcal{M}_i^G) \quad (10)$$

が成り立つはずです。$G = SU(n)$ の場合は右辺は一項のみで $n = n$ となりますが $G = E_8$ の場合は右辺は 12 項あり $30 = 9+1+1+2+3+1+5+1+3+2+1+1$ となります。この議論は物理の側で [1] によってなされ、具体例で確認されましたが、場合分けによらず、かつ幾何学的意味を明らかにする一般的な数学的な証明が [2] によって数年後に与えられました。ヤン・ミルズ理論が質量ギャップを持つという実験事実を、超対称性と組み合わせることで、単純リー群に関する等式 (10) が得られたわけです。

4　結び: 場の量子論の数学とは?

では、簡単に一年間のまとめを述べて、締めくくりとしたいと思います。場の量子論は、理論物理で重要な位置を占めますが、ローレンツ不変なものに限っても数学的に包括的な定式化を与えることがいまだにできていません。そこで、定式化する際にどのような数学的問題があるのか、また、部分的に定式化できているものとしてどのようなものがあるか、など、これまで皆さんと一緒に見てきました。

既存の主要な定式化の中では、因子化代数 (factorization algebra) とよばれるアプローチについては、筆者自身が不慣れなため触れるこ

とができませんでしたが、それ以外の定式化は非常に簡略ではあるものの、ほぼ一通り扱うことができたかなと思います。これらの定式化はどれもずいぶん異なって見えたのではないでしょうか。しかし、どのアプローチも、場の量子論の性質の重要な部分を捉えており、真の包括的な場の量子論の数学的定式化は、これらをすべて含むようなものであるはずです。

筆者が研究をはじめた 20 年ほどまえでは、これらの数学的定式化相互の交流はほとんどなかったのですが、この 20 年間で随分と相互理解が進んできたように思います。筆者が 20 年後にまだ健康であるなら、その頃には場の量子論の数学に関してどのような情景を見ることができるでしょうか。そこには、この連載の若い読者の方からの重要な寄与もあるかもしれません。それを楽しみに、筆をおきたいと思います。

●参考文献

[1] E. Witten, Appendix to *Toroidal Compactification Without Vector Structure*, Journal of High Energy Physics **02** (1998) 006, https://arxiv.org/abs/hep-th/9712028

[2] A. Borel, R. Friedman, J. W. Morgan, *Almost commuting elements in compact Lie groups*, Memoir of American Mathematical Society, **157** (2002) 747, https://arxiv.org/abs/math.GR/9907007