# 共形場理論とインスタントンの統計力学

立川裕二 〈Institute for Advanced Study 1 Einstein Drive, Princeton, New Jersey 08540, USA e-mail: yujitach@ias.edu〉

超弦理論を研究していると、超弦理論なしで議論できる二つの量が、不思議なことに一致しているべきであるという予言が導かれることがしばしばある。この稿では、如何にしてそのような予言がなされるかを説明し、その一例として、2 次元の共形場理論のコヒーレント状態と 4 次元のインスタントンの統計力学の関係式を具体的に読者が確認できるようにしたい。

## 1. はじめに

超弦理論といいますと、一般向け解説書も多数出ておりますが、四半世紀たって未だに素粒子論の標準模型を超えた確固たる予言を出せずにいる現状をみて、超弦理論の研究は徒労であったのではないかという声も聞こえます[1]。関連分野にアイデアを提供はしました。超対称性、余剰次元などはその際たる例で、素粒子現象論、宇宙論で全く超弦理論と独自に研究されています。ただ、これらは実験的に検証されていないため、物理への寄与ということは出来ないかもしれません。

そこで著者が強調したいのは (物理学会誌上で行うのが意味があるか難しい所ですが) 数学および数理物理への応用です。典型的には、超弦理論の研究が数学におけるある主張を予言し、それが数学者によって厳密に証明される、ということが起こります。これによって、超弦理論の整合性が確かめられるとともに、数学の対応分野の発展を刺激してきました。数学で既に証明されていた事実が、超弦理論内で自然に理解される、ということもあります。ですから、

理論物理 : 実験物理 = 超弦理論 : 数学

という比喩をすることが出来、少なくともこちらには確固たる検証と寄与があったと言えるでしょう。

さて、超弦理論から得られる予言は、大抵、超弦理論が無くとも議論出来る二つの量 $X_A$ と $X_B$ が、表面上は全く違って見えるけれども、計算してみると実は一致する、という形をとります。この関係は次のように現れます。超弦理論においてある物理量 $X$ を計算したいとします。しばしばその計算は二通りで行うことが出来ますので、それを方法 $A$ と $B$ と呼びましょう。ある程度計算を超弦理論内で進め、物理量を $X_A$ および $X_B$ と表します。同じ量を二通りの方法で計算しただけですから、勿論 $X_A = X_B$ です。この段階で、$X_{A,B}$ は超弦理論を知らなくとも議論できる量になっていますが、違う方法で計算したので、一見全く違う式です。ですから、超弦理論を知らない人には、$X_A = X_B$ は不可思議な予言として現れることになります。

議論が抽象的に過ぎたかと思いますので、ひとつ著名な例、ゲージ重力対応を挙げます。これは、4 次元のゲージ理論の量 $(X_A)$ が、5 次元の重力理論の量 $(X_B)$ と不思議に一致するというものです。これを導くため、まず $X$ として、IIB 型超弦理論で平らな 10 次元空間を考え、そこに $N$ 枚の D3-ブレーンという空間 3 次元時間 1 次元のソリトンを考えます。この系の低エネルギー励起を二つの方法で調べます。方法 $A$ として、ブレーン上の開弦の励起を取り出して考えますと、$X_A$ として 4 次元の最大超対称 $SU(N)$ ヤンミルズ理論の強結合極限が得られます。一方、方法 $B$ として、ブレーンの周りの時空の歪みを一般相対論にしたがって調べますと、$X_B$ として 10 次元の古典超対称重力理論を 5 次元の反ドジッター空間という曲がった空間と 5 次元球面の積の上で考えることになります。以上超弦理論を知らなければわからない未定義語を沢山使いましたが、$X_A$ は 4 次元の場の理論ですから、超弦理論を知らなくても研究できる対象です。$X_B$ は高次元ですが古典的ですから、一般相対論の基礎を知っていれば調べられます。このふたつの一見全く異なるものが、おなじ物理を与えるというのが超弦理論の予言です。

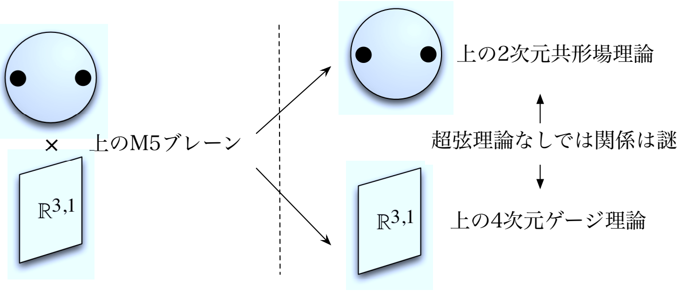


図 1: 超弦理論からの関係式の導出

このような予言は多々ありますが、以下、筆者が共著者と昨年偶然見つけました小さな例について説明したいと思います。今回は、4 次元のゲージ理論の物理量 $(X_A)$ が、二次元の共形場理論のある量 $(X_B)$ と一致するという関係です[1)]。この関係は、$X$ として、11 次元の M 理論に存在する空間 5 次元時間 1 次元、合計 6 次元の M5-ブレーンと呼ばれるソリトンを考えることからはじまります。この 6 次元のソリトンを $N$ 枚取って、それらが単に平らに広がっているのでなく、4 次元の空間 $A_4$ と 2 次元の空間 $B_2$ の組み合わせの上に巻いているとしましょう。この理論の物理量を調べる際に、方法 $A$ として、4 次元時空 $A_4$ の上の理論だと考えて調べることが出来ます。また逆に、2 次元時空 $B_2$ の上の理論だと考えて調べることも出来ます。する

[1] 著者のおりますアメリカではそういう声がメディアで流れることが多く身につまされます。オタクの研究者の恋を描いた “Big Bang Theory” という人気の TV ドラマでもそういう会話が随所に出ます。人気というのは冗談ではなくて、実際に視聴率も良く賞もいくつか取っています。国による科学の受容の差ということでしょうか？

と、一般に、4次元の理論のある物理量 $X_A$ が、2次元の理論の別の物理量 $X_B$ と等しくあるべしという予言が得られます。図1を参照ください。

更に特殊化して、簡単のためにブレーンを2枚取り、2次元空間 $B_2$ を球面の北極と南極に穴が開いたものにします。すると4次元の理論として、$A_4$ 上に $\mathcal{N}=2$ 超対称 $SU(2)$ ヤン=ミルズ理論という量子色力学の親戚が得られることが知られています。一方で $B_2$ 上には2次元の共形場理論が住んでいることがわかります。以上いろいろと超弦理論の専門用語をつかったよくわからない説明をしましたが、ここまで来ますと両者とも非常にあからさまに、超弦理論は全く参照せずに書き下せるもので、4次元のゲージ理論のある量が、2次元共形場理論の別の量と不思議に一致しているべきです[2)]。

論文を書いて数か月して教えていただいたことですが、実はこの関係式の $U(1)$ ゲージ理論に対応する場合は、数学者が全く独自に一昨年証明していていました[3)]。ですから、我々の結果はその自然な拡張になっているわけです。また、超弦理論を用いて導出した関係式の特殊な場合は、数理物理学者によって昨年末に証明されています[4)]。その他にも、同じ設定のもとで我々の計算したものとは異なる物理量を計算したグループ[5)] は、楕円ガンマ関数という特殊関数に不思議な等式があるべきだという結論に至りましたが、この等式は丁度昨年数学者が別個の動機から証明したもの[6)]でした。このように別個の動機から、しかしほぼ同時期に、弦理論屋と数学者が同じ関係式を調べていたというのは不思議な体験でした。

以下、残りの頁では二つの物理量を弦理論を使わず直接的に定義して、興味をお持ちになればご自身で一致を確認できるようにしたいと思います。等号の左辺は共形場理論におけるコヒーレント状態の長さの二乗で、右辺はインスタントンに基づいた統計力学模型の分配関数です。

## 2. 共形場理論のコヒーレント状態

空間1次元、時間1次元の理論がスケール変換に対して不変だとしましょう。エネルギー運動量テンソルは $T_{\mu\nu}$ ですが、スケール変換を生成するのは $T_{\mu\mu}$ ですから、これがゼロになるのでした。$x^\pm = t \pm x$ と光円錐座標をとりますと、$T_{+-}=0$ であり、ゼロでない成分は $T_{++}$ と $T_{--}$ だけになり、エネルギーの保存は $\partial T_{++}/\partial x^- = \partial T_{--}/\partial x^+ = 0$ という式にまとめられます。すなわち、$T_{++}$ は $x^+$ のみに、$T_{--}$ は $x^-$ のみに依存します。以下、左向きに動くモード、$T_{++}$ だけを考えることにします。

さて、空間方向に周期的境界条件 $x \sim x + \ell$ を置くと、$T_{++}$ をフーリエ展開することができます:

$$T_{++}(x^+) = \sum_{m=\infty}^{\infty} L_m e^{2\pi i m x^+/\ell}。 \qquad (1)$$

$L_0$ は $T$ の定数モードですからハミルトニアンです。$L_m$ は、次のような交換関係を満たします:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1), \qquad (2)$$

ただし $c$ はある定数で、中心荷と呼ばれます。これが有名なビラソロ代数です。

このように代数が与えられると、理論の状態空間を調べることができます。調和振動子を代数的に扱う場合を思い出しましょう。交換子は $[a, a^\dagger] = 1$ で、ハミルトニアンは $H = a^\dagger a$ でした。すると、$[H, a] = -a$, $[H, a^\dagger] = a^\dagger$ ですから、$a^\dagger$ はハミルトニアンを1増やし、$a$ は1減らします。ハミルトニアンの底が抜けていないとすると、ある状態 $|0\rangle$ があって $a|0\rangle = 0$ の筈です。すると、その他の状態は $(a^\dagger)^n|0\rangle$ で書けるというわけでした。

同様に、上記ビラソロ代数の場合は、$m$ が正とすると $L_m$ は $L_0$ を $m$ 減らし、$L_{-m}$ は $m$ 増やしますから、状態 $|\Delta\rangle$ があって

$$L_0|\Delta\rangle = \Delta|\Delta\rangle, \qquad L_m|\Delta\rangle = 0 \quad (m>0) \qquad (3)$$

となるはずです。$|\Delta\rangle$ はプライマリー状態と呼ばれます。その他の状態は $|\Delta\rangle$ に沢山 $L_{-1}$, $L_{-2}$ 等を作用させて得られます。

調和振動子の場合は、$(a^\dagger)^n|0\rangle$ の長さの二乗は自動的に正になりましたが、ビラソロ代数の場合は交換関係が複雑なためそうはいきません。$(L_m)^\dagger = L_{-m}$ とユニタリティを要求すると、$c>1$ であるか、$c<1$ の場合は $c$ は離散的な値しか許されないこと、さらに $\Delta$ の値が決まります。対称性の考察によって臨界現象の指数 $\Delta$ が決まってしまうわけで、実験とも合うことが知られているのでした。

さて、調和振動子の場合は、コヒーレント状態がいろいろな分野で重要です。これは、$a$ が固有値をもつ状態 $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ でしたが、$|\lambda\rangle = e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle$ とあからさまに書くことが出来ます。そこで、似た状態を考えましょう:

$$\begin{aligned} L_0|\Delta,\lambda\rangle &= \Delta|\Delta,\lambda\rangle, \\ L_1|\Delta,\lambda\rangle &= \lambda|\Delta,\lambda\rangle, \\ L_m|\Delta,\lambda\rangle &= 0 \quad (m>1). \end{aligned} \qquad (4)$$

これは

$$|\Delta,\lambda\rangle = (1 + kL_{-1} + k'L_{-1}^2 + k''L_{-2} + \cdots)|\Delta\rangle \qquad (5)$$

と展開して係数を下から再帰的に決定することができます。たとえば $k = \lambda/(2\Delta)$ です。この状態の長さの二乗を計算しますと、

$$\langle\Delta,\lambda|\Delta,\lambda\rangle = \\ 1 + \frac{\lambda^2}{2\Delta} + \frac{\lambda^4(c+8\Delta)}{4\Delta((1+2\Delta)c - 10\Delta + 16\Delta^2)} + \cdots \qquad (6)$$

となります。単に交換関係 (2) を使って真面目に計算するだけで、難しいことは何もありません。

このような調和振動子より複雑な系のコヒーレント状態は、二次元のカレント代数の場合はよく研究されていて、古典的なホイタッカー (Whittaker) の特殊関数の拡張になるためホイタッカー状態と呼ばれます。不思議なことに、ビラソロ代数でこのようなコヒーレント状態を考えた人は昨年まで殆どいなかったようです。

## 3. インスタントンの統計力学

4 次元側では $SU(2)$ ゲージ理論を考えることにします。滑らかなゲージ配位 $F^a_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}A^a_{\nu]} + \epsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$ に対して、

$$k = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^a_{\mu\nu} \tag{7}$$

は必ず整数になり、インスタントン数と呼ばれます。但し

$$\tilde{F}^a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^a_{\rho\sigma} \tag{8}$$

です。経路積分では作用が小さいほど大きな寄与をしますから、各インスタントン数 $k$ で作用を最小化することが重要でしょう。すると方程式

$$F^a_{\mu\nu} = \pm\tilde{F}^a_{\mu\nu} \tag{9}$$

が得られます。解をインスタントンと言います。$k$=1 のインスタントン解は

$$A^a_\mu = \frac{G^{ab}\eta^b_{\mu\nu}(x-x_0)^\nu}{(x-x_0)^2+\rho^2} \tag{10}$$

とかけることが知られています。ここで $x_0$ はインスタントンの中心、$\rho$ は大きさ、$\eta^a_{\mu\nu}$ はトフーフト行列という定数行列、$G^{ab}$ は $3\times 3$ の実回転行列です。自由度は $x_0$ に四つ、$\rho$ に一つ、$G^{ab}$ に三つ、合計八つあります。

トフーフトは経路積分をこれらインスタントン解とその周りの揺らぎに分解し、理論への寄与を計算しました。揺らぎを積分すると、八次元の自由度の空間上の複雑な関数が得られ、さらにそれを積分することになります。残念ながら $\rho$ の大きい領域から発散が生じ、物理的解釈は簡単ではありません。しかし、インスタントン解自体は数学者の興味を呼び、多くの研究を生みました。また、インスタントンと反インスタントンの流体を考えるなどして、量子色力学の低エネルギー構造の理解を試みるなどの仕事もありました。

量子色力学そのものは難しすぎますので、インスタントンに基づいた統計力学模型を考えましょう。インスタントン数が $k$ ならば $8k$ 個のパラメタ $X^i$ $(i=1,\ldots,8k)$ を持ちます。パラメタ空間には自然に計量 $g_{ij}$ が入りますので、一番簡単な模型は

$$Z = \sum_{k=0}^{\infty}\Lambda^{4k}\int d^{8k}X\sqrt{\det g} \tag{11}$$

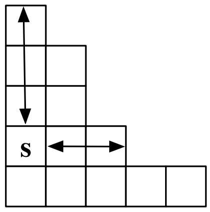


図 2　ヤング図 $Y$ の箱 $s$ に関する腕長 $A_Y(s)$、足長 $L_Y(s)$。図の場合は $A_Y(s)=2$, $L_Y(s)=3$ となる。$s$ が $Y$ の外にあるばあいは腕長、足長は負になる。

でしょう。$\Lambda$ はインスタントンの化学ポテンシャルです。トフーフトの仕事との比較で言えば、インスタントン周りの揺らぎの寄与を無視してしまうことに相当します。しかしこれではインスタントンの位置に関する積分などから無限大になってしまいます。

これを救うために、次の操作を考えましょう。簡単のため 2 次元の平面を考えます。勿論 $\int dxdy$ は無限大です。そこでガウス型の因子をいれて有限にします:

$$\int dxdy\, e^{-\pi\epsilon(x^2+y^2)} = 1/\epsilon. \tag{12}$$

$xy$ 平面を $x$ と $y$ が正準共役である相空間と思うと、$x^2+y^2$ は平面の回転を生成します。 回転に対する化学ポテンシャル $\epsilon$ をいれて答えを有限にしたわけです。

インスタントンのパラメタ空間は自然に力学系の相空間の構造が入ります。さらに、自然に時空の回転 $SO(4)$ と、時空の無限遠でのゲージ回転 $SU(2)$ が対称性としてあります。そこで、$x^1x^2$ 平面内の回転、$x^3x^4$ 平面内の回転、$SU(2)$ の元 $J^3$ に対してそれぞれ化学ポテンシャルを $\epsilon_1$, $\epsilon_2$, $a$ と導入しましょう。

インスタントン数 $k$ のパラメタ空間は非常に良く研究された空間ですから、$Z$ の各項は具体的に書き下すことができます[7]:

$$\begin{aligned} Z = \sum_{k=0}^{\infty}\Lambda^{4k}&\sum_{Y_1,Y_2}\prod_{i,j=1}^{2} \\ &\times\prod_{s\in Y_i}(-L_{Y_j}(s)\epsilon_1+(A_{Y_i}(s)+1)\epsilon_2+a_j-a_i)^{-1} \\ &\times\prod_{t\in Y_j}((L_{Y_i}(t)+1)\epsilon_1-A_{Y_j}(s)\epsilon_2+a_j-a_i)^{-1} \end{aligned} \tag{13}$$

但し、$(a_1,a_2)=(a,-a)$ とし、$Y_1,Y_2$ はヤング図で、箱の数が合計 $k$ 個であるようにします。$A_Y(s)$, $L_Y(s)$ はヤング図 $Y$ の箱 $s$ の腕長、足長と言われ、図 2 のように決めます。

$k=1$ とすると、$(Y_1,Y_2)$ は $(\square,0)$, $(0,\square)$ の二通りあり、$\Lambda^4$ の項は

$$\frac{\Lambda^4}{2\epsilon_1\epsilon_2((\epsilon_1+\epsilon_2)/2+a)((\epsilon_1+\epsilon_2)/2-a)} \tag{14}$$

となります。

公式を使わずとも、$k=1$ の場合は具体的な評価も簡単です。まず、$x_0$ についての積分は式 (12) が $x^1x^2$ 平面、$x^3x^4$ 平面に対してあるだけですから、積分の結果は $(\epsilon_1\epsilon_2)^{-1}$ です。一方、ゲージ方向の自由度 $G^{ab}$ とサイズ $\rho$ は自然に四元数 $q=z_1+z_2j$ にまとまることが知られています。但し $q\sim -q$ と同一視しないといけません。$\rho$ が $q$ の絶対値に、また $q$ の角度部分が $G^{ab}$ を表すわけです。インスタントンの具体形 (10) から、$q$ に対して対称性は $z_1$ を $(\epsilon_1+\epsilon_2)/2+a$ で、$z_2$ を $(\epsilon_1+\epsilon_2)/2-a$ で回す作用として働きます。これらが (14) の分母に現れているわけです。

$k=2$ とすると、$(Y_1,Y_2)$ は $(\square\square,0)$, $(\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square},0)$, $(\square,\square)$, $(0,\square\square)$, $(0,\genfrac{}{}{0pt}{}{\square}{\square})$ の五通りあります。頑張って計算しますと、$\Lambda^8$ の項は合計

$$\frac{\Lambda^8((\epsilon_1+\epsilon_2)^2+\epsilon_1\epsilon_2/8-a^2)/(8\epsilon_1^2\epsilon_2^2)}{((\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{2})^2-a^2)((\epsilon_1+\frac{\epsilon_2}{2})^2-a^2)((\frac{\epsilon_1}{2}+\epsilon_2)^2-a^2)} \tag{15}$$

となります。

## 4. おわりに

さて、以上 2 次元共形場理論におけるコヒーレント状態と、インスタントンの統計力学模型の分配関数をみてきました。ここで式 (6) において

$$\begin{aligned} c &= 1+6\frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)^2}{\epsilon_1\epsilon_2}, \\ \Delta &= \frac{(\epsilon_1+\epsilon_2)^2}{4\epsilon_1\epsilon_2}-\frac{a^2}{\epsilon_1\epsilon_2}, \\ \lambda &= \frac{\Lambda^2}{\epsilon_1\epsilon_2} \end{aligned} \tag{16}$$

としてみると、$\langle\Delta,\lambda|\Delta,\lambda\rangle$ は式 (14,15) で定まる分配関数 $Z$ と完全に一致することがわかります。$\lambda$ の高い次数の項も一致することは計算して確かめられます[2]。

これは筆者が アルダイ (Alday)、ガイオット (Gaiotto) と昨年発見した関係式[1)] をガイオットが簡単化したもの[2)] で、等号が成立することも昨年暮れに証明されました[4)]。既に説明したように、4 次元の立場からは、超対称ゲージ理論の分配関数を計算することになりますが、超対称性のためインスタントンの周りの揺らぎが相殺し、前節で取り扱った模型に帰着することがわかります。一方 2 次元の立場からは、球面の南極と北極にコヒーレント状態が挿入されていることが知られています。しかし、超弦理論の立場からは、同じ物理量を計算しているのですから、同じ結果を与えるはずだったわけです。

今回はひとつ実例をあげるだけになりましたが、この構成において、M5-ブレーンを巻く二次元空間の形を変えると、二次元の共形場理論が住んでいる空間が変わると同時に、4 次元にあらわれるゲージ理論の詳細も変わります。すると、共形場理論においていろいろな異なった量を計算すると、ことごとく 4 次元のインスタントンのいろいろな統計力学模型の分配関数と一致してしまうということになります。

共形場理論もインスタントンも 30 年以上調べられているものです。そして、共形場理論のコヒーレント状態も、インスタントンの分配関数も、超弦理論無しで議論できる量です。その間に昨年まで気付かれなかったこのような関係があります。しかし、超弦理論がなければ、何故その二つの量が一致するかの理由がありませんし、そもそも気付くことも難しかったでしょう。超弦理論には少なくとも、このように不思議な関係式を導く御利益があるということが判っていただければ幸いです。

おしまいに、共著者の L. F. アルダイと D. ガイオットに有益な議論を、また住友、瀧の二氏に原稿に関する意見を感謝したいと思います。

### 参考文献

1) L. F. Alday, D. Gaiotto and Y. Tachikawa, Lett. Math. Phys. **91** (2010) 167 [arXiv:0906.3219 [hep-th]].

2) D. Gaiotto, arXiv:0908.0307 [hep-th].

3) E. Carlsson and A. Okounkov, arXiv:0801.2565 [math.AG].

4) V. A. Fateev and A. V. Litvinov, JHEP **1002** (2010) 014 [arXiv:0912.0504 [hep-th]].

5) A. Gadde, E. Pomoni, L. Rastelli and S. S. Razamat, JHEP **1003** (2010) 032 [arXiv:0910.2225 [hep-th]].

6) F. J. van de Bult, arXiv:0909.4793 [math.CA].

7) N. A. Nekrasov, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2004) 831 [arXiv:hep-th/0206161].

(2010 年 5 月 11 日原稿受付)

**Conformal Field Theory and Statistical Mechanics of Instantons**

**Yuji Tachikawa**

abstract: Superstring theory often leads to a mysterious equality between two quantities which can be defined without referring to superstring theory. After briefly explaining how such an equality can be derived, we discuss a concrete one between the norm of the coherent state of two-dimensional conformal field theory and the statistical mechanics of four-dimensional instantons.

[2] 必要な式はこの小文に全て載っていますが、連絡を下されば Mathematica のコードを送ります。